

## CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA E QUESTÕES CONTEMPORÂNEAS - 01



\*Imagem gerada por inteligência artificial usando o DALL-E através do ChatGPT da OpenAI

O MISTERIOSO  $\phi$  “PHI”

**Wilma Dora Huacasi Mamani**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8711-1226>.

E-mail: [wilma@uenf.br](mailto:wilma@uenf.br).

**Luiz Antonio de Saboya**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2019-1943>.

**Resumo:** A Biomimética é uma nova ciência multidisciplinar que, embora recente enquanto campo do saber, já acumula vestígios de observações empíricas ao longo dos séculos. Uma das suas linhas de estudo está direcionada para as formas e proporções da natureza. Na busca da perfeição das grandes obras arquitetônicas é que a milhares de anos a proporção divina ou razão áurea foi utilizada como uma estratégia no vínculo com a natureza. Neste trabalho, lembraremos a razão áurea e a sequência de Fibonacci, a evolução das aplicações da razão áurea à sua relação com a sequência de Fibonacci e espiral logarítmica, a presença destes elementos na natureza, inspiração como modelo perfeito na busca de soluções em áreas multidisciplinares como na engenharia, arquitetura, arte e design, pois é rica em estratégias eficazes e ainda sustentáveis aos problemas do dia a dia. Portanto, demonstramos matematicamente a existência da proporção divina “Phi” e apresentamos exemplos de abrangência significativa.

**Palavras Chaves:** Biomimética, Proporção divina, Sequência de Fibonacci, Aplicações.

THE MYSTERIOUS  $\phi$  “PHI”

**Abstract:** Biomimicry is a new multidisciplinary science that, although new, already accumulates traces of empirical observations over the centuries. One of his lines of study is directed towards the shapes and proportions of nature. In the search for perfection in great architectural works, for thousands of years the divine proportion or Golden ratio was used as a strategy in connection with nature. In this work we will remember the golden ratio and Fibonacci sequence, the evolution of applications of the Golden ratio, its relationship with the Fibonacci sequence and logarithmic spiral, the presence of these elements in nature, inspiration as a perfect model in the search for solutions in multidisciplinary areas such as engineering, architecture, art and design, as it is rich in effective and sustainable strategies for everyday problems. Therefore, mathematically demonstrate the existence of the divine proportion “Phi” and present examples of significant scope.

**Keywords:** Biomimicry, Divine proportion, Fibonacci sequence, Applications.

## Introdução

Biomimética, do grego *bios*-vida e, *mimesis*-imitação, é um campo de estudos que se volta para a utilização das informações dos sistemas biológicos com vistas a desenvolver sistemas sintéticos (artificiais). Esta nova ciência estuda os modelos da natureza para aprender a resolver problemas técnicos humanos. Ambos (meio ambiente natural e o construído pelos seres humanos) estão estreitamente ligados. A urbanização tende a causar impacto ambiental negativo, mas diversas soluções, algumas de lavra relativamente recente, como telhados verdes e paredes vivas, ajudam a mitigar esses efeitos.

O ambiente construído (casas, prédios, estradas, viadutos, ruas, calçadas, sinalização, mobiliário urbano) coexiste e interage diretamente com o ambiente natural. Toda construção humana precisa se situar dentro do ecossistema natural e pode alterar ou ser afetada por ele. Em uma cidade, os rios, o relevo, o clima influencia como e onde a cidade é construída e, por outro lado, a construção humana (o artificial) pode alterar esses elementos naturais. Nas grandes cidades, tais como São Paulo e Rio de Janeiro, tais alterações podem ser vultuosas e vêm acontecendo ao longo de muito tempo. O ambiente construído tem alto grau de complexidade, com os diversos componentes físicos citados acima e as comunidades que congregam os cidadãos, com seus diversos níveis de organização envolvendo aspectos econômicos, sociais e políticos. Entretanto, o ambiente natural, por sua vez, oferece uma diversidade e complexidade ainda maior, com um número muito grande de espécies, uma grande variação e pluralidade: a biodiversidade dentro dos nichos ecológicos, dos biomas, das florestas.

Em nossos dias, um desafio cada vez mais urgente se coloca: na era do antropoceno, as ações predatórias que ameaçam essa biodiversidade estão se tornando avassaladoras. As questões climáticas estão impondo uma nova agenda que envolve desequilíbrios no regime de chuvas, e isso está associado ao assim chamado “efeito estufa”, resultante da queima de combustíveis fósseis. A exploração de petróleo, necessária para a produção de tais combustíveis, já há tempos traz diversas agressões ao meio ambiente, como aqueles resultantes de vazamentos ao longo de diversos pontos da sua cadeia produtiva. A extração de minérios (em especial o minério de ferro) traz as suas próprias complicações e estragos. O conjunto de atividades aí é bastante significativo, e a lista das agressões sofridas pelo meio ambiente natural

não para de aumentar. Pode-se citar o desmatamento para a exploração de madeira e plantação de pastagens para o gado, os incêndios florestais gerados de maneira criminosa, assim como atividades associadas a invasão de terras, garimpo ilegal, ataques a populações indígenas, e assim por diante. As causas desse estado de coisas são diversas e variadas. Dentre elas, aquelas que envolvem aspectos econômicos se destacam. Pode-se afirmar que o desenvolvimento da era industrial em nosso planeta veio ocorrendo a partir de uma visão extrativista do mundo natural, que na atualidade está atingindo níveis alarmantes.

A biomimética se propõe a lidar melhor com o Planeta Terra, tratando a natureza como fonte de inspiração e não algo a ser predado. Fugindo à atitude predominante em nossa moderna civilização industrial, a natureza é encarada como referência para o Design, tanto para pesquisas como para o desenvolvimento de projetos em diversas áreas. Assim, o campo de ação que se descortina é o da inacreditável biodiversidade da natureza do planeta (e em especial a do Brasil), onde milhares de espécies vegetais e animais nascem, se desenvolvem, se associam, se digladiam, constroem e destroem para manter o ciclo da vida em eterna evolução, com seus processos de seleção natural. É nela também que vamos encontrar o incrivelmente rico domínio do reino mineral com todas as suas nuances e variáveis.

Assim, com relação à natureza, temos ao final três possíveis abordagens básicas, não-excludentes e complementares, a saber: a) a *Natureza como Modelo*, em que os modelos da natureza são estudados e imitados, ou servem de inspiração (as suas configurações, processos e modos de funcionamento inspiram a resolução de problemas humanos); b) a *Natureza como Medida*, em que ela nos oferece um padrão ecológico para julgar o “acerto” das nossas inovações; e c) a *Natureza como Mentora*, em que há uma nova maneira de ver e valorizar a natureza, em uma atitude que põe em relevo não o que podemos extrair do mundo natural (postura extrativista e predatória), mas sim o que podemos aprender com ele.

A Biomimética, portanto, busca estudar uma gama significativa de temas tendo tais pressupostos como referência. O trabalho de Leonardo da Vinci merece destaque, pois foi o primeiro a estudar, metódica e cientificamente, o voo dos pássaros para desenvolver projetos. Uma das maneiras de se aprender com a Natureza se dá através da observação de padrões: os de movimento, aqueles de crescimento, os sistemas de estabilização e equilíbrio, os de acumulação e economia de energia, dentre outros. Uma temática que emergiu ao longo de muitos séculos de observações e experimentos empíricos (como o trabalho de Leonardo tão

bem exemplifica) foi a da “Geometria da Natureza”. De acordo com autores como Kimberly Elam (2010), pode-se falar em “proporção e natureza” na medida em que se observam padrões de crescimento em espiral em coisas como pinhas e girassóis. A assim chamada “proporção áurea” pode ser encontrada em alguns peixes e o padrão de crescimento de determinadas conchas segue bem de perto o que seriam “espirais logarítmicas de proporções áureas” (ELAM, 2010).

Desde a antiguidade, muito antes de Euclides, a geometria já era assunto relevante no Egito antigo, razões eram utilizadas para medir terrenos, volumes de celeiros, projetar pirâmides, barcos, barragens e canais, além do seu uso nas construções de estátuas, pórticos, muralhas, dentre outras inúmeras aplicações. Tão famosa era a geometria egípcia que matemáticos gregos como Tales de Mileto e Pitágoras foram ao Egito para ver o que havia de novo em matéria de linhas e ângulos. Para os egípcios a geometria era só estudada para resolver problemas pontuais e muitas vezes utilizada de forma empírica para as construções arquitetônicas; já para os antigos gregos não havia separação entre a geometria e a natureza, a geometria e os números eram sagrados porque eles codificam a origem do universo; nada era estabelecido sem que antes fosse demonstrado. Números, frações e proporções tornam o universo harmônico; os números estariam ligados a modelos naturais, foi assim que a harmonia e perfeição da natureza foram observadas e estudadas por filósofos, matemáticos, escultores, arquitetos e outros. Utilizaram a geometria seguindo padrões e proporções para construções gregas, esculturas e outras obras de arte. Hoje em dia, continuam sendo criadas belas obras de arte por artistas juntamente com matemáticos e ajuda da tecnologia computacional. Os padrões e proporções que mais trazem harmonia e beleza são encontrados nos modelos da natureza em que aparecem a proporção áurea e a sequência de Fibonacci. Não podemos deixar de mencionar que existem também alguns outros padrões geométricos, formas hexagonais e fractais que podem ser observados em samambaias, flocos de neve, corais, colméias e diversos outros elementos da natureza.

Neste trabalho, procuramos esclarecer alguns acontecimentos de acordo com a evolução do tempo e desmistificar, então, aquilo a que se refere o padrão da proporção áurea  $\Phi$ . Buscamos consolidar as suas bases matemáticas expondo analiticamente os cálculos envolvidos, e trazemos diversos exemplos tanto do mundo natural como do artificial, procurando ilustrar a

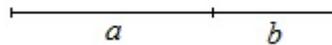
diversidade dos padrões observados e das aplicações ao longo do tempo histórico em artefatos, os mais diversos, na arquitetura, engenharias, nas artes e no design.

### A Proporção Áurea

Embora já no Egito Antigo fosse utilizada a razão para as obras arquitetônicas, foi na Grécia que a proporção áurea (número de ouro, proporção divina) foi colocada em destaque, utilizada pelo escultor e arquiteto Phídeas (470-425 a.C.). No século III a.C., Euclides de Alexandria formalizou esta relação: ela ocorre quando a razão de duas quantidades é igual a razão da soma das quantidades para a maior delas. Matematicamente, para quantidades  $a$  e  $b$ ,  $a > b > 0$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a} = \phi$$

Figura 1 – " $a$ " e " $b$ " em proporção divina



Fonte: Os autores, 2024.

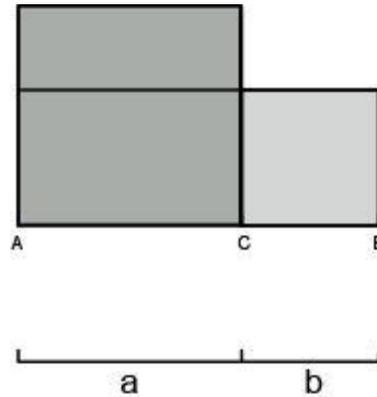
Assim afirmamos que  $a$  e  $b$ , na Figura 1, estão em razão áurea.

#### Qual o valor do número divino $\phi$ ?

Segundo os livros II e VI, *Elementos de Euclides*, relacionado a áreas e segmentos de reta, temos que a divisão do segmento de reta AB por um ponto C está em “média e extrema razão” se o quadrado dado pelo segmento AC tiver a mesma área do retângulo formado pelo lado maior AB e lado menor CB (ver Figura 2), isto é

$$AC \cdot AC = AB \cdot BC$$

$$a^2 = (a + b)b$$

Figura 2 – Procura do valor  $\phi$ 

Fonte: Os autores, 2024.

Por conveniência a igualdade anterior é colocada em função de  $x$  e  $y$ :

$$x^2 = (x + y)y$$

$$x^2 - xy - y^2 = 0 \text{ então } x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(1)(-y^2)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{5y^2}}{2} = \frac{y(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

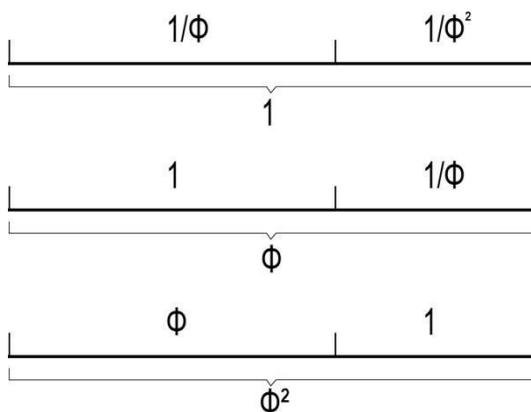
Assim temos que  $\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  ou seja para  $a > 0$ ,  $b > 0$ :  $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180 \dots$

Por conseguinte, a proporção áurea representada pelo número de ouro “Phi” é:

$$\phi = 1,6180 \dots$$

Segundo a filosofia grega antiga, ele simboliza a Evolução Consciente (LAWLOR, 1996). Não foi por acaso que Platão (428-348 a.C.) pediu para fazer um corte irregular numa linha, que revelasse uma proporção especial tal que o todo para o mais longo fosse igual ao mais longo para o mais curto. Ele sabia que isso resultaria no vínculo favorito com a natureza. Resolvendo o problema matematicamente, e considerando que a unidade pode atuar como o todo, segmento mais longo ou o segmento mais curto (OLSEN, 2006), na Figura 3, tem-se geometricamente:

Figura 3 – A unidade e a proporção divina



Fonte: Os autores, 2024.

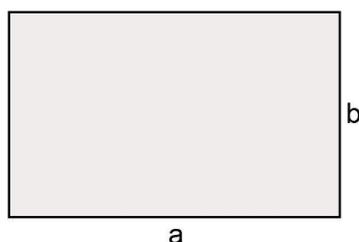
onde  $\phi = 1,6180 \dots$   $\frac{1}{\phi} = 0,6180 \dots$   $\phi^2 = 2,6180 \dots$   $\frac{1}{\phi^2} = 0,382 \dots$   
 assim:

$$\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$$

### Retângulo áureo

O retângulo áureo é o retângulo com proporção áurea, ou seja, é o retângulo onde a razão das medidas dos lados é o número de ouro  $\phi$ .

Figura 4 – Retângulo áureo:  $\frac{a}{b} = \phi$



Fonte: Os autores, 2024.

Para obter um retângulo harmonioso, com proporção áurea, como na Figura 4, fixamos um lado. Se for fixado o lado maior divide-se por  $\phi$ , e caso seja fixado o lado menor multiplique-se por  $\phi$ .

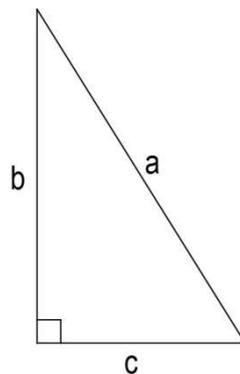
### Triângulo áureo

Da propriedade  $\phi^2 = 1 + \phi$ , um triângulo retângulo será áureo quando for semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa  $\phi$  e catetos 1 e  $\sqrt{\phi}$ . Então, com a Figura 5, temos a seguinte proposição.

*Proposição:* Um triângulo retângulo com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$  ( $b > c$ ) é áureo se, e somente se,

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\phi} = 1,272$$

Figura 5 – Triângulo retângulo áureo



Fonte: Os autores, 2024.

Prova:

( $\Rightarrow$ ) Se o triângulo retângulo é áureo, então o triângulo é semelhante a um triângulo com catetos 1 e  $\sqrt{\phi}$ , sendo  $\phi$  a hipotenusa, se  $b = \sqrt{\phi}$  e  $c = 1$  então  $\frac{b}{c} = \sqrt{\phi}$ .

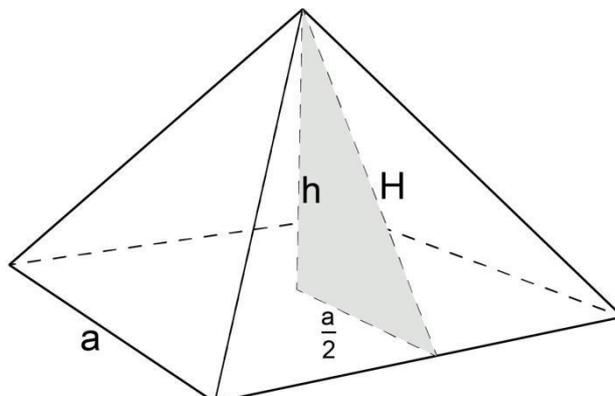
( $\Leftarrow$ ) Se o triângulo retângulo com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$  ( $b > c$ ) satisfaz  $\frac{b}{c} = \sqrt{\phi} = \frac{\sqrt{\phi}}{1}$ , então o triângulo retângulo é semelhante ao triângulo com hipotenusa  $a = \phi$  e catetos 1 e  $\sqrt{\phi}$ , ou seja, o triângulo retângulo é áureo.

A razão áurea pode ter sido conhecida mesmo muito antes da época dos gregos, pois segundo Burton (2011, p. 59):

O historiador grego Heródoto (500 a.C.) relata que os sacerdotes egípcios lhe haviam dito que as dimensões da pirâmide maior de Giseh (2500 a.C) haviam sido escolhidas

de maneira que a área da face triangular fosse igual a área do quadrado cujo lado é a altura da pirâmide, isto é na Figura 6:  $\frac{aH}{2} = h^2$ .

Figura 6 – Pirâmide reta



Fonte: Os autores, 2024.

Ou seja, a pirâmide deve satisfazer:  $\frac{2h}{a} = \frac{H}{h}$ .

No livro XIII de Euclides, a *pirâmide* reta de altura  $h$  com base quadrada de lado  $a$  e a altura  $H$  das faces laterais será *áurea* se o triângulo formado pelos lados  $h$ ,  $H$  e  $\frac{a}{2}$  for um triângulo áureo, ou seja, a pirâmide reta acima é áurea se  $\frac{2h}{a} = 1,272$ .

Portanto, se  $\frac{2h}{a} = \frac{H}{h} = \sqrt{\Phi} = 1,272$  então a pirâmide maior de Giseh é áurea.

## Uso da proporção divina ao longo dos anos

### Grande Pirâmide

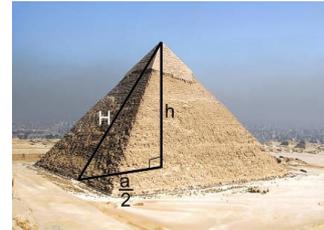
Entre os anos 2600-2500 a.C., utilizando proporções matemáticas, várias tentativas foram feitas nas construções das pirâmides antes de se chegar na proporção ideal. Finalmente, para abrigar o túmulo do faraó Quéops foram escolhidas as proporções que satisfazem o triângulo retângulo áureo na construção da grande pirâmide de Gizé. Na Figura 8 e Tabela 1, abaixo, pode ser verificado que a grande pirâmide de Quéops é uma pirâmide áurea e as outras, também conhecidas, não são áureas.

Figuras 7 – Pirâmides de Gizé



Fonte: Armani, 2022.

Figura 8 – Grande Pirâmide de Quéops



Fonte: Adaptado de Arquer, [20--].

Tabela 1 – Verificação da razão áurea na Grande Pirâmide

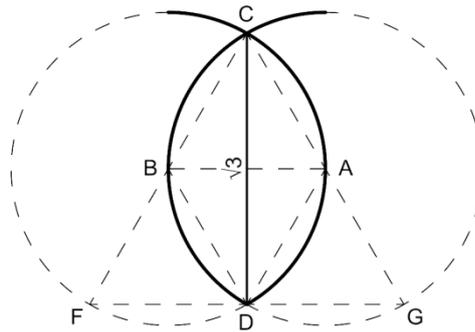
Pirâmide	Altura da Pirâmide: $h$	Dimensão da base: $a$	$\frac{2h}{a}$
Queops	146,59	230,33	1,272
Quéfren	143,50	215,20	1,333
Miquerinos	65,00	102,20 / 104,60	

Fonte: Saraiva, 2014.

### Números como símbolos sagrados

Sem dúvida, tanto para gregos como egípcios, um local torna-se sagrado quando as dimensões em que é construído incorporam proporções que sejam números inteiros ou números específicos como a proporção áurea, a diagonal  $\sqrt{2}$  do quadrado unitário que simboliza a geração de vida,  $\sqrt{3}$  da diagonal do cubo unitário ou do interior da Vesica Piscis (Figura 9), que simboliza a semente da vida, a  $\sqrt{5}$  da proporção divina que aparece tanto no retângulo com proporção áurea quanto na forma pentagonal pura, símbolo do renascimento e regeneração. Os egípcios empregavam um cânone (medida) sofisticado desses números para a construção de tumbas, templos e pirâmides do antigo Egito.

Figura 9 –  $\sqrt{3}$  no interior da Vesica Piscis

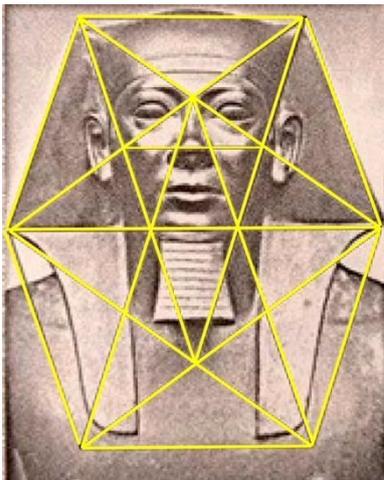


Fonte: Os autores, 2024.

### Formas pentagonais e pentagramas

Observe que a proporção áurea também está presente na forma pentagonal no busto do Faraó Menkaure (2490-2472 a.C.) e na máscara de Tutankhamon (1550-1307 a.C), conforme Figuras 10 e 11.

Figura 10 – Busto de Menkaure



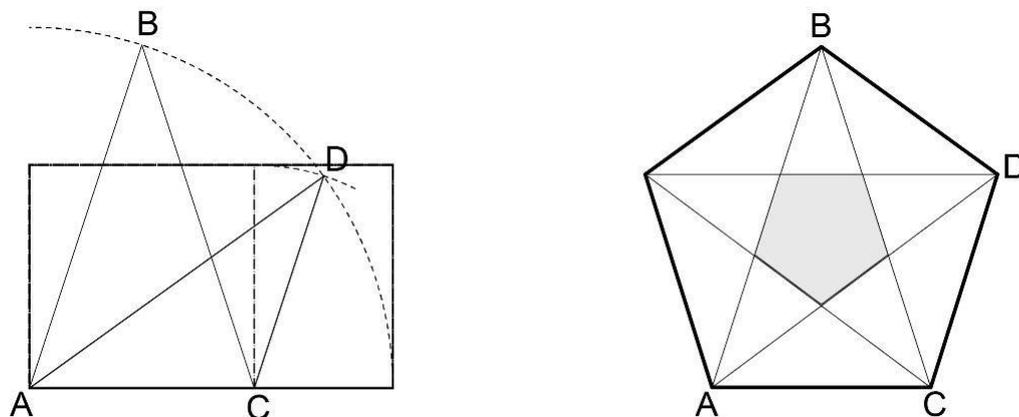
Fonte: Olsen, 2006.

Figura 11 – Máscara de Tutankhamon



Fonte: Máscara Mortuária de Tutancâmon, 2024.

Na Figura 12, a construção do pentagrama a partir do retângulo áureo com ajuda de lápis e compasso mostra as seções áureas contidas nele.

Figura 12 – Construção do Pentágono Regular com a proporção  $\phi$ 

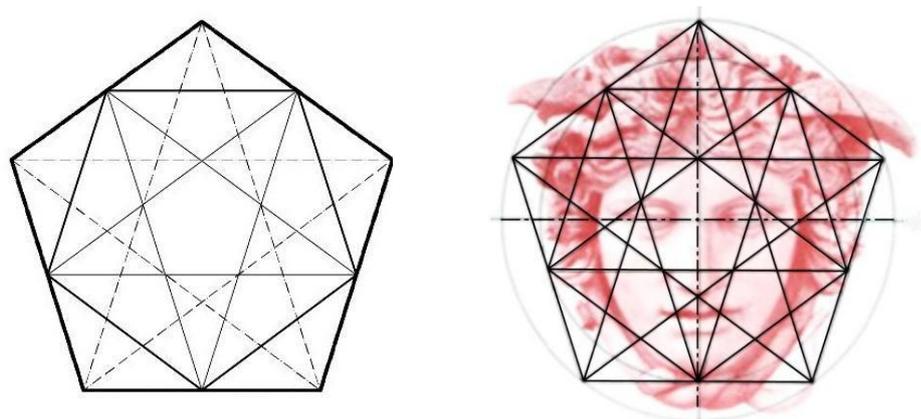
Fonte: Os autores, 2024.

Além de a proporção áurea estar presente na arte sacra do Egito, também esteve presente na arte e arquitetura grega e ainda que oculta, nos monumentos góticos da Idade Média. As inspirações a partir da natureza e formas geométricas de muitos artistas gregos baseiam-se nas construções geométricas, nas quais o desenvolvimento de cada forma parte de outra anterior.

### Máscara de Hermes

As proporções da antiga *máscara* de Hermes são determinadas pelas seções áureas contidas no pentagrama, como é mostrado na Figura 13.

Figura 13 - Pentagrama e máscara de Hermes

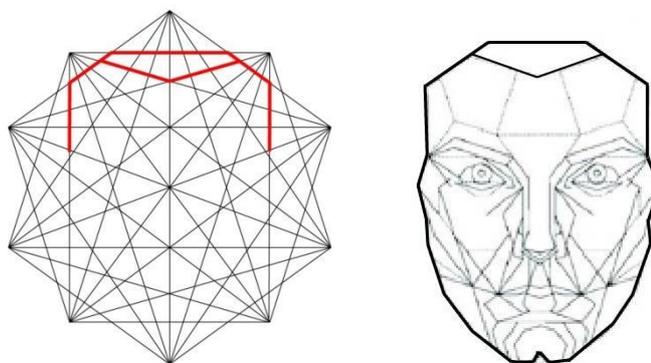


Fonte: Adaptado de Lawlor, 1996.

### Máscara “Phi”

Na busca incansável de se estabelecer “cânones”, tentando definir um padrão de beleza idealizado pela sociedade, é que, em 2001, o cirurgião plástico Steven Marquardt criou a máscara “Phi” usando dois pentágonos regulares invertidos (Figuras 14 e 15). Mesmo observando que a máscara foi ajustada apenas para formatos de rosto europeus, excluindo outros, pode ser verificado que muitas clínicas de beleza usam esta máscara como referência. O mais interessante é que, independente da máscara, pode ser verificado que a proporção áurea está presente no formato de rosto da modelo (Figura 16) abaixo.

Figura 14 – Construção da máscara Marquardt



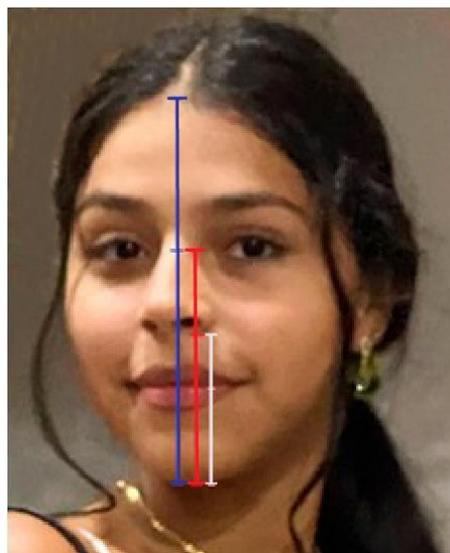
Fonte: Adaptado de Marquardt, 2002.

Figura 15 – Modelo com máscara “Phi”



Fonte: Marquardt, 2002.

Figura 16 - Modelo com proporção  $\Phi$



Fonte: Os autores, 2024.

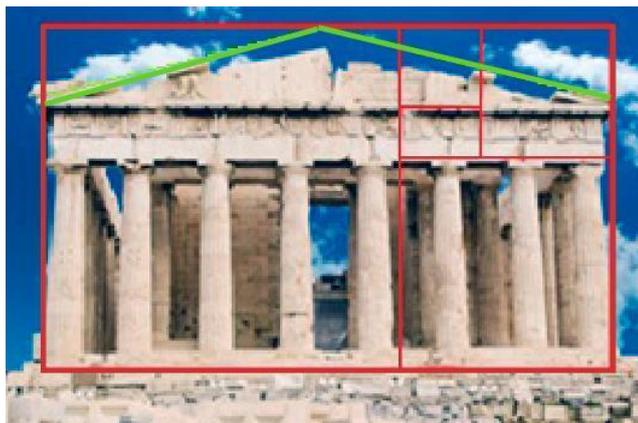
Portanto, a busca por determinados padrões é antiga. A observação de Lawlor a seguir nos leva a uma reflexão:

Seria errôneo dizer que se pode descobrir o número áureo em qualquer parte da natureza. Mas pode se dizer que onde quer que exista uma intensificação da função, ou uma especial beleza e harmonia de formas, ali se encontrará o número áureo (LAWLOR, 1996, p. 53).

### Parthenon

Acreditava-se que a proporção áurea poderia ter sido usada na construção do Parthenon (Atenas-Grécia), 432 a.C. no governo de Péricles, mas não foi assim. A reconstrução na década de 1980 verificou que as proporções verticais e horizontais do templo, bem como outras relações do edifício, como o espaçamento entre as colunas e a sua altura, foram regidas pela relação 9:4.

Figura 17 – Fachada do Parthenon em Atenas e o encaixe aproximado no retângulo áureo



Fonte: Adaptado de Nova, 2008.

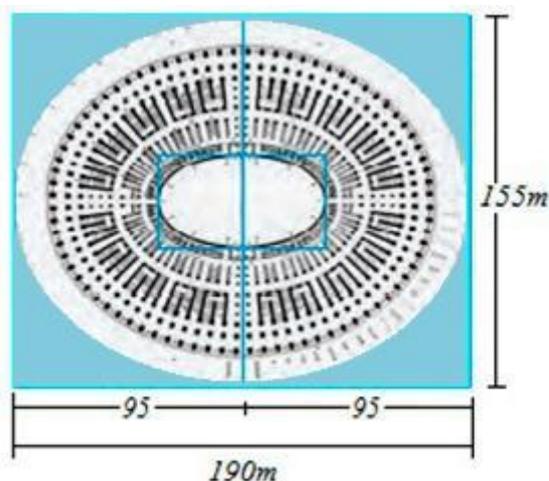
Segundo Doczi (2012), assim como Elam (2010), a fachada principal do Parthenon quase se encaixa no retângulo áureo, mesmo considerando os degraus, também os topos dos capiteis aproximar-se-iam do ponto áureo da altura total. O Parthenon tem 30,8m de largura, 69,51m de comprimento e 13,72m de altura, não satisfazendo exatamente e sim se aproximando da razão áurea, pois as unidades de medida utilizadas antigamente eram partes do corpo, e a *heterogeneidade dos corpos* confunde o uso do número de ouro.

### Coliseu de Roma e o Arco do Triunfo de Constantino

Os estilos das grandes obras arquitetônicas dos romanos (herdadas dos gregos, mas com maior escala), ambas as arquiteturas grega e romana, estão unidas pelo uso da proporção áurea, isto pode ser visto no Coliseu de Roma e no Arco do Triunfo de Constantino.

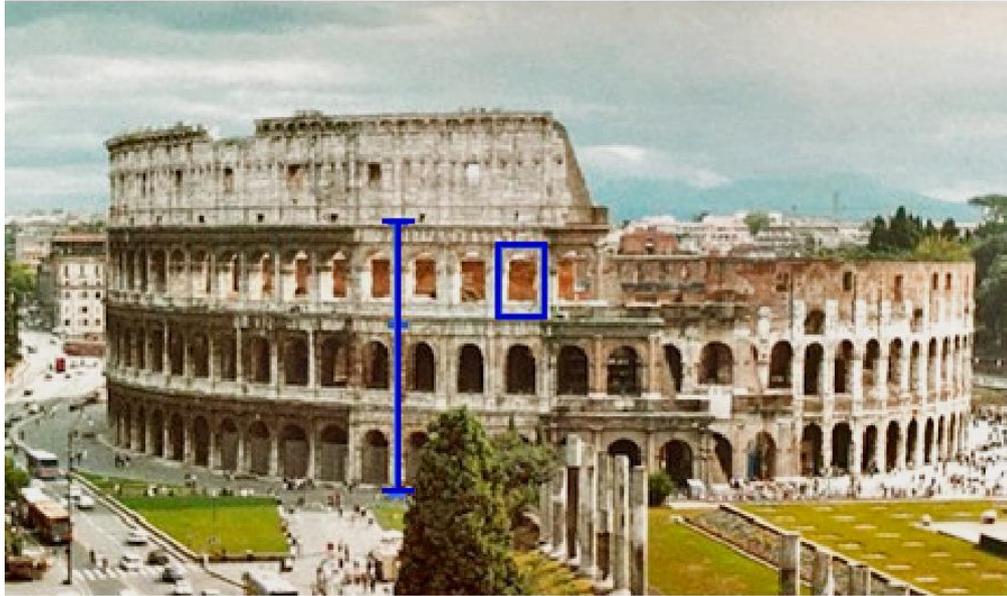
No Coliseu de Roma (70-80 d.C.): na Figura 18, na planta baixa elíptica onde os eixos maior e menor medem aproximadamente 190 metros por 155 metros respectivamente, pode ser observado que a elipse se encaixa em dois retângulos áureos, ou seja,  $155:95 = 1,63 \sim \Phi$ . Também pode ser observado que a razão dos eixos maior e menor da arena se aproxima da razão áurea, ou seja,  $87,5:55 = 1,59 \sim \Phi$ . Consta na literatura que existe divergência nas medidas da altura da fachada do coliseu, talvez porque inicialmente o coliseu foi construído com apenas três pisos sendo que o quarto piso foi um acréscimo à obra no reinado de Alexandre Severo Gordiano III. Assim pode ser verificado que ocorre a proporção áurea nos três primeiros andares ao longo da vertical como é mostrado na Figura 19, e também as 80 arcadas de cada piso se encaixam em retângulos áureos.

Figura 18 – Planta elíptica do Coliseu de Roma com dois retângulos áureos



Fonte: Adaptado de Sepúlveda, 2007.

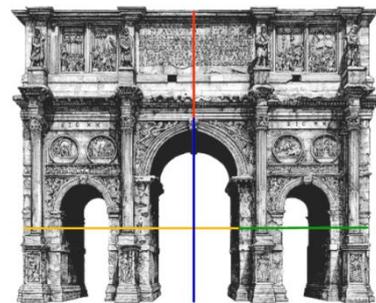
Figura 19 - Proporção áurea no Coliseu de Roma



Fonte: Os autores, 2024.

Na Figura 20, o Arco do Triunfo de Constantino (315 d.C.) é encaixado em dois retângulos áureos.

Figura 20 – Arco do triunfo de Constantino, Roma



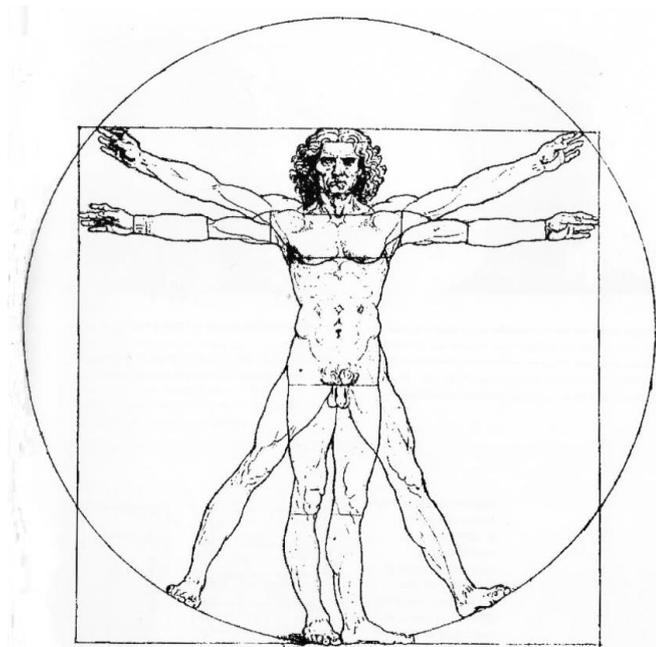
Fonte: Cáneba, 2013; Adaptado de Hipple, 2016.

### O Homem Vitruviano

Marcos Vitruvio (80-15 a.C.), arquiteto romano, acreditava que o corpo humano tinha uma analogia com tudo o que era perfeito na natureza e que, a partir das ideias de Pitágoras e Platão, os números perfeitos poderiam ser vistos nas proporções da forma humana. Segundo Doczi (2012, p. 93), “quando a Renascença redescobriu as ruínas clássicas de Grécia e de Roma, Leonardo da Vinci (1452-1519) ilustrou a versão da ideia de Vitruvio”, como se pode verificar

na Figura 21. O círculo e o quadrado, os dois combinados no corpo humano, representavam a união das diversidades do céu e da terra, ideia compartilhada por muitas religiões, tradições espirituais e mitologias na Antiguidade.

Figura 21 – O Homem Vitruviano por Leonardo da Vinci

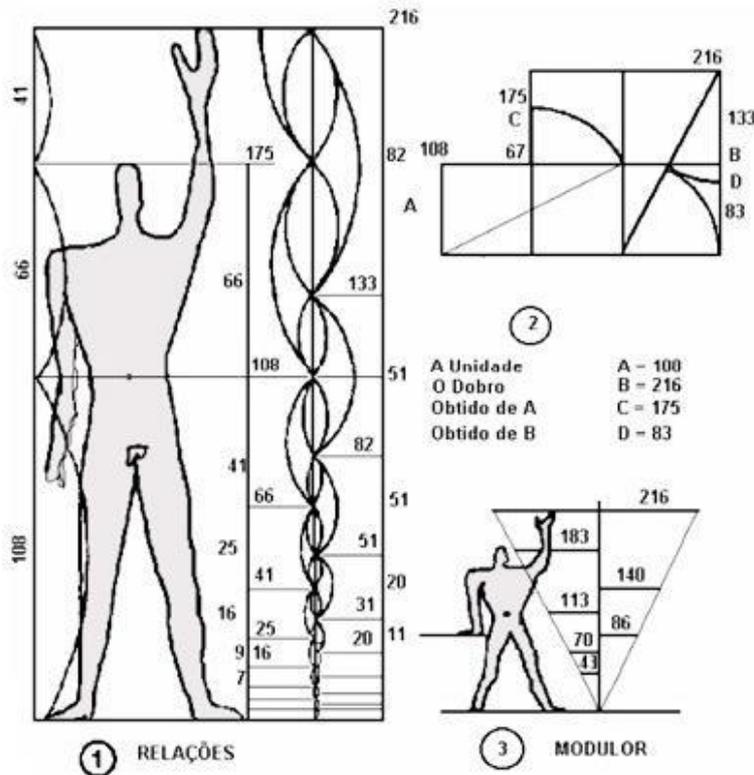


Fonte: Elam, 2010.

### O Modulor

Posteriormente, Le Corbusier (1887-1965) usou a proporção áurea criando “O modulor” como sistema de medida com o objetivo de harmonizar ambientes em relação ao corpo humano. Considerou a altura média de uma pessoa em torno de 1,75 a 1,83m, como é mostrado na Figura 22. Outras obras de Le Corbusier também contém a proporção divina (Figura 23).

Figura 22 – O Modulor, proporções do indivíduo



Fonte: Fascione, [201-?].

Figura 23 – Prédio do secretariado da ONU com retângulos áureos, 1952

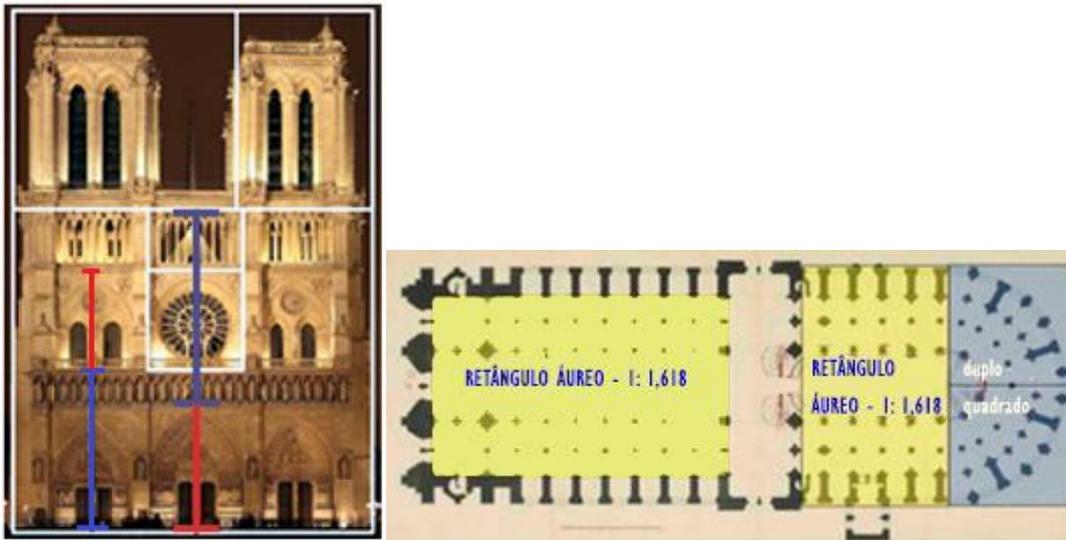


Fonte: Sede da Organização das Nações Unidas, 2024.

### Catedrais de Notre-Dame e Chartres

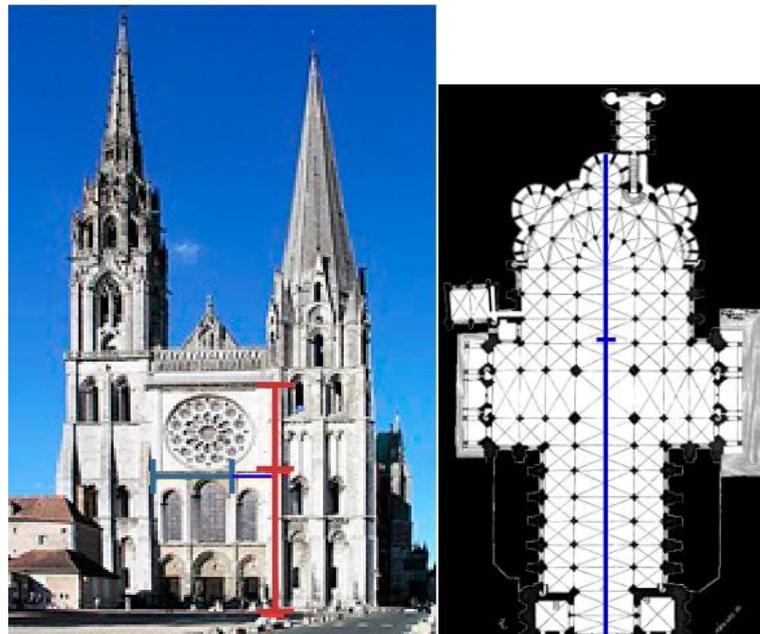
Na era medieval, segundo o livro de Luca Pacioli, a proporção divina influenciou na construção de catedrais como Notre-Dame e Chartres, conforme planta, fachada e pilares das Figuras 24 e 25.

Figura 24 – Razão áurea na fachada da catedral de Notre-Dame (1345) e na planta baixa



Fonte: Adaptado de Lima, 2018.

Figura 25 – Catedral Chartres e planta baixa

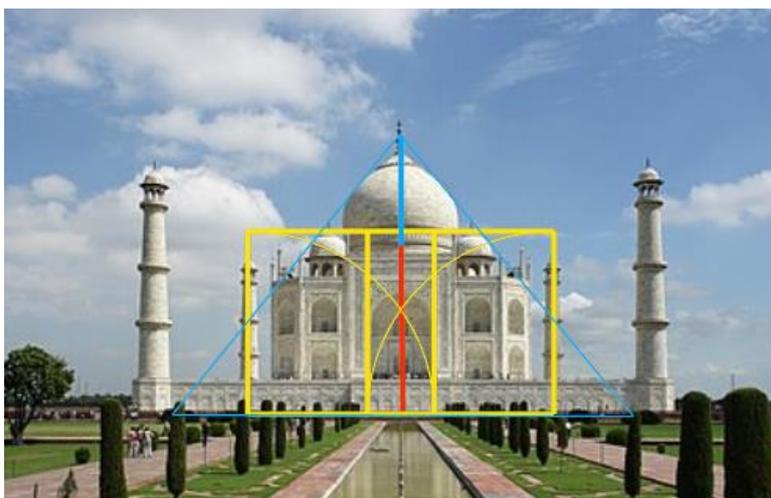


Fonte: Adaptado de Catedral de Chartres, 2024.

### Taj Mahal

O Mausoléu Taj Mahal, construído entre 1632 e 1653 em Agra, na Índia, pelo imperador Shah Jahan em memória de sua esposa favorita Mumtaz Mahal, tem a proporção áurea no triângulo, conforme se pode ver na Figura 26, a seguir.

Figura 26 – Taj Mahal e proporção áurea



Fonte: Adaptado de Taj Mahal, 2025.

O que mais fascina é que o retângulo áureo está relacionado com a sequência de números inteiros chamada sequência de Fibonacci.

### Sequência de Fibonacci

No século XIII d.C., Leonardo Fibonacci (1170-1250) propôs um problema sobre a multiplicação de coelhos. O problema é o seguinte: colocando um par de coelhos cercados, quantos pares de coelhos serão gerados em um ano, sendo que todos os meses cada par dá à luz um novo par, que se torna fértil a partir do segundo mês?

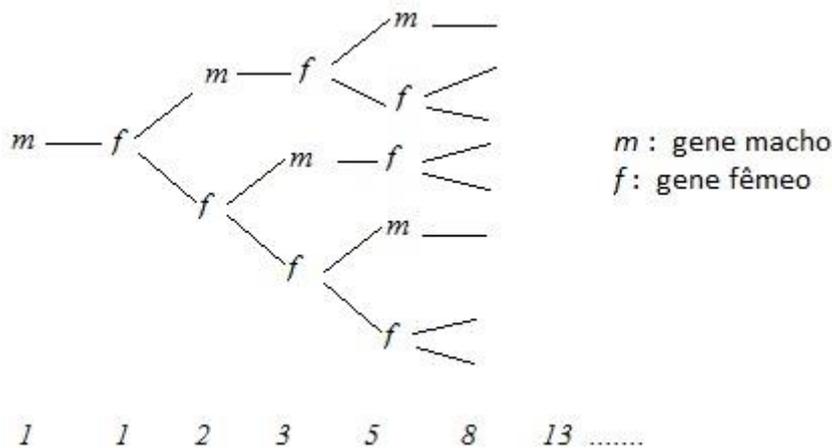
Quadro 1 – Coelhos e sequência de Fibonacci

Mês	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	7mo	...
Casal bebê: c	c	C	Cc	CcC	CcCCc	CcCCcCcC	CcCCcCcC	...
Casal adulto: C							CCcCCc	
Número pares	1	1	2	3	5	8	13	...

Fonte: Os autores, 2024.

No Quadro 1, a representação do casal bebê é denotada por *c* e do casal adulto por *C*. A sequência obtida – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... –, na qual cada termo é a soma dos dois números anteriores, é chamada *sequência de Fibonacci*. Com esta sequência resolveríamos o problema dos coelhos, mas este problema é apenas hipotético. Na natureza, no mundo das abelhas, pode ser observada essa sequência na árvore genealógica do zangão, pois para o zangão ser gerado seria preciso apenas o gene da fêmea (mãe) e para gerar uma abelha fêmea há necessidade dos genes macho e fêmea, ou seja, do pai e da mãe, como é mostrado na Figura 27.

Figura 27 – Diagrama da sequência genealógica do zangão



Fonte: Os autores, 2024.

Assim como as abelhas, outros insetos como as vespas, formigas, etc. seguem a mesma sequência.

### Relação entre sequência de Fibonacci e número áureo

Seja 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... denotada por  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \dots, F_n, \dots$  a sequência de Fibonacci, onde  $F_{n+1}$  é soma de seus dois números antecessores, isto é,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 2$ , também observemos que a razão entre um termo e o termo anterior, quando  $n$  cresce, se aproxima do número áureo, isto é:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,666$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

⋮

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180 \dots = \Phi.$$

Verificando, se

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = L$$

$0 < L < \infty$ ,  $L=?$

Na igualdade  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  podemos dividir pelo termo  $F_n$  e levando para o limite:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$L = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

$$L^2 = L + 1$$

$$\text{Assim } L^2 - L - 1 = 0 \text{ então } L = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

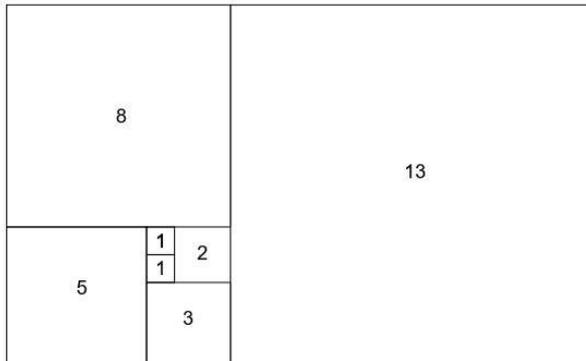
$$\text{Como } L > 0 \text{ temos } L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180 \dots$$

$$\text{Portanto: } \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180 \dots = \Phi.$$

Geometricamente, vamos considerar cada termo da sequência de Fibonacci  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \dots, F_n, \dots$  como o comprimento do lado de um quadrado. Desenhando a sequência de quadrados, obtemos o retângulo mostrado na Figura 28 e claramente

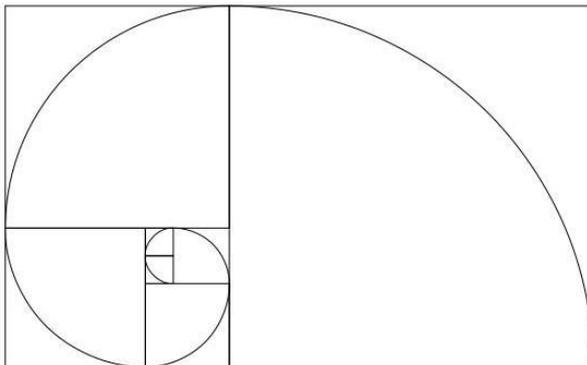
$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \quad n \rightarrow \infty \rightarrow \Phi = 1,6180 \dots$$

Figura 28 – Sequência de quadrados de Fibonacci



Fonte: Os autores, 2024.

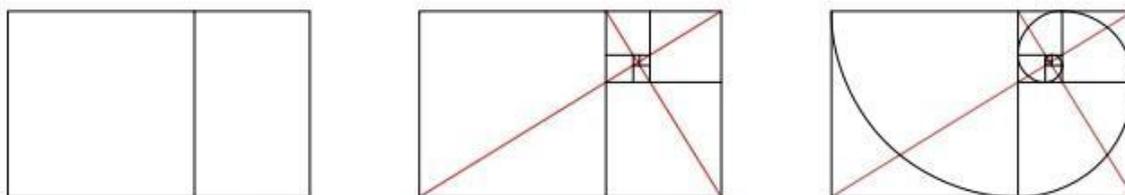
Figura 29 – Espiral de Fibonacci



Fonte: Os autores, 2024.

Ainda pode ser construído usando compasso centrado num vértice dos quadrados os arcos sequenciais em cada quadrado; dessa forma obtemos a espiral logarítmica acima, na Figura 29, chamada espiral de Fibonacci. Esta espiral também pode ser obtida diretamente a partir do retângulo áureo. Para isto, primeiramente desenhamos a sequência de retângulos áureos fazendo uso da razão áurea para uma primeira partição, e assim sucessivamente para cada retângulo áureo menor. Posteriormente, com a ajuda das diagonais principais do retângulo principal e do menor, podemos avançar conectando os arcos equiangulares com os vértices alternados de cada quadrado formado, como mostra a Figura 30, obtendo assim a espiral de Fibonacci.

Figura 30 – Construção do espiral áureo de Fibonacci



Fonte: Os autores, 2024.

A proporção áurea está presente na natureza através da série de Fibonacci, na lei mais simples de crescimento dos seres vivos, num simples acréscimo. Um exemplo bem notado é o caso dos moluscos em que o belo crescimento espiral logarítmico mostra que a concha cresce aumentando o tamanho em comprimento e largura, mantendo sempre as proporções iniciais. Como exemplos, na Figura 31 temos o Náutilus e o Argonauta, nas Figuras 32 e 33, que se aproximam da proporção áurea.

Figura 31 – Corte da concha Nautilus



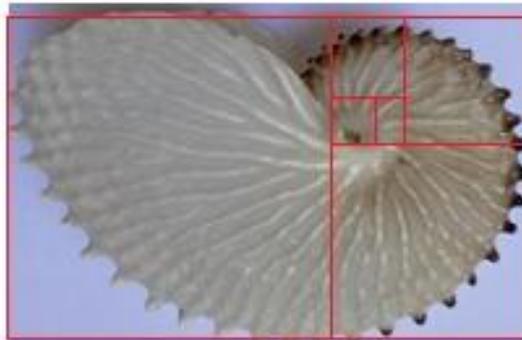
Fonte: Nautilus (Gênero), 2024.

Figura 32 – Concha Argonauta



Fonte: Os autores, 2024.

Figura 33 – Aproximação do espiral logarítmico



Fonte: Os autores, 2024.

Veremos posteriormente que a série de Fibonacci está presente também nos padrões espirais de sementes na cabeça do girassol, nas pétalas de margarida, nas cascas de pinhas, abacaxi, e outros padrões presentes nas plantas.

### Qual a fórmula fechada para a sequência de Fibonacci?

Voltando ao problema original dos coelhos, ainda se a questão fosse quantos pares de coelhos serão gerados em 24 meses, precisaríamos encontrar  $F_{24} = F_{23} + F_{22}$  e por recorrência teríamos que conhecer os dois termos anteriores e assim sucessivamente para cada termo. Portanto, precisamos de uma fórmula fechada onde a expressão seja capaz de calcular os termos em função de sua posição.

Para  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , a sequência de Fibonacci que satisfaz  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  tem fórmula fechada:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Prova: Por indução, vamos supor que se cumpre para  $F_k$  e  $F_{k+1}$ , então mostraremos que  $F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$

$$\begin{aligned} F_k + F_{k+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Mas  $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ , então

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

Portanto,

$$F_k + F_{k+1} = F_{k+2}.$$

### Números e espirais de Fibonacci na natureza

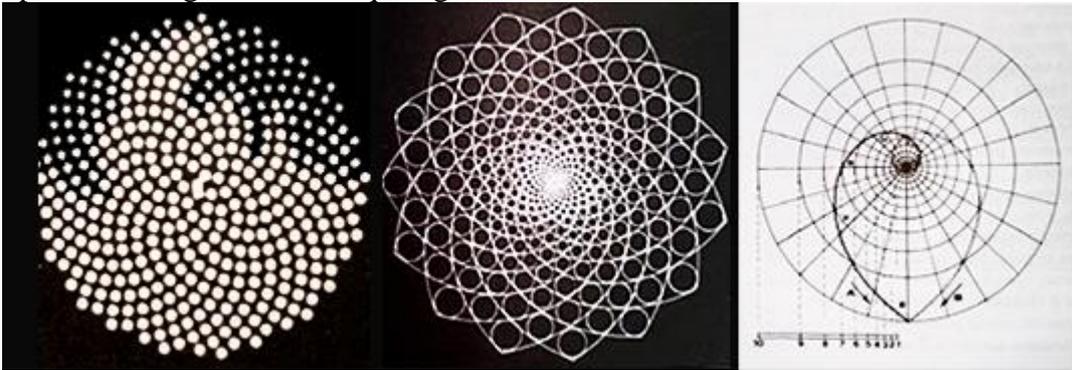
Na Figura 34, observe o centro das margaridas. O botão central de sementes forma o padrão que cresce na forma de dois grupos de espirais que se movem em direções opostas, uma no sentido horário e a outra no sentido anti-horário, como mostra a Figura 35. Segundo autores reconhecidos (DOCZI, 2012; OLSEN, 2006), essas espirais foram reconstruídas com uma série de círculos concêntricos e foi verificado que elas são logarítmicas e equiangulares, ou seja, os ângulos que formam com os raios permanecem sempre os mesmos. Assim, os estágios consecutivos de crescimento podem girar ao redor do centro até que se sobreponham perfeitamente, como um leque fechado, mostrando os mesmos ângulos e a mesma proporção em cada estágio de crescimento.

Figura 34 – Botão central da Margarida



Fonte: Os autores, 2024.

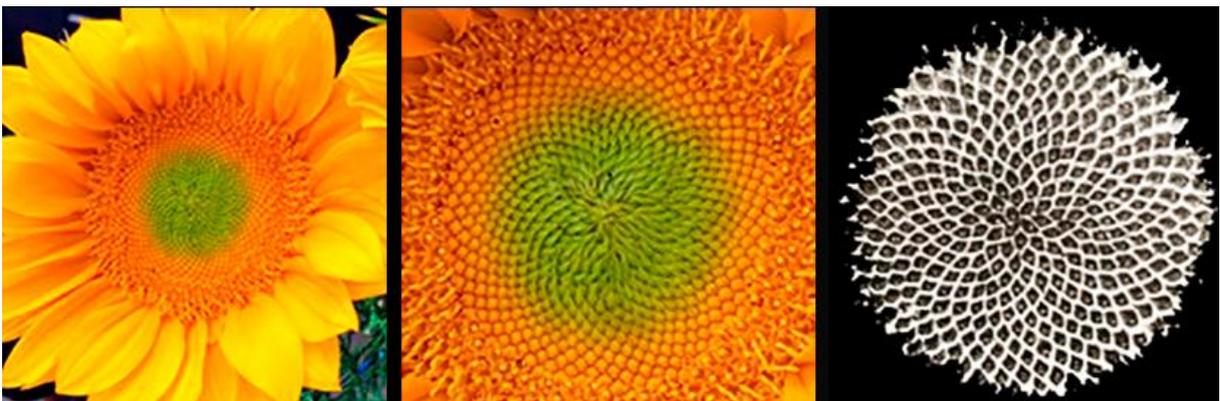
Figura 35 – Diagrama do botão da margarida. As espirais que se movimentam em direções opostas são logarítmicas e equiangulares



Fonte: Olsen, 2006; Doczi, 2012; os autores, 2024.

Os mesmos comportamentos são observados no centro do girassol (Figura 36), onde os flósculos que vão se transformar em sementes, crescem em espirais equiangulares, logarítmicas, que se movem em direções opostas.

Figura 36 – Flósculos do Girassol em espirais logarítmicas e movimentos em direções opostas



Fonte: Adaptado de Olsen, 2006.

É curioso observar que os números de Fibonacci podem ser encontrados no número de pétalas da família das margaridas; podem ocorrer também nos padrões do mercado de ações, nas nuvens dos furacões e ainda estão presentes em algumas tartarugas com 13 placas no casco, cinco centrados e oito nas bordas, como mostrado na Figura 37.

Figura 37 – Espiral logarítmica nos furacões e números-áureos na natureza



Fonte: NOAA, 1980; Freeimages.

Como mostra a Figura 38, os números e as relações áureas presentes nas formas pentagonais também podem ser encontrados em todas as flores que têm cinco pétalas ou qualquer múltiplo de cinco, como a família das rosas e flores das plantas que dão frutos comestíveis.

Figura 38 – Números e formas áureas na natureza



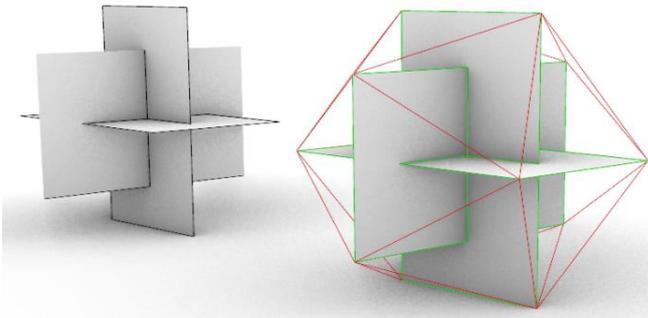
Fonte: Compilação de autores.

Como observado, na natureza existem diversos elementos que apresentam as características da proporção áurea, mas nem sempre isso irá ocorrer, seja pelas condições evolutivas ou outros fatores.

### A divina proporção nos poliedros regulares

Na geometria dos poliedros regulares, os poliedros platônicos – cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro – têm neles imersa a razão áurea. Em particular, podemos observar que os doze vértices do icosaedro regular são vértices de três retângulos áureos em planos mutuamente perpendiculares, como é mostrado na Figura 39.

Figura 39 – Retângulos áureos e o Icosaedro



Fonte: Os autores, 2024.

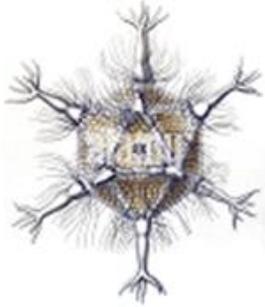
Na natureza, poliedros platônicos podem ser encontrados na forma de cristais, como minerais (Figura 40), e formas icosaédricas em alguns tipos de vírus, e ainda em radiolárias (protozoários unicelulares) (Figuras 41 e 42).

Figura 40 – Cristais



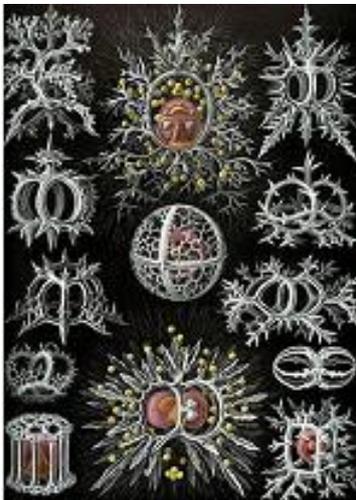
Fonte: Porto Editora, [202-?].

Figura 41 – Radiolaria na forma Icosaédrica



Fonte: Circogonia Icosahedra, 2005.

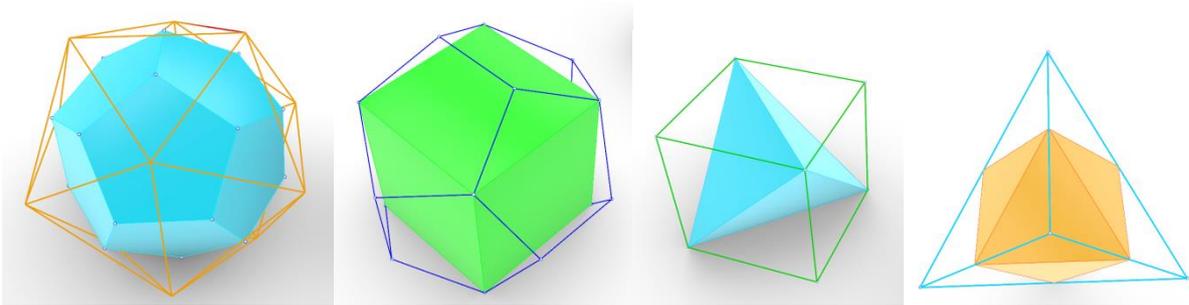
Figura 42 – Radiolárias



Fonte: Radiolaria, 2023.

Segundo Lawlor (1996) e Arranz (2010), é interessante notar que com o icosaedro podemos gerar os outros poliedros platônicos inscritos nele; ao unirmos os pontos médios de suas faces construímos o dodecaedro com faces pentagonais. Com as diagonais dos pentágonos que se encontram num ponto, construímos as arestas do cubo inscrito no dodecaedro. Podemos agora gerar um tetraedro com aresta a diagonal do cubo, e finalmente o octaedro com vértice nos pontos médios das faces do tetraedro.

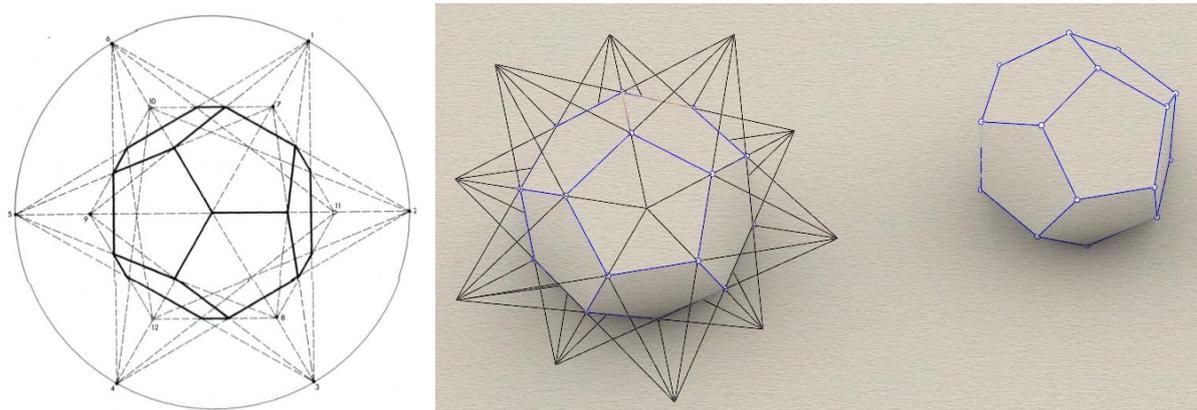
Figura 43 – Poliedros platônicos inscritos



Fonte: Os autores, 2024.

Os poliedros estrelados também podem ser obtidos a partir dos prolongamentos das faces dos poliedros regulares, como é o caso do grande icosaedro estrelado (Figura 44), que é obtido pelo prolongamento dos raios que surgem das arestas das faces pentagonais do dodecaedro regular.

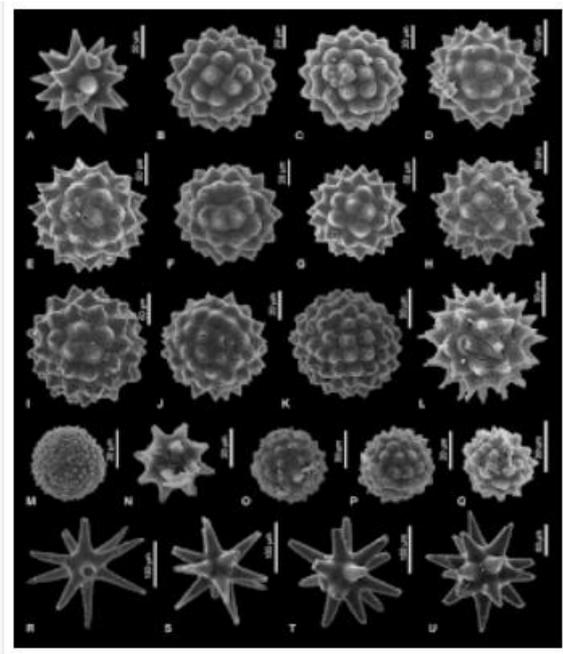
Figura 44 – Icosaedro estrelado



Fonte: Lawlor, 1996; os autores, 2024.

Outras configurações estreladas das formas platônicas estão presentes em diversos elementos da natureza. Algumas podem ser encontradas nas formas das espículas das esponjas do mar, como aponta Barcellos (2017).

Figura 45 – Espículas de esponjas esféricas

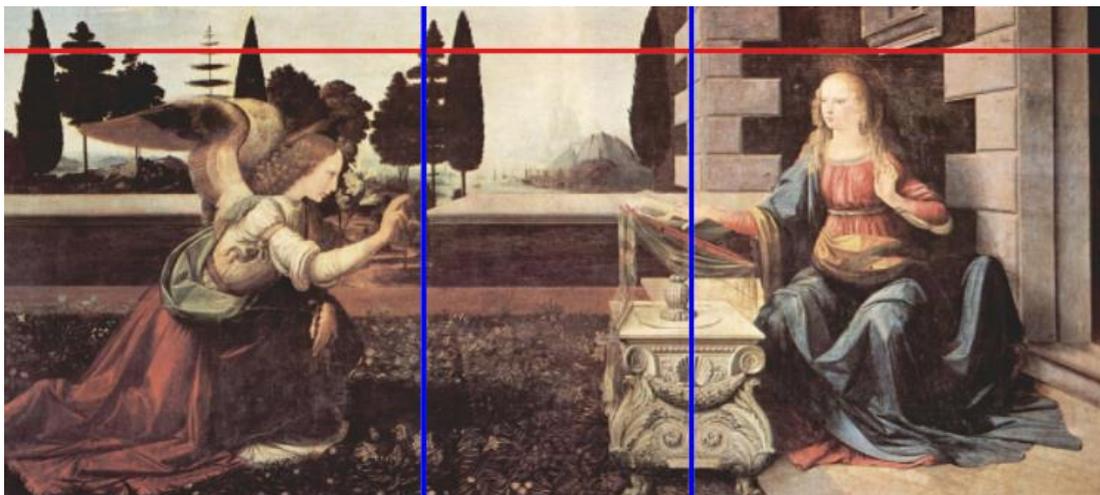


Fonte: Barcellos, 2017.

### Algumas aplicações do número de ouro na Arte e no Design

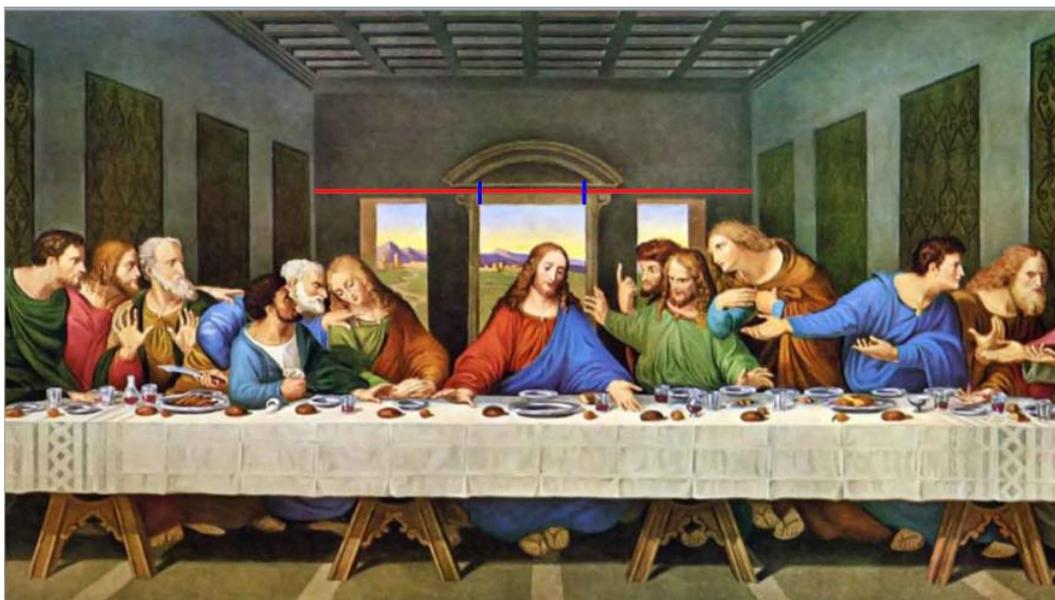
Historicamente, antes da invenção da imprensa, a arquitetura permanecia ainda sob um “manto” esotérico, pois com a ausência de textos impressos acessíveis a todos, a transmissão dos princípios e procedimentos iniciais se dava por via oral, passando do mestre ao aprendiz. Com o surgimento da imprensa, a proporção áurea não poderia permanecer escondida em certas obras de arte famosas, e então a necessidade da veiculação da proporção divina passa a ser perfeitamente compreendida pelos primeiros comentadores de Vitruvio, arquitetos e matemáticos (GHYKA, 1968). Facilmente são identificados, hoje em dia, exemplos no campo artístico em pesquisas na internet e buscadores de imagens marcando a presença da razão áurea:

Figura 46 – “Anunciação” (1472), por Leonardo da Vinci



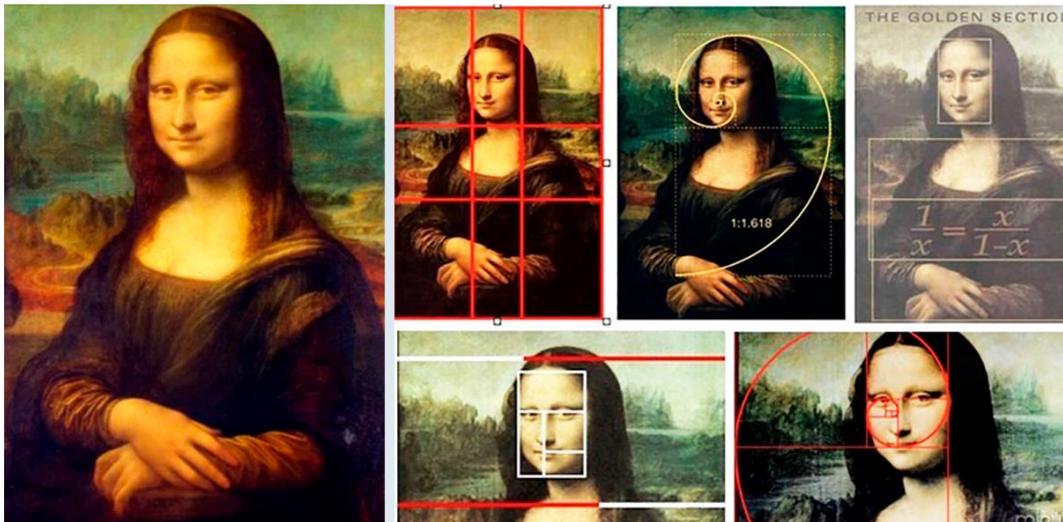
Fonte: Adaptado de Anunciação, 2005.

Figura 47 – “A Última Ceia” (1495-1497), por Leonardo da Vinci



Fonte: Adaptado de Consiglio, 2021.

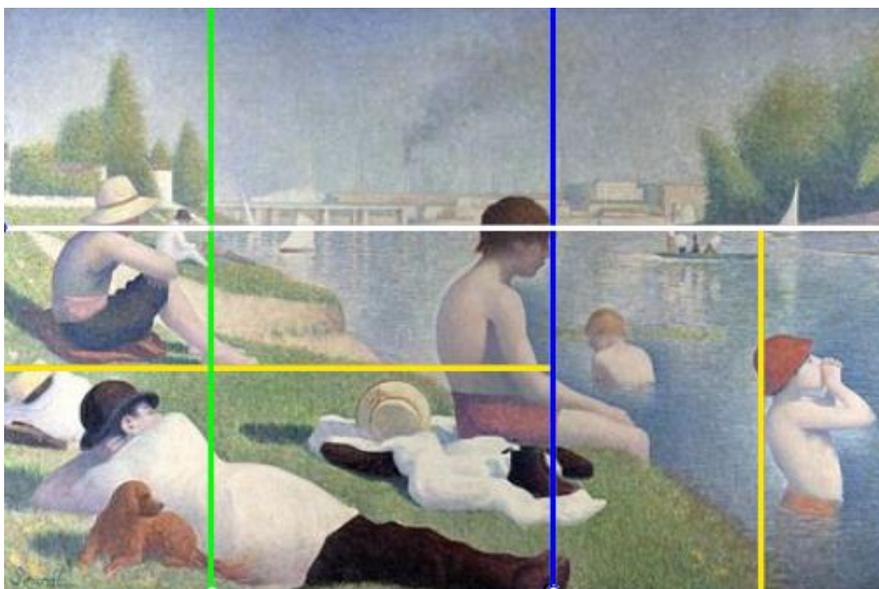
Figura 48 – “Mona Lisa” ou “Gioconda” (1500-1506), por Leonardo da Vinci



Fonte: Adaptado de Bocatto, 2015.

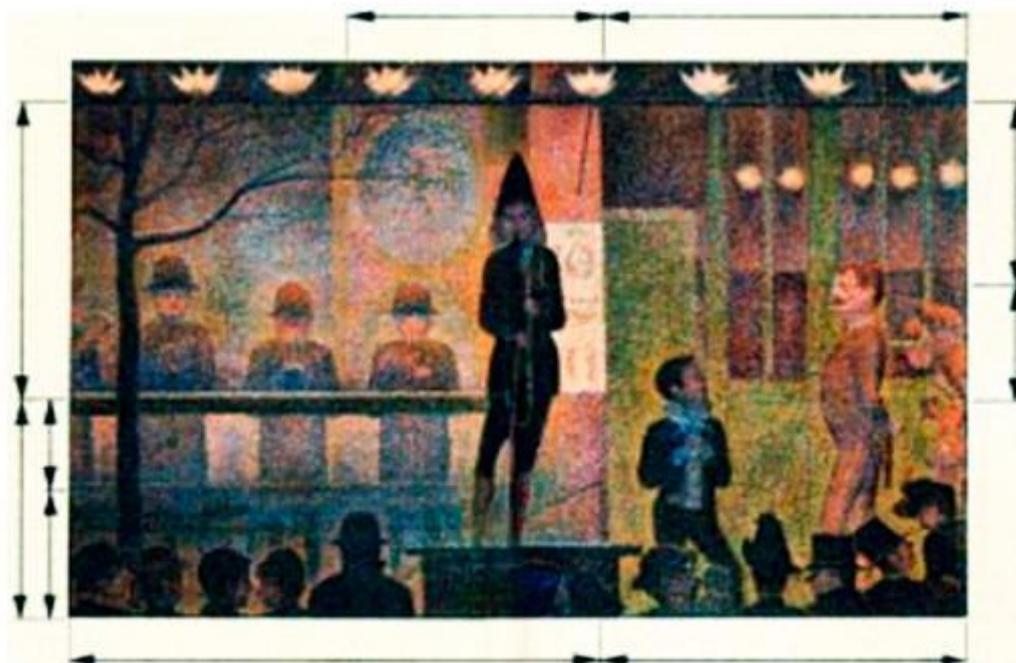
Desde já, podemos afirmar que a tela da Mona Lisa não é um retângulo áureo, basta verificar as dimensões do quadro (aprox. 77x53). Sem dúvida podem ser encontradas seções áureas em diferentes lugares da obra, entretanto Leonardo da Vinci não registrou o uso da proporção em nenhum lugar, mas a sua presença consta na maioria das obras por ele realizadas.

Figura 49 – “Um banho em Asnières” (1884), Georges Seurat



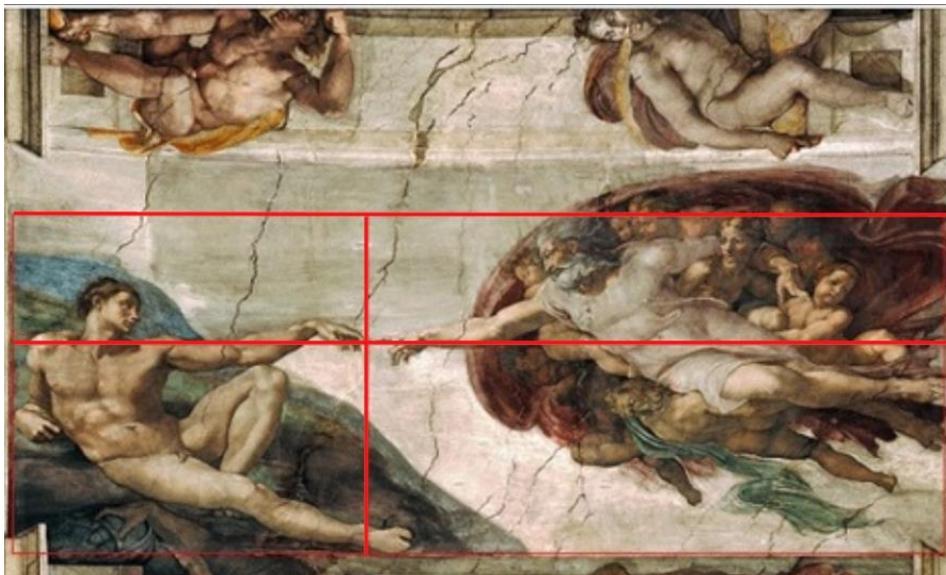
Fonte: Adaptado de Um banho em Asnières, 2020.

Figura 50 – “O desfile do Circo” (1887-88), Georges Seurat



Fonte: Parada de circo, 2015.

Figura 51 – “A criação de Adão” (1508-12), Michelangelo

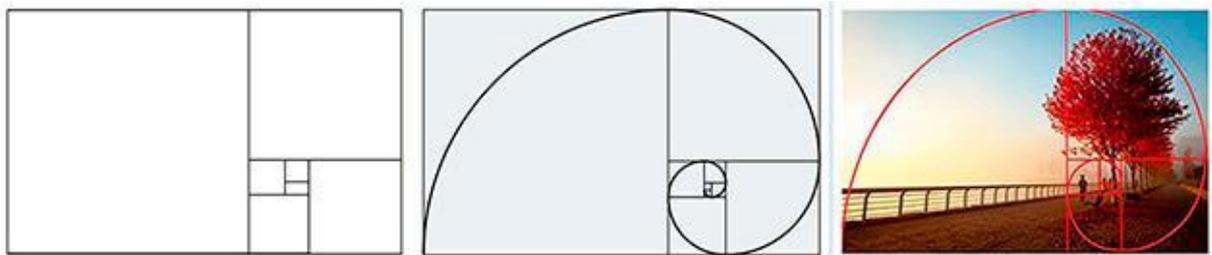


Fonte: Adaptação dos autores, 2024.

## Razão áurea na atualidade

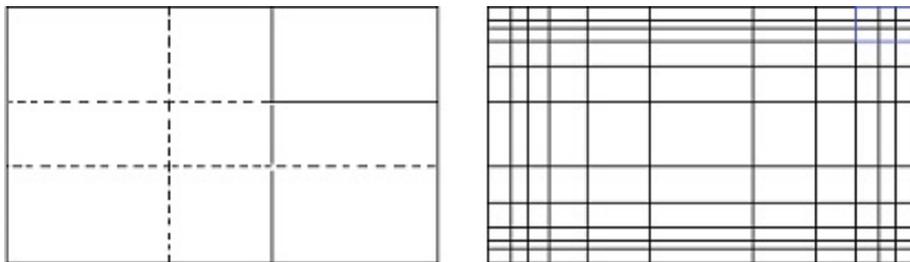
Hoje em dia, encontramos a proporção áurea em fotografias, logotipos, esculturas, convites e outros itens como mostram as Figuras 52 a 60. Ainda podemos construir grids (malhas áureas) para harmonizar alguns trabalhos, pois um conteúdo bem equilibrado implica na criação de composições agradáveis que se relacionam entre si em belas proporções. A seguir, alguns exemplos de grid áurea.

Figura 52 – Harmonia na arte



Fonte: Os autores, 2024; iPhoto, 2021.

Figura 53 – Refinamento da grid áurea partindo do retângulo áureo.



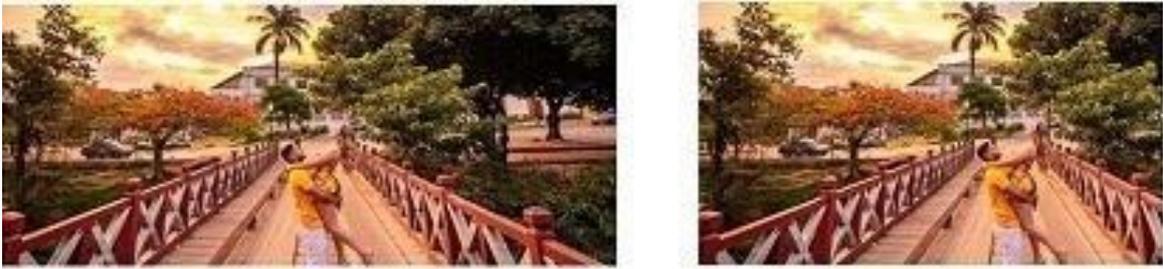
Fonte: Os autores, 2024.

Figura 54 – Fotografias encaixadas na grid áurea.



Fonte: Meisner, 2013.

Figura 55 – Fotografias recortadas na proporção áurea



Fonte: Recorte de autores.

Figura 56 – Convites e cartões obedecendo a proporção áurea



Fonte: Compilação de autores.

### Aproveitando o pentágono regular

Figura 57 – Logotipos a partir da grid pentagonal



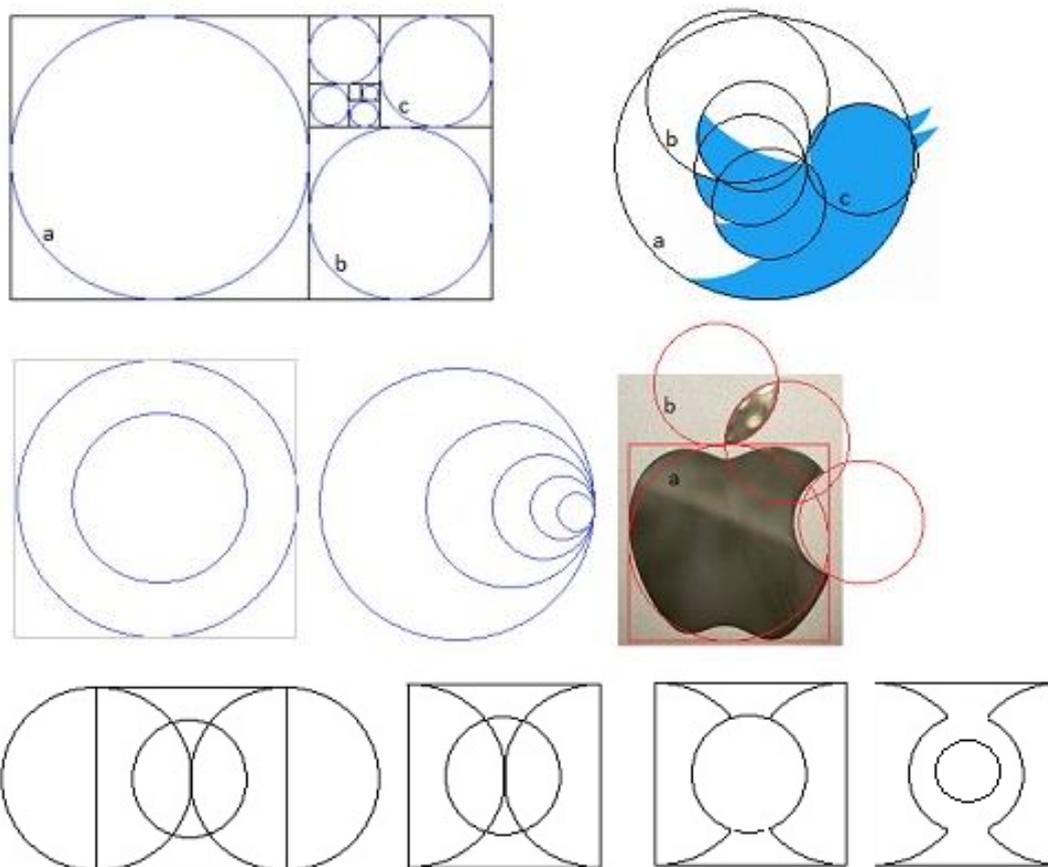
Fonte: Compilação de autores.

### Criando Logotipos

Podem-se criar logotipos utilizando a proporção áurea agrupando as componentes da mesma forma ou de diferentes formas harmoniosamente, como foram desenvolvidos por diferentes designers (Figuras 58-60). Podemos reconhecer que, hoje em dia, existem logotipos de marcas famosas que usam a razão áurea.

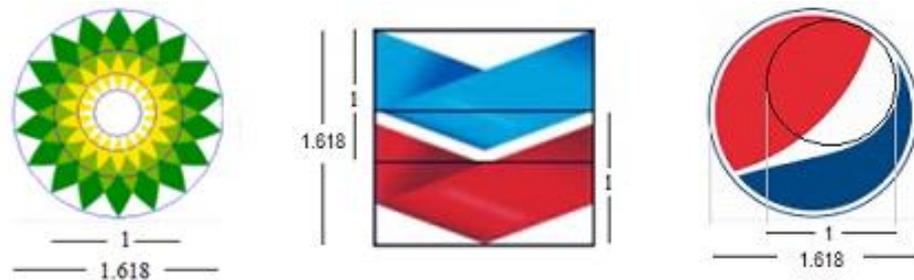
Para as mais diversas inspirações devemos lembrar que a razão áurea utiliza a proporção:  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = 1,618 \dots$

Figura 58 – Construção de logotipos utilizando a razão áurea



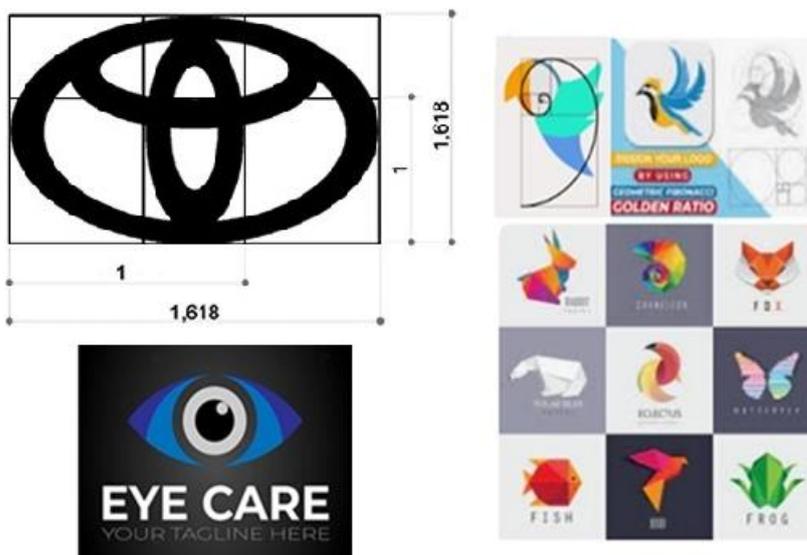
Fonte: Os autores, 2024.

Figura 59 – Diversas cores e formas utilizando a proporção divina



Fonte: Adaptação dos autores, 2024.

Figura 60 – Composições das formas utilizando a proporção divina

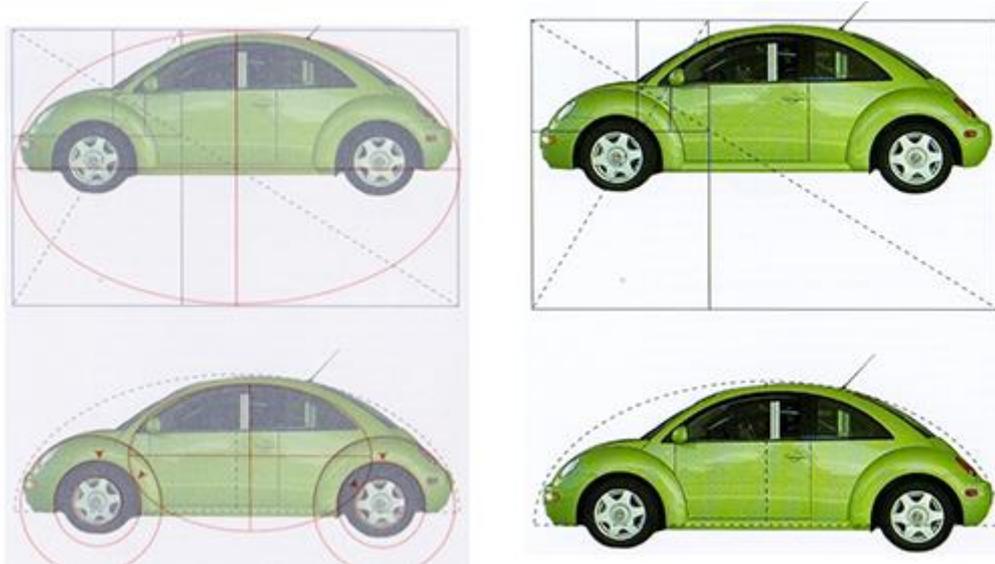


Fonte: Compilação de autores.

### No design de produtos

Para além dos logotipos, que se situam no campo do design gráfico, temos diversos outros exemplos, tanto os que se encontram ainda na área gráfica, como cartazes e tipografia, como aqueles que demonstram aplicações no campo do design de produtos. A autora Kimberly Elam traz alguns exemplos em seu livro *Geometria do Design* (2010). Dentre outros, um deles diz respeito a um produto que alcançou grande sucesso na época em que foi lançado, ao final dos anos 1990: o “Novo Fusca” da Volkswagen, projeto dos designers Jay Mays, Freeman Thomas e Peter Schreyer.

Figura 61 – Composições de formas utilizando elipses áureas



Fonte: Adaptado de Elam, 2010, p. 99-100.

São feitas algumas análises quanto a como as linhas do veículo, que definem a sua forma como um todo – estão enquadradas em uma composição de elipses, círculos, os seus eixos e alinhamentos, o retângulo áureo, os detalhes, as transições de superfícies – e que estabelecem uma determinada “Gestalt” do produto, ganhando coerência, harmonia e coesão entre as partes; Indo além, menciona que a forma gerada evocou tanto os modelos mais antigos do “fusca”, trazendo certa dose de nostalgia; quanto adquiriu, ao mesmo tempo, um ar futurista (ELAM, 2010).

## Conclusão

Este artigo procurou registrar, na sua parte inicial, quais eram as bases matemáticas relacionadas com o número áureo, a razão áurea e a sequência de Fibonacci. A seguir, de modo não estanque e sem um limite estritamente definido no corpo do texto, passou a ilustrar de que modo, nas grandes obras faraônicas do Egito Antigo, há milhares de anos, a razão áurea foi considerada nessas edificações. Em seguida, como foi estudada e explorada pelos gregos, e o seu posterior desenvolvimento em diversas aplicações dessa ordem, alcançando maior auge no século XIII, e no período do Renascimento europeu, assim como na Modernidade.

Em outra vertente abordada no texto, foi verificado que existem diversos modelos da natureza que possuem uma beleza, harmonia e perfeição. Estes modelos apresentam na forma

a divina proporção ou a sequência de Fibonacci ou espiral logarítmica. É importante destacar que não necessariamente existirá em todo modelo da natureza, pois as formas ou modelos naturais se transformam dependendo das diferentes situações ambientais em que estas evoluem ao longo do tempo, e ainda das condições estabelecidas pela seleção natural. Do mesmo modo os cânones das proporções ideais do corpo humano apresentados por Leonardo da Vinci e, mais recentemente, Le Corbusier (que tanto num caso como no outro se voltaram de modo preponderante para questões de natureza estética), conforme indicam pesquisas no campo da ergonomia e antropometria, não são necessariamente válidas para diferentes etnias, sexos e faixas etárias. Todavia, é importante ressaltar que foi a partir da aplicação da proporção áurea, de modo intencional e evidente, pelos artistas renascentistas, que se abriu caminho para diversas aplicações na arte, na arquitetura, na engenharia e no design na idade moderna.

Nós, seres humanos, procuramos sempre encontrar ordem e significado na natureza. Através do intelecto e do nosso entendimento, tentamos identificar determinados padrões, proporções e configurações que correspondem a conceitos abstratos associados à geometria, à matemática e aos campos com que se relacionam (topologia, fractais e similares). Assim, enxergamos o número áureo, a fração áurea e a sequência de Fibonacci em diversos fenômenos e formas da natureza em nosso meio ambiente. Ao mesmo tempo, ao longo da história da humanidade, pode-se constatar a aplicação desses princípios em diversas construções, artefatos e objetos físicos tangíveis que resultaram do esforço e engenhosidade de diversos grupos, coletividades e mesmo civilizações nessa trajetória.

Entretanto, se observarmos com maior cuidado, um outro aspecto que merece ser considerado é o de que nem sempre existe uma precisão absoluta e cristalina naquilo que é observado no mundo natural. As proporções verificadas muitas vezes são aproximações bastante satisfatórias, mas que não podem ser associadas a uma precisão total e inquestionável. Contudo, isso de maneira alguma destrói aquilo que é percebido, abstraído e visualizado na construção geométrica elaborada a partir da captação pelos nossos sentidos. No terreno da percepção visual (assim como em outros campos perceptivos), o todo é mais do que a soma das partes, indo além daquilo que estabelece a matemática básica. Assim, a percepção se dá definindo conjuntos coerentes e consistentes de informações, que fazem sentido para o nosso entendimento.

O gênero humano, desde os seus primórdios, sempre buscou se situar no meio ambiente de modo a garantir a sua sobrevivência e continuidade (reprodução) com mínimo gasto de energia. Certamente que o seu aparato perceptivo, desde então, serviu a esse propósito, com um cuidado especial em selecionar de modo rápido, eficiente e eficaz, qual a informação relevante a ser utilizada. A percepção de padrões significativos, enquanto totalidades coerentes e consistentes, está dentro desse *modus operandi* desde a aurora da humanidade.

## Referências

- ANUNCIACÃO. **Wikipédia**, 19 de maio de 2005. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo\\_da\\_Vinci\\_052.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo_da_Vinci_052.jpg). Acesso em: 29 ago. 2024.
- ARMANI, Ghjuvan-Michele. Piramide. **YouTube**, 21 de novembro de 2022. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=UGKw8DqAdmU>. Acesso em: 22 set. 2023.
- ARQUER. Como era a Pirâmide de Quéops na época em que foi construída? **Arquer**, [20--]. Arte e Entretenimento. Disponível em: [https://www.arquer.com.br/arte\\_e\\_entretenimento/como-era-a-piramide-de-queops-na-epoca-em-que-foi-construida/](https://www.arquer.com.br/arte_e_entretenimento/como-era-a-piramide-de-queops-na-epoca-em-que-foi-construida/). Acesso em: 22 set. 2023.
- ARRANZ, José Manuel. Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz em Matemáticas. Poliedros Regulares. In: REUNIÓN NACIONAL DE ESTALMAT, 7., Valencia, ES, 5-7 mar. 2010. p. 1-18. Disponível em: <https://www.estalmat.org/archivos/POLIEDROS-REGULARES-1.pdf>. Acesso em: 10 set. 2024.
- BENYUS, Janine M. **Biomimética**: Inovação inspirada pela natureza. São Paulo: Cultrix, 2003.
- BOCATTO, Lucas. Curiosidades: O Número de Ouro. **Profes**, 24 abr. 2015. Disponível em: <https://profes.com.br/Lucas.Bocatto/blog/curiosidades-o-numero-de-ouro>. Acesso em: 01 nov. 2023.
- BURTON, David M. **The History of Mathematics**: An introduction. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.
- CÁNEBA, Fátima. Arquivo: Arco de Constantino. **Wikipédia**, 4 mar. 2013. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arco\\_de\\_Constantino..JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arco_de_Constantino..JPG). Acesso em: 16 ago. 2024.
- CALVERT, Amy. King Menkaure (Mycerinus) and Queen. **Smarthistory**, august 8, 2015. Disponível em <https://smarthistory.org/king-menkaure-mycerinus-and-queen/>. Acesso em: 21 set. 2023.
- CARNEIRO, Arthur Fanini. **Tutankhamon** – O faraó menino. [20--]. Disponível em: <https://museuegipcioerosacruz.org.br/tutankhamon-o-farao-menino/> Acesso em: 25 set. 2023.
- CATEDRAL DE CHARTRES. **Wikipédia**, 22 ago. 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Catedral\\_de\\_Chartres&oldid=68496061](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Catedral_de_Chartres&oldid=68496061). Acesso em: 22 ago. 2024.
- CIRCOGONIA ICOSAHEDRA. **Wikipédia**, 28 nov. 2005. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circogoniaicosahedra\\_ekw.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circogoniaicosahedra_ekw.jpg). Acesso em: 28 ago. 2024.
- CONSIGLIO, Keka. 20 curiosidades sobre a Última Ceia, obra-prima de Leonardo da Vinci. **ISTOÉ**, 14 maio 2021. Disponível em: <https://istoe.com.br/20-curiosidades-sobre-a-ultima-ceia-obra-prima-de-leonardo-da-vinci/>. Acesso em: 29 ago. 2024.

DOCZI, György. **O poder dos Limites**: harmonia e proporções na natureza, arte e arquitetura. São Paulo: Novo Tempo, 2012.

ELAM, Kimberly. **Geometria do design**: estudos sobre proporção e composição. São Paulo: Cosac Naify, 2010.

ELODIA, Ávila. Proporção Áurea. 7 maio 2015. Disponível em: <https://www.saberviver.tv/proporcao-aurea/>. Acesso em: 09 set. 2023.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática**: Geometria. São Paulo: Editora Saber Atual, 1994. p. 42-45.

FASCIONE, Ligia. A proporção áurea e corpo humano. **Ligia Fascioni**, [201-?]. Disponível em: [https://ligiafascioni.com.br/wp-content/uploads/2010/09/Corpo\\_razao\\_aurea.pdf](https://ligiafascioni.com.br/wp-content/uploads/2010/09/Corpo_razao_aurea.pdf). Acesso em: 3 set. 2023.

FREEIMAGES. Tartaruga. FreeImages, @Ginger7. Disponível em: <https://www.freeimages.com/photo/turtles-1391474>. Acesso em: 1 ago. 2024.

BARCELLOS, Lucas Gomes. Filo Poríferos. **Biologia para a vida**, 31 maio 2017 (atualizado em junho de 2021). Disponível em: <https://segundocientista.blogspot.com/2015/05/filo-poriphera-poriferos.html>. Acesso em: 2 out. 2024.

HIPPLE, Liam. Arco de Constantino Roma. **Liam Hipple Illustration**, 2016. Obras de arte originais. Disponível em: <https://www.liamhippleillustration.co.uk>. Acesso em: 05 set. 2024.

HUNTLEY, H. E. **The Divine Proportion**: A study in Mathematical Beauty. New York: Dover Publications, 1970.

IPHOTO. Qual a regra mais importante para uma boa fotografia? **IPhoto Channel**, 27 maio 2021. Tendência. Disponível em: <https://iphotochannel.com.br/qual-a-regra-de-composicao-para-de-fotos/>. Acesso em: 20 set. 2024.

LAMB, Robert; SHIELDS, Jesslyn. Why does the Fibonacci Sequence appear so often in nature? **How Stuff Works**, feb 10, 2023. Disponível em: <https://science.howstuffworks.com/math-concepts/fibonacci-nature.htm>. Acesso em: 26 maio 2024.

LAWLOR, Robert. **A Geometria Sagrada**. Rio de Janeiro: Edições Del Prado, 1996.

LIMA, Aryane. A regra áurea na arquitetura. **Projeto Batente**, 18 jul. 2018. Arquitetura. Disponível em: <https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura/>. Acesso em: 09 jun. 2024.

MARQUARDT, Stephen R. Dr. Stephen R. Marquardt on the Golden Decagon and human facial beauty. Interview by Dr. Gottlieb. **J Clin Orthod**, v. 36, n. 6, p. 339-346, jun. 2002. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/12101544/>. Acesso em: 27 fev. 2025.

MÁSCARA MORTUÁRIA DE TUTANCÂMON. **Wikipédia**, 23 mar. 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A1scara\\_mortu%C3%A1ria\\_de\\_Tutanc%C3%A2mon&oldid=67671232](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A1scara_mortu%C3%A1ria_de_Tutanc%C3%A2mon&oldid=67671232). Acesso em: 23 mar. 2024.

GHYKA, Matilda. **El número de Oro**. I. Los Ritmos. Poseidon, 1968.

GHYKA, Matilda. **The Geometry of Art and Life**. Dover, 1997.

MEISNER, Gary. Photo Crop/Composition. **PhiMatrix**. 01 out. 2013. Disponível em: <https://www.phimatrix.com/photo-cropping-composition/>. Acesso em: 20 set. 2024.

MONA LISA. **Wikipédia**, 5 fev. 2025. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Mona\\_Lisa&oldid=69506953](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Mona_Lisa&oldid=69506953). Acesso em: 28 ago. 2024.

NAUTILUS (GÊNERO). **Wikipédia**, 23 set. 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Nautilus\\_\(g%C3%AAnero\)&oldid=68681779](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Nautilus_(g%C3%AAnero)&oldid=68681779). Acesso em: 23 set. 2024.

NOAA. The National Oceanic and Atmospheric Administration. **WikiMedia Commons**, 8 ago. 1980. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Allen\\_1980-08-08\\_2230Z.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Allen_1980-08-08_2230Z.png). Acesso em: 12 mar. 2024.

NOVA. Secrets of the Parthenon. **PBS**, 29 jan. 2008. *Mundos Antigos*. Disponível em: <https://www.pbs.org/wgbh/nova/video/secrets-of-the-parthenon>. Acesso em: 25 maio 2024.

OLSEN, Scott. **The Golden Section**: nature's greatest secret. Londres: Bloomsbury, 2006.

PARADA DE CIRCO. Seurat-La Parade detail. **Wikipédia**, 25 out. 2015. Disponível em: [https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Seurat-La\\_Parade\\_detail.jpg#/media/File:3AGeorges\\_Seurat\\_066.jpg](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Seurat-La_Parade_detail.jpg#/media/File:3AGeorges_Seurat_066.jpg). Acesso em: 02 set. 2024.

PORTO Editora. Cristal (mineralogia). **Infopédia**, Porto, Porto Editora, [202-?]. Disponível em: [https://www.infopedia.pt/\\$cristal-\(mineralogia\)](https://www.infopedia.pt/$cristal-(mineralogia)). Acesso em: 7 fev. 2025.

RADIOLARIA. **Wikipédia**, 29 ago. 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Radiolaria&oldid=66501071>. Acesso em: 18 dez. 2023.

SARAIVA, José Cloves V. As pirâmides do Egito e a razão áurea. **RPM48**, fev. 2014. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/48/1.htm>. Acesso em: 8 fev. 2024.

SEDE DA ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Wikipédia**, 18 maio 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sede\\_da\\_Organiza%C3%A7%C3%A3o\\_das\\_Na%C3%A7%C3%B5es\\_Unidas&oldid=67966927](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sede_da_Organiza%C3%A7%C3%A3o_das_Na%C3%A7%C3%B5es_Unidas&oldid=67966927). Acesso em: 18 maio 2024.

SEPÚLVEDA, Eurico. Edifícios Romanos dedicadas ao Otium: Os anfiteatros. **Pedra & Cal**, n. 33, p. 4-7, fev./mar. 2007. Disponível em: [http://www.gecorpa.pt/Upload/Revistas/Rev33\\_Artigo%2001.pdf](http://www.gecorpa.pt/Upload/Revistas/Rev33_Artigo%2001.pdf). Acesso em: 2 out. 2024.

TAJ MAHAL. **Wikipédia**, 26 fev. 2025. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Taj\\_Mahal](https://en.wikipedia.org/wiki/Taj_Mahal). Acesso em: 18 ago. 2024.

TOMPKINS, Peter. **Segredos da Grande Pirâmide**. New York: Harper, 1971. Disponível em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit2/unit2.html>. Acesso em: 2 jun. 2024.

UM BANHO EM ASNIÈRES. **Wikipédia**, 4 mar. 2020. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Um\\_banho\\_em\\_Asnieres&oldid=57668542](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Um_banho_em_Asnieres&oldid=57668542). Acesso em: 4 mar. 2020.

---

**Recebido em:** 04/06/2024.

**Aceito em:** 30/01/2025.