



## **TRIÂNGULOS: UMA EXPERIÊNCIA UTILIZANDO A TEORIA DE VAN HIELE<sup>1</sup>**

### **TRIANGLES: AN EXPERIENCE USING VAN HIELE'S THEORY**

FONSECA, Jussara Aparecida da<sup>2</sup>  
LEIVAS, José Carlos Pinto<sup>3</sup>

#### **RESUMO**

Este artigo apresenta a análise e a discussão de uma investigação desenvolvida com alunos do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal do sul do Brasil. Foi abordado o tema triângulos (reconhecimento, definição e classificação), tendo como objetivo examinar de que forma alunos ingressantes nesse curso identificam, definem e classificam triângulos. As atividades foram elaboradas e propostas com base no modelo de Van Hiele, especificamente se embasaram nos seus dois primeiros níveis: reconhecimento (ou visualização) e análise. Para a aplicação, seguiram-se fases de desenvolvimento: questionamento ou informação, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração. Ao final do trabalho, concluiu-se que a maioria dos sujeitos participantes está em processo de transição do nível 1 para o nível 2, indicando a necessidade de mudanças no processo de ensino de Geometria na Educação Básica, de modo a possibilitar um efetivo desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que se espera estarem nesse nível na referida etapa da escolaridade.

**PALAVRAS-CHAVE:** Triângulos; Teoria de Van Hiele; Ensino Superior.

#### **ABSTRACT**

This article presents the analysis and the discussion of an investigation developed with students of the second semester of a teacher training course in Mathematics of a Federal Institute of the south of Brazil. The theme triangles (recognition, definition and classification) was approached, and its objective was to examine as students at the beginning of this course, identify, define and classify triangles. The activities were elaborated and proposed according to the Van Hiele model, specifically based on its first two levels: recognition (or visualization) and analysis. For the application, the research followed the stages of development: questioning or information, direct orientation, explicitness, free orientation and integration phase. At the end of the study, it was concluded that the majority of the participants are in the process of transition from level 1 to level 2, indicating the need for changes in the teaching process of Geometry in Elementary School, in order to enable an

<sup>1</sup> Trabalho realizado com apoio financeiro do Programa Institucional de Incentivo à Qualificação Profissional dos Servidores (PIIQP) do Instituto Federal Farroupilha.

<sup>2</sup> Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) e Professora do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete. e-mail: jussara.mat@gmail.com

<sup>3</sup> Professor Dr. do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN). e-mail: leivasjc@unifra.br



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

effective development of the geometric thinking, since they are expected to be at this level at this stage of teaching.

**KEYWORDS:** Triangles; Van Hiele Theory; Higher Education

## INTRODUÇÃO

Atualmente, a Educação Matemática é um campo de estudo e pesquisa consolidado, uma vez que o ambiente escolar constitui um importante cenário para investigação de diferentes questões e relações envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de diferentes áreas da Matemática, entre elas, a dos conhecimentos relacionados à Geometria.

Quanto à importância do ensino de Geometria, Domingos (2010) destaca que o domínio desse conhecimento é indispensável para o entendimento do mundo em que se está inserido, já que possibilita o desenvolvimento do raciocínio e fornece mecanismos para a resolução de problemas nos mais diferentes campos do saber.

No mesmo caminho, Passos (2000, p. 49) destaca que “a Geometria pode ser considerada como uma ferramenta muito importante para a descrição e inter-relação do homem com o espaço em que vive, já que pode ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade”.

A partir dessas reflexões, percebeu-se que a mesma deve ser considerada como um ramo da Matemática muito importante para compreensão e relação do sujeito com o meio em que está inserido. Sendo assim, ela se apresenta como facilitadora de outros processos mentais e prestigia a construção do conhecimento, pois “valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar” (LORENZATO, 1995, p. 6).

Nesse sentido, visando trazer contribuições e melhorias ao processo de ensino e aprendizagem em Geometria, pesquisas e trabalhos, no âmbito da Educação e Ensino de Matemática, têm sido realizados. Buscando contribuir com tais discussões, planejou-se e executou-se uma pesquisa, que consistiu em uma intervenção didática, à luz da Teoria de Van Hiele, para desenvolver o pensamento geométrico relacionado ao estudo de triângulos, a qual foi aplicada a ingressantes de uma licenciatura em Matemática, no ano de 2016.

## PROBLEMÁTICA DO ENSINO E GEOMETRIA

No mundo atual, há diversas situações em que o domínio dos conhecimentos geométricos e suas relações é necessário para sua compreensão e explicação. Por tal característica, esse saber se apresenta como um importante instrumento no desenvolvimento cognitivo dos sujeitos.

Lorenzato (1995, p. 5) aponta que,

sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

difícilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Contudo, historicamente, o ensino de Geometria, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, tem sido renegado. Tal cenário foi evidenciado por Domingos (2010), ao realizar uma revisão de trabalhos em Educação Matemática que abordassem o panorama sobre o ensino de Geometria plana e espacial, no Brasil, entre 1990 e 2008.

Em relação a tal abandono, Lorenzato (1995) indica duas causas principais: falta de preparação dos professores e material didático inadequado. A primeira causa foi evidenciada em pesquisas realizadas pelo autor, nas quais constatou que um grande número de docentes não detém os conhecimentos necessários para o desenvolvimento dos conteúdos geométricos, em sala de aula. Segundo ele, "o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la" (p. 3-4).

Quanto ao material didático inadequado, o autor ressalta que, na maioria dos casos, é utilizado o livro didático o qual apresenta a Geometria "como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros, a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico" (Idem, p. 4). Além disso, aponta que a própria localização do conteúdo relacionado à Geometria, no livro didático, dificulta seu ensino, pois, geralmente, os tópicos referentes a ela estão localizados na última parte, o que aumenta a probabilidade de não serem estudados, devido à falta de tempo no desenrolar do ano letivo. Sendo assim, essa apresentação, de forma árida, desligada da realidade e não integrada a outras disciplinas e a outras áreas da própria Matemática, faz com que ela seja desprezada em sala de aula.

Outras possíveis causas também são apontadas, tais como matrizes curriculares dos cursos de formação docente, tanto nos de licenciatura em Pedagogia, quanto em Matemática. Mesmo que tais cursos tenham por objetivo formação de professores para atuarem em níveis de ensino diferentes, em ambos os casos, é essencial o conhecimento geométrico, com suas devidas adequações, de acordo com o objetivo de cada um deles. Sendo assim, é importante que essas formações tenham, em suas matrizes, componentes curriculares que deem conta de uma sólida aprendizagem em Geometria, pois "ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece" (LORENZATO, 1995, p.4).



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

Dessa forma, para que ocorram melhorias no processo de ensino e aprendizagem em Geometria, são necessárias mudanças que envolvam um conjunto de fatores que vão desde a formação dos professores, atuantes em toda a Educação Básica, até o material didático a ser utilizado.

## TEORIA DE VAN HIELE

A teoria do casal Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof teve início em suas frustrações no processo de ensino e aprendizagem de Geometria e se aprofundou durante a realização dos seus respectivos cursos de doutorado, concluídos em 1957, na Universidade de Utrecht.

Segundo Cardoso (2015), os estudos do casal Van Hiele apontaram que

a aprendizagem de Geometria ocorre em níveis hierárquicos de conhecimento; quando o ensinamento ocorre em um nível cognitivo acima do que o aluno se encontra, os conceitos não são compreendidos e fixados; o crescimento relativo à idade não produz automaticamente um crescimento no nível do pensamento geométrico (CARDOSO, 2015, p. 3).

Villiers (2010) destaca que o casal Van Hiele apontou como ponto principal para o fracasso no ensino de Geometria o fato do currículo ser apresentado em um nível mais alto do que aquele em que os alunos estavam, fazendo com que eles não conseguissem entender o professor, por sua vez, também não conseguia entender o porquê de eles não estarem entendendo.

A teoria sugere cinco níveis de compreensão do pensamento geométrico, nos quais o aluno vai avançando, conforme amadurecem determinadas ideias geométricas. O primeiro nível é o da visualização ou reconhecimento; o segundo, da análise; o terceiro, da dedução informal; o quarto, da dedução formal; o quinto, do rigor. Cada um desses níveis apresenta características específicas, descritas a seguir.

No nível 1 (visualização ou reconhecimento), os alunos são capazes de reconhecer e nomear visualmente figuras geométricas pela sua aparência global e forma, não sendo capazes de fazer considerações sobre as propriedades de identificação dessa figura. No nível 2 (análise), eles conseguem identificar as propriedades das figuras geométricas, mas não são capazes de usá-las para reconhecê-las ou classificá-las, ou seja, os sujeitos atuam pelo simples reconhecimento da forma. No nível 3 (dedução informal), já são capazes de estabelecer relações entre as propriedades de uma figura ou grupos de figuras. Conseguem acompanhar argumentos e informações de uma prova, mas não conseguem realizar uma demonstração. No nível 4 (dedução formal), além de identificarem propriedades das figuras geométricas, são capazes de realizar uma demonstração, a partir de axiomas e definições. No nível 5 (rigor), os alunos são capazes de trabalhar com diferentes sistemas geométricos, o que só é alcançado em



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

uma disciplina de Geometria de nível superior e, algumas vezes, não o atingem ao final de uma licenciatura em Matemática.

Usiskin (1982, p. 4 apud VILLIERS, P. 2010, p. 401) aponta quatro características importantes da teoria:

- **ordem fixa:** a ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível  $n$  sem ter passado pelo nível  $n-1$ .
- **adjacência:** cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
- **distinção:** cada nível possui os próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
- **separação:** duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.

Kaleff *et al.* (1994) descrevem cinco fases sequenciais propostas pelo casal Van Hiele para o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos: questionamento ou informação, orientação direta, explicitação, da orientação livre e integração. Algumas características de cada uma delas são descritas a seguir.

A primeira fase, questionamento ou informação, é o momento no qual professores e alunos instituem um diálogo e/ou interação em que questionamentos e observações são realizados. A partir daí, o professor consegue perceber quais os conhecimentos prévios dos alunos a respeito do assunto a ser desenvolvido.

Na fase seguinte, orientação direta, os alunos são instigados a explorar o assunto a ser desenvolvido a partir de um material previamente escolhido pelo professor, que terá por objetivo levá-los a se familiarizarem com o objeto em questão. As atividades dessa etapa devem ser diretas, com respostas específicas e objetivas.

Na fase 3, explicitação, os alunos são impelidos a expressarem verbalmente suas opiniões e conclusões sobre as estruturas que observam. Aqui, cabe ao professor interferir o mínimo possível, deixando o aluno formar as próprias conclusões em relação ao objeto em estudo.

Na quarta fase, orientação livre, devem ser propostas atividades com diferentes etapas, que possibilitem ao aluno diversas maneiras de resolvê-las. É importante que ele resolva as atividades individualmente, de forma a construir as próprias relações sobre o objeto de estudo.

A última fase, integração, é a etapa destinada à revisão e síntese do que foi estudado, buscando uma integração e internalização do objeto de estudo e suas relações. Cabe ao professor gerir essa etapa, fornecendo os elementos importantes para unificação de tudo que foi observado pelos estudantes. Ao final dessa fase, eles



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

deverão estar em outro nível de pensamento, estando aptos para prosseguirem para um nível seguinte, no qual serão repetidas todas as fases.

Em linhas gerais, a teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele propõe que a evolução do pensamento geométrico ocorra de forma gradual, global e construtiva, indo de pensamentos mais básicos, relacionados, por exemplo, ao reconhecimento de formas geométricas, até formas mais abstratas de pensamento, em que é possível, a partir do pensamento lógico-dedutivo, realizar demonstrações em Geometria.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho foi realizado sob uma abordagem qualitativa, a qual, segundo Bogdan e Biklen (1994), apresenta cinco características básicas. A primeira destaca que a investigação qualitativa tem fonte direta de coleta de dados no ambiente natural, sendo que o entendimento dos dados coletados pelo investigador é essencial para sua análise. A segunda ressalta que a pesquisa qualitativa é descritiva, sendo relevantes todos os dados da realidade analisada. A terceira característica mostra que o pesquisador qualitativo deve estar mais interessado pelo processo do que pelo resultado final. A quarta indica que a análise dos dados coletados é realizada de forma indutiva. Assim, os dados não devem ser recolhidos com o intuito de confirmar hipóteses previamente construídas, pois as conclusões devem surgir à medida que as informações coletadas vão se agrupando. A quinta característica é aquela em que os pesquisadores qualitativos levam em consideração as perspectivas dos participantes.

Desse modo, analisando as características da pesquisa qualitativa, apontadas por Bogdan e Biklen (1994), constata-se que ela vai ao encontro do que se pretende desenvolver no artigo porque a pesquisa foi realizada pela coleta de dados, por meio de tarefas resolvidas pelos sujeitos a serem estudados; os dados coletados são descritivos; o objetivo principal é verificar de que forma alunos ingressantes em um curso de licenciatura em Matemática reconhecem, definem e classificam triângulos; não houve hipóteses formuladas *a priori*, uma vez que o objetivo não foi comprovar algo previamente definido e o contexto dos sujeitos foi considerado para a construção, desenvolvimento e análise das atividades.

Foi abordado o tema triângulos (reconhecimento, definição e classificação), tendo como objetivo examinar de que forma alunos ingressantes nesse curso identificam, definem e classificam triângulos

Para a realização deste estudo, foram organizados módulos de atividades, com o objetivo de desenvolver o conhecimento geométrico sob a ótica da Teoria de Van Hiele. Para o desenvolvimento das atividades relativas a cada nível, seguiram-se as fases propostas por Kaleff *et al.* (1994), já citadas.

As atividades foram desenvolvidas em forma de oficinas e organizadas a partir de um projeto de ensino com carga horária total de 20 horas/aula, subdivididas em



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

cinco encontros semanais de 4 horas/aula cada um. O projeto em questão é bem mais amplo do que as atividades que serão apresentadas e analisadas, pois teve por objetivo o estudo dos pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro). Desse modo, o trabalho focará as atividades desenvolvidas na primeira oficina, as quais se referiram à identificação, definição e classificação de triângulos, ficando, portanto, as demais destinadas a análises posteriores.

Sendo assim, tem-se por objetivo examinar, com base na Teoria de Van Hiele, como alunos, ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, identificam, definem e classificam triângulos. Para tanto, foram elaboradas atividades com base nos dois primeiros níveis de desenvolvimento propostos pelo casal Van Hiele: visualização ou reconhecimento (nível 1) e análise (nível 2). As atividades, para o desenvolvimento do nível 1, consistiram na identificação de triângulos a partir de diferentes composições de figuras geométricas. Nas atividades do nível 2, os alunos deveriam conceituar triângulo e, após, realizar a classificação de um grupo de diferentes triângulos recortados, de acordo com características e/ou propriedades em comum, formando diferentes classes.

Foram sujeitos deste estudo dez alunos do segundo semestre do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Alegrete, os quais, para organização da análise dos dados, serão denominados, doravante, como alunos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Cabe ressaltar que os participantes não haviam cursado a disciplina de Geometria Plana, prevista para o terceiro semestre letivo do referido curso. Sendo assim, os conhecimentos prévios dos mesmos são advindos do Ensino Fundamental e Médio.

## DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Como já destacado, para o desenvolvimento da oficina, realizou-se uma sequência de atividades, elaboradas de acordo com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto na Teoria de Van Hiele e desenvolvidas segundo os passos propostos por Kaleff *et al.* (1994).

Para a fase de questionamento, realizada no início da oficina, foi feita uma rodada de discussões com os participantes, com o objetivo de verificar alguns de seus conhecimentos prévios sobre triângulos e suas propriedades. As informações coletadas foram registradas no quadro, o que permitiu ao investigador, professor da disciplina, perceber que todos eles tinham noção do que é triângulo. Contudo, ao destacar suas propriedades, relataram, de forma aleatória, algumas delas como, por exemplo, a classificação quanto aos ângulos e aos lados, não sabendo explicitar com clareza os elementos necessários para cada classificação.

Nessa fase, foi possível perceber que os alunos apresentaram conhecimentos prévios sobre a identificação da forma geométrica de triângulos, mas não mostraram clareza em relação à classificação de triângulos quanto aos lados e aos ângulos. Acredita-se que, com a coleta de dados, a partir da resolução das atividades

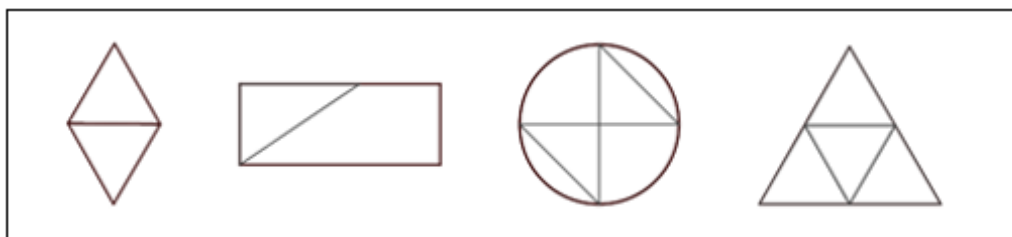


DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

propostas, poder-se-á ter melhor compreensão acerca dos conhecimentos dos sujeitos envolvidos, definição e classificação de triângulos.

A fase seguinte foi da orientação direta, a qual consistiu na aplicação de duas atividades, com o objetivo de que os alunos reconhecessem, visualmente, os triângulos ali representados, sem realizar considerações sobre suas propriedades (nível 1 da Teoria de Van Hiele). Para a primeira atividade, foi entregue aos alunos um conjunto de quatro figuras geométricas (Fig. 1), a partir do qual eles deveriam informar o número total de triângulos representados.

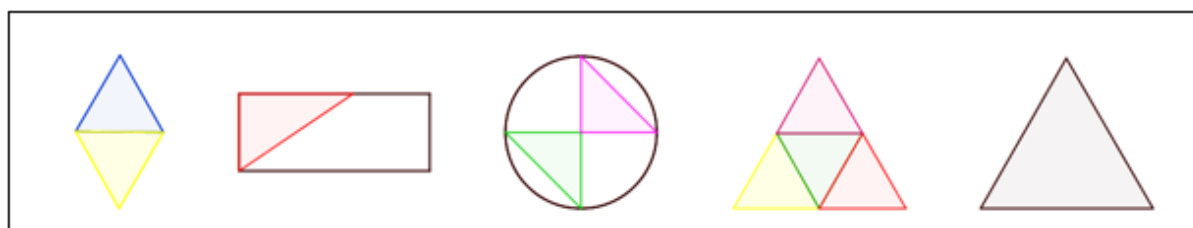
**Figura 1 – Figuras geométricas constantes da atividade 1**



Fonte: Dados da pesquisa.

Na realização desta atividade, esperava-se que os alunos determinassem 10 triângulos, conforme indicado na Fig. 2. Ao verificar as respostas encontradas pelos participantes, encontrou-se o seguinte panorama: A, C, D, E e F reconheceram os dez triângulos; H e I identificaram apenas nove triângulos; G e J contabilizaram 12 e o aluno B, 13 triângulos.

**Figura 2 – Triângulos identificados na Atividade 1**



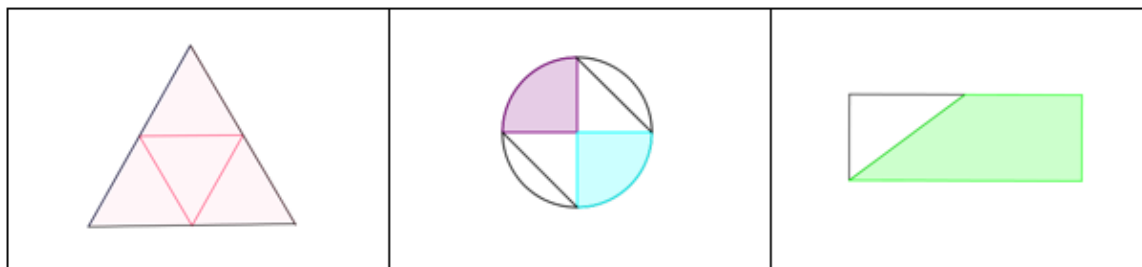
Fonte: Dados da pesquisa.

No momento da discussão das atividades resolvidas, fase de explicitação, proposta por Kaleff *et al.* (1994), os dois alunos que identificaram apenas nove triângulos justificaram que não contabilizaram o triângulo “maior” da última figura (Fig.3). Quanto àqueles alunos que indicaram 12 triângulos, responderam que, durante a contagem, identificaram como triângulo qualquer figura que representasse a união de três pontos, sendo ou não essa união representada por segmentos de reta. Sendo assim, contabilizaram os setores circulares, representados na Fig. 4,

DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

como triângulos. Já o aluno B, que identificou 13 triângulos, além de considerar os setores circulares como triângulos, contabilizou o trapézio obtido na divisão do retângulo (Fig.5), como um triângulo.

Figura 3 – **Triângulo maior**    Figura 4 – **Setores circulares**    Figura 5 – **Trapézio**

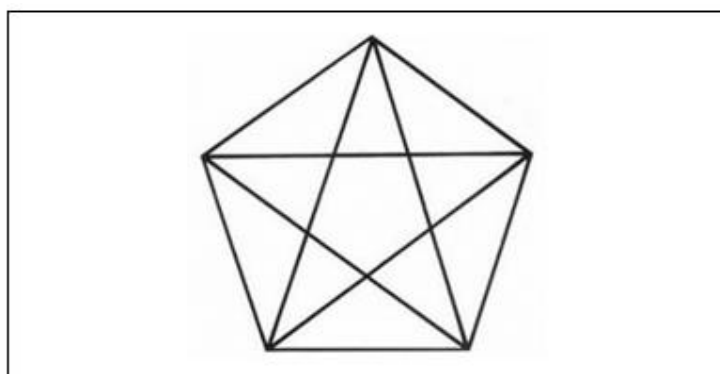


Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à capacidade de reconhecer uma forma geométrica, a partir de sua forma global, Domingos (2010, p. 140) aponta que “a capacidade de reconhecer uma dada forma ou objeto está relacionada à habilidade de identificar as semelhanças e diferenças entre os objetos em estudos”. Nesse sentido, com base nas respostas fornecidas pelos estudantes, percebeu-se que, mesmo sendo alunos já egressos da Educação Básica, não há uma unanimidade em relação ao reconhecimento de triângulo pela sua forma, o que aponta fragilidades no ensino de Geometria.

Ainda relacionado ao nível 1 da Teoria de Van Hiele, foi proposta a segunda atividade de visualização e reconhecimento de triângulos, a partir de uma figura geométrica formada por triângulos sobrepostos, conforme representado na Fig. 6. Nessa atividade, os alunos também deveriam contabilizar o total de triângulos presentes na figura.

Figura 6 – **Triângulos constantes na atividade 2**

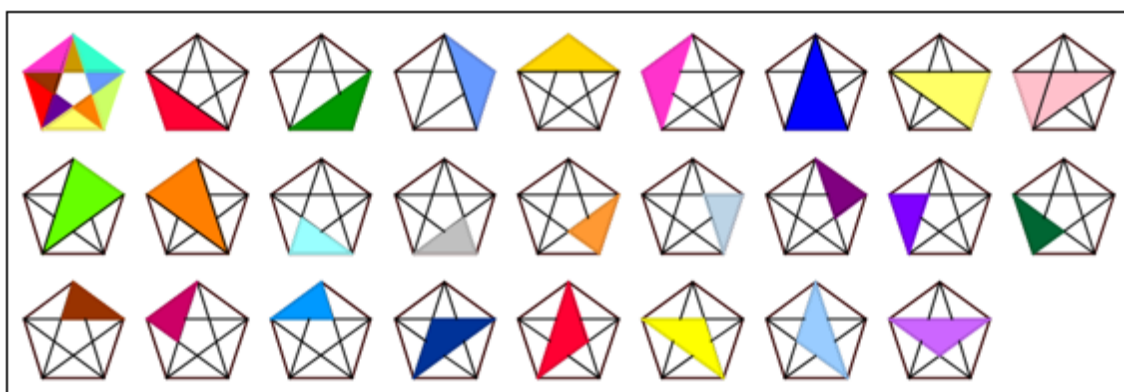


Fonte: <http://www.oqueeoquee.com/imagens-enigmaticas/>

DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

A atividade foi proposta com o intuito de verificar se os alunos conseguiriam elaborar um método de organização e sistematização, de forma a identificar todos os 35 triângulos presentes na figura, conforme representados na resolução da atividade (Fig. 7).

Figura 7 – **Solução da Atividade 2**



Fonte: Dados da pesquisa.

A análise das respostas dos estudantes mostrou que apenas o aluno A encontrou o resultado esperado; os alunos B, C, G e J identificaram 10 triângulos, demonstrando que só contabilizaram os da primeira figura representada na solução (Fig. 7). Os alunos D, E, H e I determinaram entre 20 e 22 triângulos, indicando que visualizaram mais do que os triângulos iniciais, porém não conseguiram sistematizar um método de organização que lhes permitisse visualizar todos os triângulos. O aluno F encontrou 40 triângulos, indicando que contabilizou alguns triângulos mais de uma vez.

Na fase da explicitação, referente a essa atividade, o aluno A justificou que, para identificar todos os triângulos, fez réplicas da figura e foi utilizando marcações para a contagem dos triângulos. O mesmo recurso foi utilizado por F, porém, ele acabou se perdendo e encontrou um valor maior que o esperado. Já os alunos que identificaram 10 triângulos, B, C, G e J, justificaram que não conseguiram encontrar os que estavam sobrepostos. Aqueles que determinaram entre 20 e 22 triângulos, relataram que visualizaram mais do que os dez iniciais, mas não conseguiram criar um instrumento que permitisse identificar todos os demais triângulos.

Essa atividade de reconhecimento de uma figura pela sua forma é importante para a construção do conhecimento geométrico, conforme destaca Domingos (2010), ao parafrasear Van Hiele (1957):



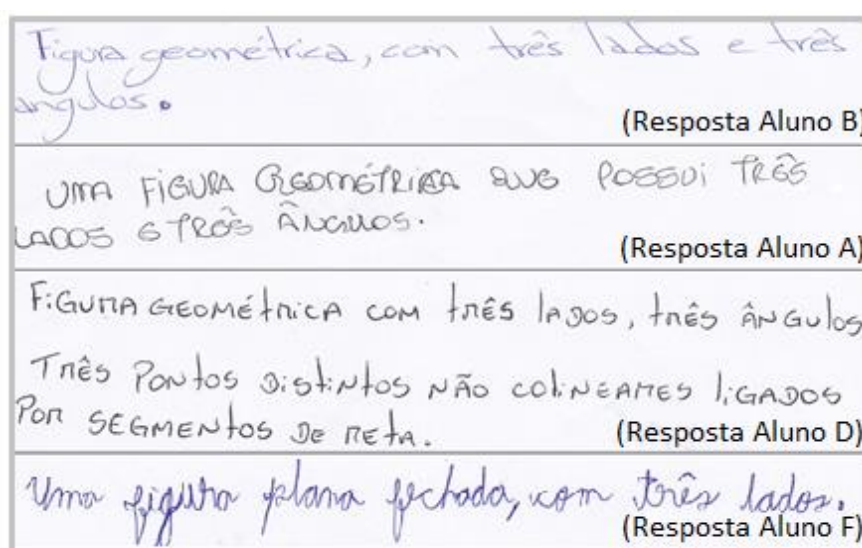
DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

quando os educandos se mostram capazes de identificar semelhanças e diferenças entre os objetos geométricos, analisar os componentes da forma e reconhecê-la em diferentes representações, dizemos que no tocante à figura dada, os estudantes apresentam fortes indícios de que já estão iniciando um novo nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico (VAN HIELE, 1957, p. 146).

Para a quarta fase, da orientação livre, foram propostas duas atividades individuais. A primeira solicitava uma definição de triângulo e a segunda, uma classificação. Tais atividades contemplaram o nível dois (análise) da Teoria de Van Hiele, que requeria dos alunos a identificação de elementos e características dos triângulos, de maneira que conseguissem conceituar essa figura geométrica e, após, organizar e classificar, conforme características e/ou propriedades em comum.

Em relação à definição de triângulos, houve respostas bem variadas. Buscando categorizá-las, observou-se que quatro alunos definiram triângulo como figura geométrica com três lados e/ou três ângulos (Fig. 8). É possível notar que a definição do aluno D, ainda, apresentou um complemento: *Três pontos distintos não colineares ligados por segmentos de reta*.

Figura 8 – **Respostas da atividade 3 dos alunos B, A, D e F**

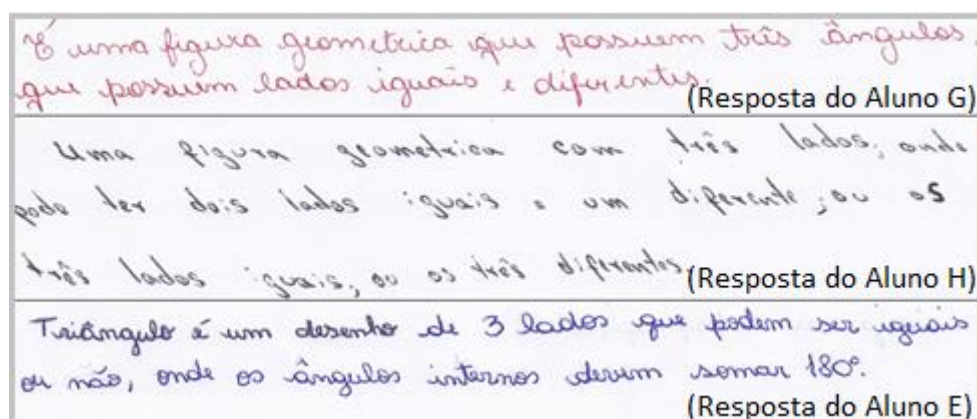


Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos E, G e H afirmaram ser uma figura geométrica com três lados, como mostrado na Fig. 9, mas destacaram possíveis relações entre os lados: *que possuem lados iguais ou diferentes* (G). Observa-se, também, que o aluno E apresentou, ainda, uma propriedade dos triângulos: *os ângulos internos devem somar 180°*.



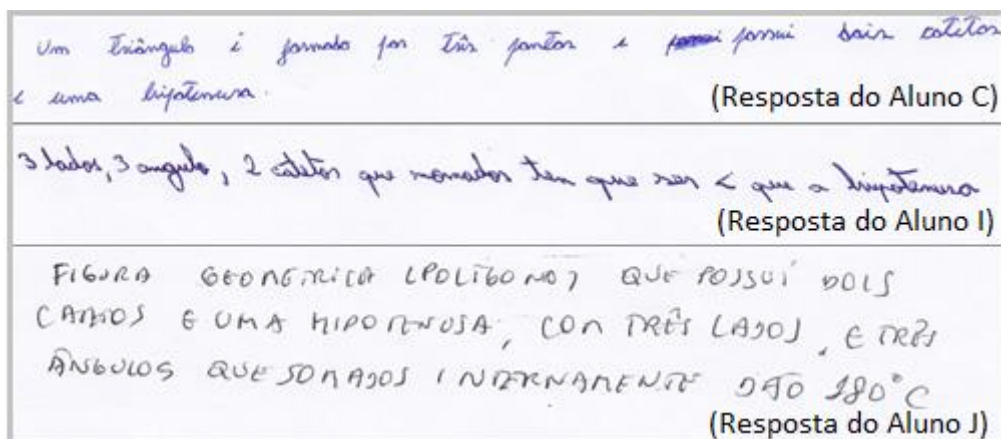
Figura 9 – Respostas da atividade 3 dos alunos G, H e E



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, os alunos C, I e J destacaram, em sua definição, elementos que caracterizam o triângulo retângulo, como se observa na Fig. 10. Pode-se conjecturar que a caracterização e distinção do triângulo retângulo deveu-se, tanto ao fato desse estar presente em diferentes situações do cotidiano, quanto à importância que é dada ao seu estudo na Educação Básica. Novamente, a propriedade relacionada à soma dos ângulos internos de um triângulo foi ressaltada, também, pelo aluno J.

Figura 10 – Respostas da atividade 3 dos alunos C, I e J



Fonte: Dados da pesquisa.

Tomando por referência a definição de triângulo, enunciada por Dolce e Pompeo (1995, p.36), "dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC, chama-se triângulo ABC", percebeu-se que os alunos B, A, D e F apresentaram definições semelhantes a essa (Fig. 8). Por sua vez, G, H, E e J, além da similaridade da definição, destacaram relações entre os lados (*podem ser*



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

*iguais ou diferentes*) e propriedades (*soma dos ângulos internos*). Já C, I e J indicaram características de triângulos retângulos, o que leva a intuir que esses sujeitos têm a ideia da definição de triângulo intimamente relacionada apenas com triângulos retângulos.

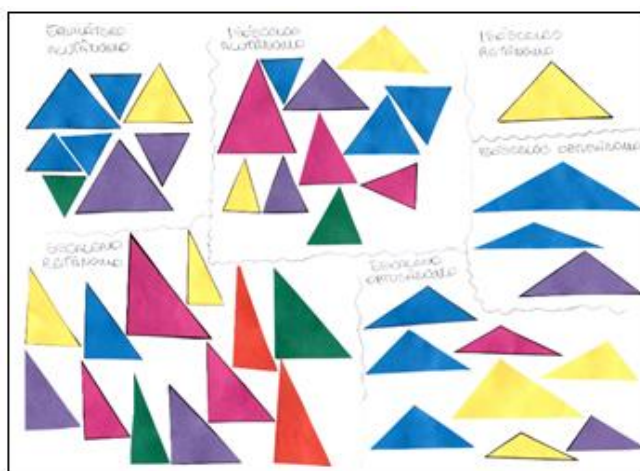
Acredita-se que o processo de definir um objeto matemático seja uma transição entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele. Contudo, conforme aponta Villers (2010, p. 402), para que o sujeito progrida de um nível para outro, "é necessário que ocorra uma reorganização significativa de relações e um refinamento de conceitos". Em outras palavras, além do processo de verbalização do conceito intuitivo, é necessária a reestruturação do conhecimento.

Dando prosseguimento à oficina, foi proposta uma atividade de classificação de triângulos. Para o desenvolvimento dessa tarefa, os alunos receberam um montante de diferentes tipos, recortados, os quais deveriam ser organizados conforme características em comum, sendo que deveriam destacar tais características.

A atividade de classificação entre diferentes objetos pertencentes a uma mesma classe de polígono é importante para o desenvolvimento de conhecimentos geométricos, conforme aponta Domingos (2010, p. 140): "classificação, análise e representação são as nossas ferramentas. São instrumentos importantes na aprendizagem de um conceito em geometria".

A análise dos registros mostrou que os alunos A e F classificaram os triângulos quanto aos lados (equilátero, isósceles e escaleno) e quanto aos ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo), destacando que os triângulos possuem as duas classificações simultaneamente. Na Fig. 11, tem-se a classificação feita pelo aluno A, na qual ele destaca que, para cada grupo de triângulos, há duas características simultâneas, uma em relação aos lados e outra em relação aos ângulos.

Figura 11 – **Classificação feita pelo aluno A**



Fonte: Dados da pesquisa.



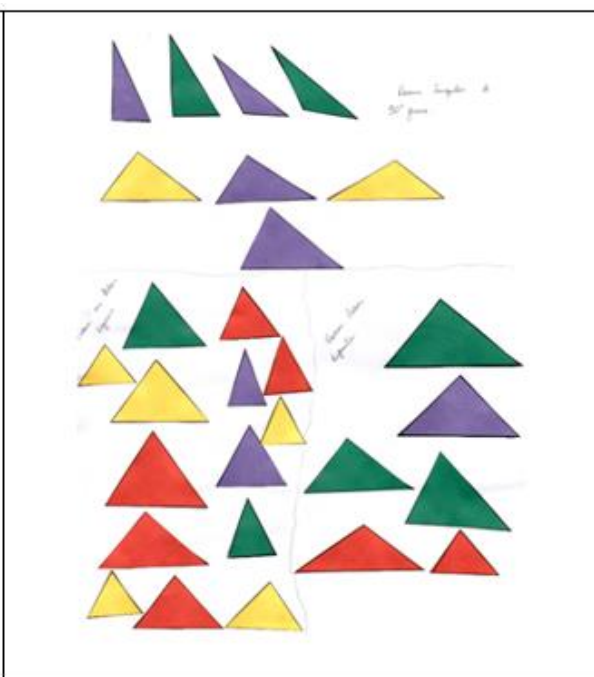
Domingos (2010, p. 146) aponta que é no nível 2 da Teoria de Van Hiele “que os educandos conseguem identificar semelhanças e diferenças, tornando-se capazes de reconhecer um polígono por suas propriedades”. Sendo assim, ao analisar as resoluções apresentadas pelos alunos A e F, é possível perceber que apresentam tais características bem visíveis, indicando que ambos possuem o nível 2 do modelo já constituído.

Os alunos C e H criaram três categorias de classificação: “lados iguais”, “lados diferentes” e “retângulo”, como exemplificado na Fig. 12. Já D, E, G e J estabeleceram quatro categorias para classificação: três em relação aos lados (isósceles, equilátero e escaleno) e uma em relação aos ângulos (retângulo), conforme destacado no exemplo da Fig. 13.

Figura 12 – **Classificação feita pelo aluno C**



Figura 13 – **Classificação feita pelo aluno J**



Fonte: Dados da pesquisa.

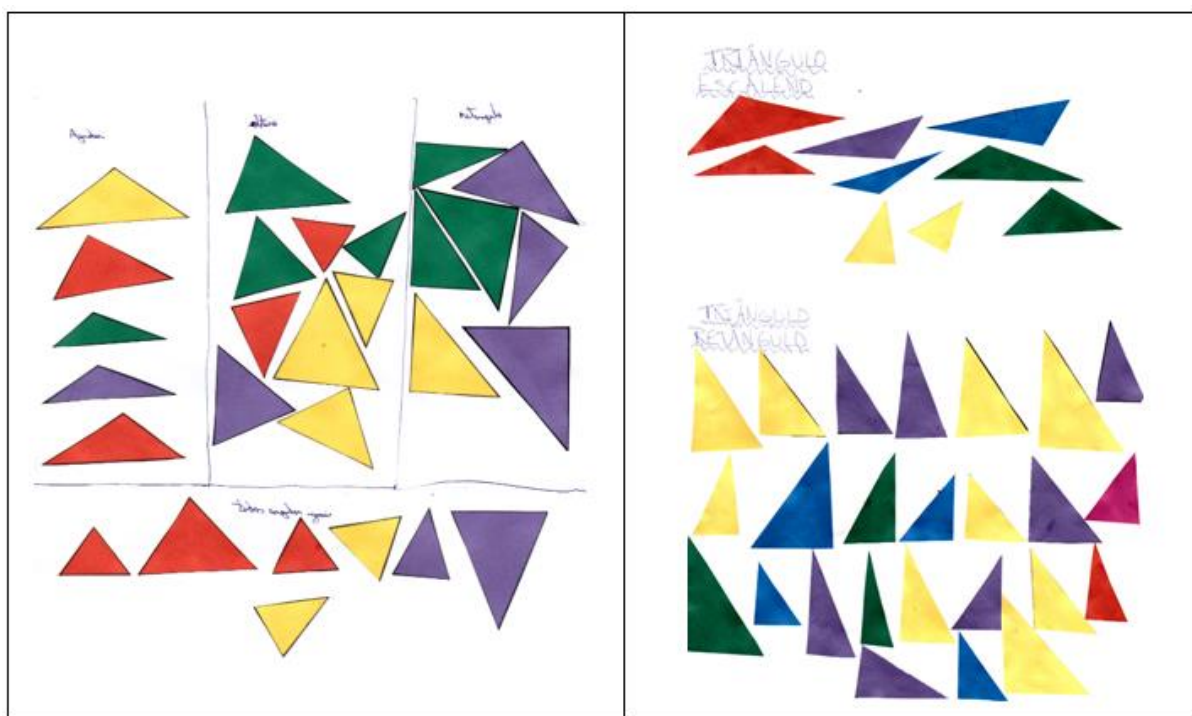
Aqui, diferentemente do que se verificou na resolução dos alunos A e F, os alunos C, D, E, G, H e J identificaram que há uma classificação quanto aos lados, sendo que, no primeiro caso, apenas observaram que podem ser iguais ou diferentes e, no segundo, conhecem as nomenclaturas para tal classificação. Já em relação aos ângulos, só observaram a existência de triângulos retângulos, sendo que não indicaram que um mesmo triângulo deve ter, simultaneamente, uma classificação quanto aos lados e aos ângulos.

DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

Nesse sentido, pode-se intuir que, mesmo os alunos que conhecem a nomenclatura de triângulos quanto aos lados, ainda estão no processo de transição do primeiro nível para o segundo do modelo de Van Hiele, pois, conforme destacado por Villers (2010, p. 402), “a transição do Nível 1 para o Nível 2 envolve mais do que simplesmente a aquisição de linguagem, ela envolve o reconhecimento de algumas novas relações entre conceitos e o refinamento e a renovação de conceitos existentes”.

Já o aluno I classificou a coleção apresentada quanto aos ângulos (Fig. 14) e o aluno B, como triângulo escaleno e retângulo (Fig. 15). Em ambos os casos, novamente, os alunos não indicaram que um mesmo triângulo poderia ter duas classificações simultâneas.

Figura 14 – **Classificação feita pelo aluno I** Figura 15 – **Classificação feita pelo aluno B**



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao finalizar as análises e discussões das atividades, pode-se fazer algumas inferências sobre o que foi apresentado pelos sujeitos participantes. Serão utilizadas, como parâmetros para tais análises, as características de cada nível, apontadas por Burger & Shaughnessy (1986, apud VILLERS, 2010).

Em relação ao nível 1, as características esperadas são: (1) uso de propriedades irrelevantes para identificação, comparação, classificação e descrição de figuras; (2) referência a protótipos visuais de figuras; (3) incapacidade de reflexão sobre as variações, quanto à orientação e forma, de determinado tipo de



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

figura; (4) classificação de figuras infundadas ou irrelevantes; (5) descrição incompleta de figuras (confunde condições necessárias, que são, em sua maioria visuais, com condições suficientes).

Quanto ao nível 2, são ressaltadas as seguintes características: (1) compararam figuras com suas propriedades; (2) não realizam inclusão de classes entre diferentes classes de figuras; (3) classificaram figuras somente em relação a uma propriedade; (4) definiram figuras com uso excessivo de propriedades; (5) utilizaram apenas suas definições pessoais, evitando o uso de definição de terceiros (professor, livros); (6) utilizaram método empírico para verificar determinada afirmativa.

Com base em tais características e nas análises das atividades, observou-se, com exceção dos alunos A e F, que os demais sujeitos participantes da pesquisa estão em fase de transição entre os níveis 1 e 2 do modelo de Van Hiele.

Ao final da oficina, as atividades resolvidas foram discutidas no grande grupo, contemplando o momento de integração proposto por Kaleff *et al.* (1994). Coube ao professor, com o auxílio dos participantes, realizar a sintetização de tudo o que foi apontado pelos alunos, buscando auxiliá-los na internalização dos conceitos referentes ao objeto de estudo – triângulos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a aplicação da oficina, foi possível alcançar o objetivo de examinar, com base na Teoria de Van Hiele, como alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática identificam, definem e classificam triângulos. Verificou-se que grande parte dos participantes apresentou nível de desenvolvimento de pensamento geométrico referente à transição entre o Nível 1 e Nível 2, propostos por Van Hiele, demonstrando fragilidade na aprendizagem e no ensino de Geometria da Educação Básica.

Nesse sentido, intui-se que o ensino de Geometria, nos diferentes níveis de ensino, necessita de mudanças urgentemente, sendo necessário repensar o fazer pedagógico, de modo que assuma um caráter mais dinâmico, significativo e efetivo. Nesse sentido, Lorenzato (1995, p. 4) aponta que “soluções esporádicas ou pontuais não serão suficientes para resolver a questão da omissão geométrica. É preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar”.

Contudo, constatou-se, também, que atividades como a que foi realizada, nas quais o aluno participa ativamente de todo o processo de aprendizagem, sendo considerados seus conhecimentos prévios e a individualidade na forma de compreensão de diferentes objetos matemáticos, muda o cenário que usualmente se encontra nas aulas de Matemática, em que “a linguagem e o questionamento são empregados pelo professor de uma forma deficiente, pois ele, na maioria das vezes, não faz uso do conhecimento prévio que o aluno tem a respeito de um assunto e



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

nem busca saber em que nível o mesmo se encontra nesse tópico" (KALEFF *et al.*, 1994, p. 7-8).

Com tais mudanças, ressalta-se a importância de compreender a forma singular como cada sujeito aprende e a necessidade de se pensar em um ensino de Matemática, em especial de Geometria, que impulse o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. Através de ações como essas, novos espaços de aprendizagem são criados, propiciando aos alunos a reflexão sobre os próprios conhecimentos, favorecendo a construção de novos saberes.

Nesse sentido, acredita-se que a Teoria de Van Hiele, como utilizada neste trabalho, se apresenta como uma possibilidade de aplicação em sala de aula, capaz de trazer mudanças ao processo de ensino de Geometria, pois sua gênese propõe mecanismos que favorecem a construção do conhecimento geométrico em níveis hierárquicos de complexidade, que têm como foco a aprendizagem do aluno em um nível, para avançar para o nível subsequente, dessa forma, tornando o processo mais dinâmico e significativo.

## REFERÊNCIAS

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teorias e a métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

CARDOSO, E. J. *Teoria de Van Hiele aplicada ao ensino de funções*. Disponível em: <[http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd3\\_eduarda\\_cardoso-A1.pdf](http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd3_eduarda_cardoso-A1.pdf)>. Acesso em: 21 set. 2016.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. 7.ed. São Paulo: Atual, 1995.

DOMINGOS, J. *Um estudo sobre polígonos a partir dos princípios de Van Hiele*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2010.

LORENZATO, S. A. Porque não ensinar Geometria? In: *A Educação Matemática em Revista*. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. S.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de Van Hiele. In: *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

PASSOS, C. L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a Geometria na sala de aula*. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.



DOI: 10.12957/e-mosaicos.2018.29662

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. In: *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 12, n. 3, 2010, p. 400-431.

*Recebido em 19 de julho de 2017*

*Aceito em 14 de abril de 2018*