

# PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR - P.N.L.

Fernando Pereira Tostes  
Mestrado (Wharton School of Finance and Commerce)  
Cursando Doutorado em Ciências Contábeis pela FEA USP

## I. INTRODUÇÃO

Programação linear surgiu em meados deste século e representou um avanço em técnicas de otimização, já que as restrições podem entrar num problema na forma de desigualdades, entre as quais as mais comuns são as de não-negatividade. Entretanto, uma premissa-chave em programação linear é que *todas* as funções envolvidas (a função objetivo e as restrições) são *lineares*.

Embora essa premissa seja adequada para grande número de problemas práticos, isso nem sempre acontece. Muitos economistas acreditam até, que um certo grau de *não-linearidade* é a regra, ao em vez da exceção. Chiang apresenta o problema de programação não-linear na forma de maximização assumindo o formato geral conforme abaixo:

TABELA 1	
<u>PROBLEMA NÃO-LINEAR</u>	
Maximizar $\pi = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	
sujeito a $g^1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_1$	
$g^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_2$	
.....	
$g^m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_m$	
e $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$	

onde  $f$  é uma função côncava definida em  $R^n$  a valores reais. e  $g^1, g^2, \dots, g^m$  são funções convexas, também definidas em  $R^n$  a valores reais.

Numa forma mais compacta, o problema de programação não-linear também pode ser descrito como achar

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de forma a maximizar  $f(x)$ ,

sujeito a  $g(x) \leq b$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$   
e  $x \geq 0$ ,

onde  $f(x)$ , e  $g(x)$  são funções das  $n$  variáveis de decisão,

$g(x) = (g^1(x), \dots, g^m(x))$  e

$b = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ .

Tal como em programação linear, o problema acima possui três componentes:

- uma função objetivo
- um conjunto de  $m$  restrições, e
- um conjunto de condições de não-negatividade

para as  $n$  variáveis em questão. Igualmente se supõe que todas as funções sejam diferenciáveis, e  $m$  pode ser maior, igual ou menor que  $n$ .

Nenhum algoritmo irá solucionar cada problema específico usando esse formato genérico. Mesmo assim, tem havido progressos em vários casos especiais do problema, onde se estuda e estima o comportamento das respectivas funções.

Em problemas econômico-financeiros, por exemplo, existem várias razões pela qual uma função linear se torna não-linear. É comum

supor-se em problemas de programação linear que o lucro unitário de um produto seja constante. Isso nem sempre ocorre, podendo ser uma função decrescente do volume de produção, isto é, quanto maior o volume, menor o lucro unitário. Assim a função objetiva linear  $f(\mathbf{x}) = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n)$  seria trocada por outra não-linear do tipo  $P(\mathbf{x}) = (c_1(x_1)x_1 + c_2(x_2)x_2 + \dots + c_n(x_n)x_n)$  onde  $c_j(x_j)$  traduz uma função crescente da variável  $x_j$ . Da mesma forma poderiam haver alterações no âmbito das restrições. Por exemplo, o insumo  $i$  (energia elétrica) decresce à medida que aumenta o nível de produção de  $f$ , porque as últimas unidades são processadas mais rapidamente que as anteriores, isto é, usando menos tempo de máquina por unidade. Em programação linear, o coeficiente  $c_{ij}$  seria constante, mas no caso acima tal premissa ficaria prejudicada. O mesmo ocorreria se o coeficiente  $c_{ij}$  depender do insumo  $i$  mais o insumo  $k$ , incluindo um termo adicional nas restrições, que por sua vez englobam as variáveis  $x_j$  e  $x_k$ , eliminando novamente a linearidade.

Em tais casos, a formulação do problema de modo não-linear é recomendada, e com isso várias conveniências aplicáveis à solução linear não podem ser usadas. Entre elas o conforto de poder contar com programas de computador de fácil manuseio, permitindo soluções rápidas em diversas alternativas.

## II. EMBASAMENTO TEÓRICO DE P.N.L.

Dado o problema anterior

<b>TABELA 1</b>	
<b><u>PROBLEMA NÃO-LINEAR (PNL)</u></b>	
Maximizar $\pi = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	
sujeito a	$g^1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_1$
	$g^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_2$
	.....
	$g^m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_m$
e	$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

onde  $f$  é uma função côncava definida em  $\mathbb{R}^n$  a valores reais, e  $g^1, g^2, \dots, g^m$ , são funções convexas, também definidas em  $\mathbb{R}^n$  a valores reais.

Vamos supor que tal problema seja *fortemente consistente*, isto é, existe um ponto  $x_0$ , pertencente a  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $g^i(x_0) < 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , e  $x_0 > 0$ . Uma condição desse tipo é chamada *condição de Slater*. Este quesito sobre o problema original assegura a *qualificação das restrições* que é uma hipótese básica para a validade do teorema de KARUSH-KUHN-TUCKER, que enunciaremos a seguir.

Lembramos que para uma função  $f$  definida em  $\mathbb{R}^n$  a valores reais e diferenciável, denomina-se *gradiente de  $f$*  ao vetor cujas coordenadas são as derivadas parciais da função  $f$ , isto é,

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x)),$$

onde

$\partial_j f(x)$  é a derivada parcial de  $f$  com relação à variável  $j$ , sendo  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema (KARUSH-KUHN-TUCKER):**

Suponha que as funções  $f$  e  $g^1, \dots, g^m$  são a valores reais, definidas em todo  $\mathbb{R}^n$  e diferenciáveis.  $f$  é côncava e as  $g^1, \dots, g^m$  são convexas. Logo um vetor  $x^*$  pertencente a  $\mathbb{R}^n$  é um ótimo do "PROBLEMA PNL" se, e somente se, existem  $\lambda^*$  pertencente a  $\mathbb{R}^m$  e  $\mu^*$  pertencente a  $\mathbb{R}^n$ , tais que

$$i) \nabla f(x^*) - \sum \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*)$$

$$ii) \lambda_i^* g^i(x^*) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j^* x_j^* = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

$$iii) \lambda_i^* \geq 0$$

$$\mu_j^* \geq 0$$

A condição (i) é chamada de *condição lagrangiana* e é a que traz mais informações sobre o problema.

A condição (ii) é denominada *condição de complementariedade* e indica que se  $x^*$  satisfaz alguma restrição com folga, isto é, se alguma  $g^i(x^*) < 0$  então o multiplicador correspondente  $\lambda_i^*$  deve ser nulo. Portanto, as variáveis não-nulas do multiplicador correspondem àquelas restrições tais que  $g^i(x^*) = 0$ .

A condição (iii) é chamada a *condição de viabilidade dual*, que significa que os multiplicadores  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  devem ser não-negativos.

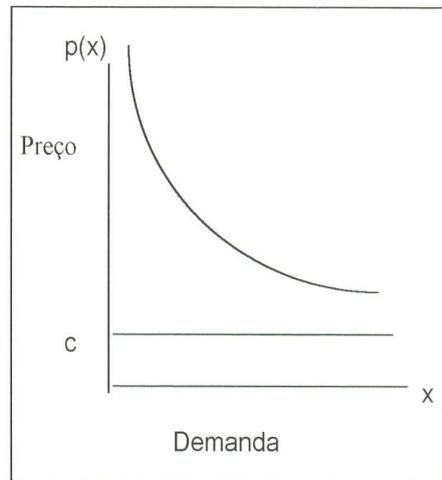
### III. APLICAÇÕES TÍPICAS DE P.N.L.

#### I. MIX DE PRODUÇÃO COM ELASTICIDADE DE PREÇO

Um problema clássico de programação linear é o de encontrar o *mix ótimo* de produção, de modo a *maximizar* a margem de contribuição global da empresa, mas considerando as diversas limitações de recurso para para fabricar os artigos. Em geral há um lucro unitário associado a cada produto, permitindo que a função objetiva seja linear. No entanto, observa-se com frequência nesse tipo de problema, fatores que introduzem *não-linearidades* na função objetiva, como *elasticidade de preço*. Nesse caso, a quantidade a ser vendida é uma função inversa do preço cobrado, e a curva de *preço-demanda* aparece como na FIGURA 1 abaixo, onde  $p(x)$  é o preço desejado para vender  $x$  unidades.

FIGURA 1

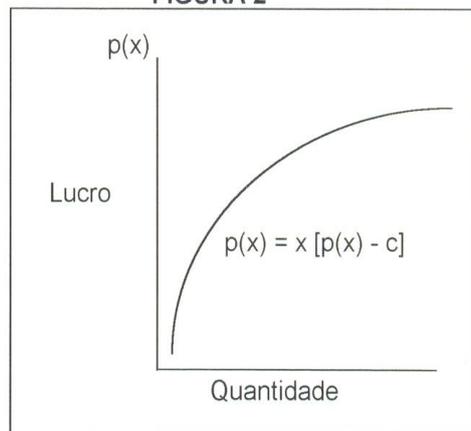
$c$  = custo unitário



Se o custo unitário do produto é fixo em ( $c$ ), a margem de contribuição para produzir e vender  $x$  unidades seria dada pela função não-linear abaixo, e ilustrada na FIGURA 2.

$$p(x) = x \cdot p(x) - c(x)$$

FIGURA 2



Função da Margem de Contribuição

Cada um dos  $n$  artigos da empresa terá uma função similar,  $P_j(x_j)$  para produzir e vender  $x_j$  unidades do produto  $j$ , sendo ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Logo, a função objetiva genérica será uma somatória de funções não-lineares.

$$f(x) = \sum P_j(x_j)$$

Existem outras razões, pela qual podem surgir não-linearidades. Por exemplo, o *custo marginal* unitário tende a cair com o aumento da quantidade produzida, em função do *efeito da curva de aprendizagem*, um incremento de eficiência produtiva à medida que aumenta a experiência. Mas pode também aumentar, pelo ônus adicional de encargos sociais, custo de manutenção, armazenagem, e outros inerentes ao aumento de produção.

Nas funções de restrição  $g_i(x)$  também podem ocorrer situações semelhantes de não-linearidade, se houver digamos, uma restrição orçamentária ao custo de produção total, e o custo marginal mostrar um comportamento tal como descrito acima.  $g_i(x)$  será não-linear sempre que o uso dos insumos correspondentes não forem exatamente proporcionais aos níveis de produção dos respectivos artigos.

## 2. SELEÇÃO DE CARTEIRA COM RISCO

Atualmente é comum a administração de grandes carteiras de ações e títulos de renda fixa através de computadores, que empregam programação não-linear para orientar as decisões de compra e venda. Como os investidores se baseiam conjuntamente com o *retorno (ganho)* e o *risco (oscilação de preço)* de seus patrimônios, programação não-linear é usado para organizar uma carteira que, dentro de certas premissas, produza uma combinação ótima entre esses dois fatores.

Imaginemos que um administrador deseje incluir  $n$  ações numa carteira, e que as variáveis de decisão  $x_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, n$ ) sejam o número de ações  $j$  a serem incorporadas.  $\mu_j$  e  $\sigma_{ij}$  são respectivamente a *média* e *variança (estimadas)* do retorno sobre cada ação  $j$ , onde  $\sigma_{ij}$  mede o risco de cada ação. Para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , sendo  $i \neq j$ , vamos denominar  $\sigma_{ij}$  a *covariança* do retorno de uma ação  $i$  e outra  $j$ . O *valor esperado*  $R(x)$  e a *variança*  $V(x)$  do retorno global da carteira é obtido por

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum \mu_j x_j \\ V(x) &= \sum \sum \sigma_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

onde  $V(x)$  mede o risco associado com a carteira. O truque para montar a combinação perfeita entre esses dois fatores é juntá-los na função objetiva a ser maximizada,

$$f(x) = R(x) - \beta V(x)$$

onde o parâmetro  $\beta$  é uma constante não-negativa que reflete a combinação preferida do investidor entre risco e retorno. Assim, se  $\beta=0$ , o risco deve ser ignorado por completo, enquanto um alto valor de  $\beta$  implica em dar um alto peso ao fator ao risco (ou seja, maximizar  $-V(x)$ ).

Portanto, o modelo completo de programação não-linear para o problema seria

$$\text{maximizar } f(x) = \sum \mu_j x_j - \beta \sum \sum \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } & \sum P_j x_j \leq B \\ & x_j \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

onde  $P_j$  é o preço de cada ação  $j$  e  $B$  é o total orçado para a carteira.

Conforme a *função-utilidade* do investidor (mede o valor relativo de diferentes retornos para o investidor) pode-se demonstrar que uma solução ótima para esse problema de programação não-linear *maximiza a utilidade esperada* (desejada) do investidor.<sup>1</sup>

Uma desvantagem da formulação acima é que, dado  $R(x)$  e  $V(x)$  serem relativamente impossíveis de medir, é um tanto difícil de escolher um valor apropriado para  $\beta$ . Por isso, ao em vez de se trabalhar com apenas um  $\beta$ , na prática usa-se um enfoque de programação

<sup>1</sup> Veja Bazaraa, Mokhtar S., e C.M.Shetty: "Nonlinear Programming: Theory and Algorithms". Wiley, New York, 1979.

*paramétrica* (não-linear) para produzir a solução ótima como função de  $\beta$ , sobre uma gama de valores de  $\beta$ . O passo seguinte é o exame de  $R(x)$  e  $V(x)$  para estas soluções ótimas, em determinado  $\beta$ , e então escolher a solução que parece fornecer a melhor combinação entre essas duas quantidades. Esse procedimento é chamado de *produzir soluções na fronteira eficiente* de um gráfico bidimensional de  $R(x)$ ,  $V(x)$  pontos possíveis  $x$ . A razão é que o ponto  $R(x)$ ,  $V(x)$  ótimo (para um dado  $\beta$ ), fica na fronteira do conjunto de pontos viáveis. E mais ainda, cada  $x$  ótimo é *eficiente* no sentido que nenhuma outra solução viável será tão boa com uma medida ( $R$  ou  $V$ ) e melhor com outra medida (menor  $V$  ou maior  $R$ ).

#### IV. CASO PRÁTICO

Vamos agora aplicar a teoria da seção II ao caso particular da seção III.2, tomando como exemplo os dados da TABELA 2 abaixo.

TABELA 2		
AÇÃO	$\mu_j$	$P_j$ \$
Acesita (ON)	3	5,00
Brahma (PN)	7	4,00
B.Brasil (PN)	10	2,00

onde

$\mu_j$  é a média estimada da rentabilidade de cada uma das ações.  $\mu_j = 3$ , por exemplo significa uma rentabilidade estimada para o período de 200%.  $P_j$  é o preço de compra estimado da ação.

A medida de risco é obtida pela variância ( $\sigma_{ij}$ ) de cada ação acima. E para cada uma computa-

se a covariância ( $\sigma_{ij}$ ) entre o retorno da ação  $i$  e  $j$ , montando-se a matriz abaixo.

$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$
$\sigma_{12}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{23}$
$\sigma_{13}$	$\sigma_{23}$	$\sigma_{33}$

onde

$\sigma_{11}$  é a variância do retorno da Acesita;  $\sigma_{22}$ , ídem para Brahma, e  $\sigma_{33}$ , ídem para Banco do Brasil (a covariância de uma variável com ela mesma é a sua própria variância).

$\sigma_{12}$  é a covariância entre o retorno da Acesita com Brahma.

$\sigma_{13}$ , ídem para Acesita e Banco do Brasil

$\sigma_{21}$ , ídem para Brahma e Acesita

$\sigma_{23}$ , ídem para Brahma e Banco do Brasil

$\sigma_{31}$ , ídem para Banco do Brasil e Acesita

$\sigma_{32}$ , ídem para Banco do Brasil e Brahma

Para a matriz de covariâncias foram arbitrados os números abaixo

1	0	0
0	2	0
0	0	1

Dado um orçamento  $B = R\$500.000$ , o problema pode ser estruturado na forma abaixo:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 - \beta (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2) \\ & \text{sujeito a } 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 500.000 \\ & \text{e } x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima --  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  deverá satisfazer as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema de Karush-Kuhn-Tucker. Processa-se os cálculos pertinentes, e toma-se  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ , o multiplicador correspondente às restrições de não-negatividade,  $e\lambda^* \in R$ , o multiplicador de restrição orçamentária. Temos

então as equações das condições Karush-Kuhn-Tucker

$$(i) \quad 3 - 2\beta x_1^* - 5\lambda^* = \alpha_1^* \quad (1)$$

$$7 - 4\beta x_2^* - 4\lambda^* = \alpha_2^* \quad (2)$$

$$10 - 2\beta x_3^* - 2\lambda^* = \alpha_3^* \quad (3)$$

$$(ii) \quad \lambda^* (5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 500.000) = 0 \quad (4)$$

$$\alpha_1^* x_1^* = 0 \quad (5)$$

$$\alpha_2^* x_2^* = 0 \quad (6)$$

$$\alpha_3^* x_3^* = 0 \quad (7)$$

$$(iii) \quad \lambda^* \geq 0$$

$$\alpha^* \geq 0$$

De posse de todos os dados, passa-se ao cálculo da solução ótima como função da constante  $\beta$  (grau de aversão ao risco do investidor). Presumindo que o gasto total não atinja o valor limite do orçamento -- R\$500.000 --, a equação (4) implica que  $\lambda^*$  (o multiplicador de restrição orçamentária) será igual a zero. Isso simplifica as equações (1), (2) e (3), transformando-as em

$$3 - 2\beta x_1^* = \alpha_1^* \quad (8)$$

$$7 - 4\beta x_2^* = \alpha_2^* \quad (9)$$

$$10 - 2\beta x_3^* = \alpha_3^* \quad (10)$$

Vamos agora multiplicar os dois membros da equação (8) por  $x_1^*$ , e obteremos

$$3x_1^* - 2\beta (x_1^*)^2 = \alpha_1^* x_1^* \quad (11)$$

A equação (5) implica que o membro da direita da expressão (11) é igual a zero. Logo,

$$3x_1^* - 2\beta (x_1^*)^2 = 0 \quad (12)$$

Para facilitar o desenho da solução supomos que  $x_1^* > 0$ , o que significa que a quantidade de ações a ser comprada será sempre positiva. Tal suposição nos permite simplificar a variável  $x_1^*$  da equação (12), obtendo então

$$x_1^* = 3/2\beta$$

Calculamos agora  $x_2^*$  seguindo os mesmos passos executados para o cômputo de  $x_1^*$ .

Multiplica-se a equação (9) por  $x_2^*$ , obtendo-se assim

$$7x_2^* - 4\beta (x_2^*)^2 = \alpha_2^* x_2^* \quad (13)$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, e usando a equação (6), temos que o membro direito de (13) é zero, obtendo-se

$$7x_2^* - 4\beta (x_2^*)^2 = 0 \quad (14)$$

Novamente simplifica-se  $x_2^*$ , supondo que é não-nulo, para obter então

$$x_2^* = 7/4\beta$$

Repetindo o mesmo processo para  $x_3^*$ , obteremos  $x_3^* = 5/\beta$ .

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

A solução ótima assim obtida é  $x^* = 1/\beta (3/2; 7/4; 5)$  que é uma função do grau de aversão ao risco do investidor ( $\beta$ ). Portanto, **quanto maior for o valor de  $\beta$ , menor será o investimento em cada ação e para valores muito pequenos de  $\beta$  maior será a quantidade investida.**

O investidor irá comprar uma quantidade maior de ações do Banco do Brasil, porque conforme os dados das páginas 9 e 10, sua variança é igual a 1, a rentabilidade estimada é a mais alta (10, ou seja 900%) e o preço o mais baixo (\$2). Conforme afirmamos na página 8, a expressão da solução em função de  $\beta$  nos diz que a direção da solução ótima será sempre a mesma, isto é, para qualquer valor de  $\beta$  o investido sempre comprará uma maior quantidade de ações do Banco do Brasil. Posto de outra forma, a proporção entre todas as coordenadas do portfólio ótimo será a mesma.

## V. COMENTÁRIO FINAL

Em problemas de otimização é comum nos depararmos com um comportamento não-linear

que deve ser levado em consideração. Em comparação ao método Simplex indicado para Programação Linear, não existe um algoritmo único que possa ser usado para resolver *todos* os problemas da PNL. No entanto, tem havido progresso em casos especiais como programação quadrática, programação convexa e não-convexa, incluindo o desenvolvimento *softwares* de uso geral para computador tipo main frame.

Para a contabilidade, o uso de PNL é limitado.

- a maior parte da *contabilidade financeira* está relacionada à mensuração e evidência de fenômenos econômicos, na qual não se emprega PNL.
- em *contabilidade gerencial*, a PNL tem utilidade nos problemas que objetivam apontar a alocação ótima de recursos.

Este tipo de tarefa geralmente é designada a engenheiros, por requerer maior familiaridade com as ferramentas matemáticas necessárias.

A teoria de Programação Não-Linear é uma ferramenta interessante, mas que poucas pessoas tem um domínio suficiente para usá-la correta e habitualmente no trabalho. Mesmo entre os engenheiros, não são muitos os que são capazes de resolver problemas de PNL sem recordar nos livros. A base de sua maior utilidade está no campo de finanças, distribuição de recursos (problemas de transporte), mercadologia e administração da produção, casos nos quais a não-linearidade da função-objetivo se aproxima mais à realidade.