Cadernos do IME - Série Matemática
DOI: 10.12957/cadmat.2021.59822
***e-ISSN:** 2236-2797 (online)*
Recebido em 14 Maio 2021 | Aceito em 08 Dezembro 2021

A sequência (s, t)-Narayana

(s, t)-NARAYANA SEQUENCE

RENATA P. M. VIEIRA[a] FRANCISCO R. V. ALVES[b]
PAULA M. M. C. CATARINO[c]

Resumo

Neste presente trabalho é definida a sequência (s, t)-Narayana, sendo uma generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência da sequência de Narayana. Assim, são estudadas as respectivas formas matriciais, função geradora, fórmula de Binet, equação característica e outros aspectos matemáticos referentes à essa nova sequência introduzida.

Palavras-chave: equação característica, forma matricial, fórmula de Binet, sequência de Narayana.

Abstract

In this present work, the (s, t)-Narayana sequence is defined, being a generalization of the coefficients of the recurrence formula of the Narayana sequence. Thus, the respective matrix forms, generating function, Binet's formula, characteristic equation, and other mathematical aspects related to this new sequence are studied.

Keywords: characteristic equation, matrix form, Binet's formula, Narayana sequence.

MSC2010: 11B37, 11B39.

[a]Secretaria de Educação do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: 0000-0002-1966-7097 **E-mail:** re.passosm@gmail.com

[b]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: 0000-0003-3710-1561 **E-mail:** fregis@gmx.fr

[c]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal; ORCID: 0000-0001-6917-5093 **E-mail:** pcatarino23@gmail.com

1 Introdução

A sequência de Narayana foi introduzida pelo matemático indiano Narayana Pandita (1340-1400), após o estudo referente ao problema das vacas e bezerros. Uma vaca produz um bezerro por ano. Assim, como acontece para a sequência de Fibonacci em que existe a problemática dos pares dos coelhos imortais, tem-se a seguinte problemática dos bezerros e vacas: A partir do quarto ano, cada bezerro produz um bezerro no início de cada ano. Quantos bezerros existem no total após 20 anos? A partir disso, tem-se a definição da sequência de Narayana (N_n), como sendo uma sequência linear e recorrente de terceira ordem, com a sua fórmula de recorrência, dada por [1]:

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}, n \geqslant 3, N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1.$$

O polinômio característico, ou ainda equação característica, é dado por: $x^3 - x^2 - 1 = 0$, possuindo como soluções duas raízes complexas e uma raiz real, onde esse valor real representa a proporção de super-ouro (valor aproximado de 1,46) [3]. Alguns outros aspectos matemáticos e históricos, podem ser estudados em outros trabalhos [1, 2].

Ademais, é introduzida a sequência (s,t)-Narayana, com base no trabalho [8], estudando alguns teoremas matemáticos, definições e algumas propriedades envolvendo características matemáticas referente a essa nova sequência apresentada neste trabalho.

2 A sequência (s,t)-Narayana

A sequência (s,t)-Narayana, é uma sequência de terceira ordem, linear e recorrente, generalizando os coeficientes da sua respectiva fórmula de recorrência (s e t).

Definição 2.1. *A sequência (s,t)-Narayana $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ é introduzida e definida pela seguinte relação de recorrência, com s e t sendo números inteiros:*

$$n_k = sn_{k-1} + tn_{k-3}, k \geqslant 3, n_0 = 0, n_1 = n_2 = 1.$$

Dessa forma, têm-se os primeiros termos dessa sequência, como sendo:

$$
\begin{aligned}
n_0 &= 0,\\
n_1 &= 1,\\
n_2 &= 1,\\
n_3 &= s,\\
n_4 &= s^2 + t,\\
n_5 &= s^3 + st + t,\\
n_6 &= s^4 + s^2t + 2st,\\
n_7 &= s^5 + s^3t + 3s^2t + t^2,\\
n_8 &= s^6 + s^4t + 4s^3t + 2st^2 + t^2,\\
n_9 &= s^7 + s^5t + 5s^4t + 3s^2t^2 + 3st^2,
\end{aligned}
$$

Teorema 2.2. *O polinômio característico da sequência (s,t)-Narayana é dada por:*

$$x^3 - sx^2 - t = 0$$

Demonstração. Com base no Teorema de Cayley-Hamilton [4] e na forma matricial [6], é possível obter o polinômio característico, em que:

$$p(\lambda) = det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dessa forma:

$$p(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - s & 0 & -1 \\ -t & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 - s\lambda^2 - t.$$

Logo: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^3 - s\lambda^2 - t = 0$. Obtendo: $x^3 - sx^2 - t = 0$ □

Teorema 2.3. *A fórmula de Binet da sequência (s,t)-Narayana é dada por:*

$$n_k = Ax_1^k + Bx_2^k + Cx_3^k$$

onde $k \in \mathbb{N}$, x_1, x_2 e x_3 são as raízes do polinômio característico e $4p^3 + 27q^2 \neq 0$, *com $q = -t - \frac{2s^3}{27}$ e $p = -\frac{s^2}{3}$, a condição para os coeficientes s, t da fórmula de recorrência existirem.*

Observação 2.1. Com base na fórmula de recorrência da sequência (s, t)-Narayana e no seu polinômio característico com raízes, pode-se obter por meio da resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes A, B, C.

O discriminante $\Delta = (\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})$, onde $q = -t - \frac{2s^3}{27}$ e $p = -\frac{s^2}{3}$, referentes ao polinômio característico de grau 3, determina a forma como serão as raízes do polinômio. Dessa forma, quando $\Delta \neq 0$, todas as raízes serão distintas, concluindo facilmente que $4p^3+27q^2 \neq 0$ [5]. Caso a condição não seja satisfeita, os coeficientes indicados acima não existirão, uma vez que as raízes são iguais, então não haverá nenhuma fórmula Binet. É possível notar ainda que $x_1x_2x_3 = t$ e que $x_1+x_2+x_3 = s$. Por fim, essa condição implica que quando $t = 0$, haverá pelo menos uma raiz igual a zero. Logo, não haverá a fórmula Binet para este caso.

Teorema 2.4. *Para $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, a função geradora da sequência (s, t)-Narayana, é dada por:*

$$G(n_k, x) = \frac{x + x^2 - sx^2}{1 - sx - tx^3}.$$

Demonstração. Multiplicando a função geradora $G(n_k, x)$ por sx e tx^3, tem-se:

$$\begin{aligned} G(n_k, x) &= n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 + \dots \\ sxG(n_k, x) &= sn_0x + sn_1x^2 + sn_2x^3 + sn_3x^4 + sn_4x^5 + \dots \\ tx^3G(n_k, x) &= tn_0x^3 + tn_1x^4 + tn_2x^5 + tn_3x^6 + tn_4x^7 + \dots \end{aligned}$$

Assim $G(n_k, x) - [sxG(n_k, x) + tx^3G(n_k, x)]$, com os valores iniciais $n_0 = 0, n_1 = n_2 = 1$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} G(n_k, x)(1 - sx - tx^3) &= n_0 + (n_1 - sn_0)x + (n_2 - sn_1)x^2 \\ G(n_k, x)(1 - sx - tx^3) &= x + x^2 - sx^2 \\ G(n_k, x) &= \frac{x + x^2 - sx^2}{1 - sx - tx^3}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.5. *A forma matricial da sequência (s,t)-Narayana, é dada por:*

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0 & 1\\ t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}n_{k+2} & n_k & n_{k+1}\end{bmatrix}, k > 0.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $k = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0 & 1\\ t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n_3 & n_1 & n_2\end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $k = w, w \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0 & 1\\ t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^w = \begin{bmatrix}n_{w+2} & n_w & n_{w+1}\end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $k = w + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0 & 1\\ t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^w \begin{bmatrix}s & 0 & 1\\ t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}n_{w+2} & n_w & n_{w+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0 & 1\\ t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}sn_{w+2} + tn_w & n_{w+1} & n_{w+2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}n_{w+3} & n_{w+1} & n_{w+2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

É importante ressaltar que além da forma matricial apresentada no Teorema 2.5, existem outras cinco formas matriciais da sequência (s,t)-Narayana, obtidas a partir da permutação das linhas e colunas das duas matrizes que compõe a forma matricial.

Teorema 2.6. *Uma outra forma matricial da sequência (s,t)-Narayana, é dada* *por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} n_{k+2} & n_{k+1} & n_k \end{bmatrix}, k > 0.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 2.5. □

Teorema 2.7. *Mais uma forma matricial da sequência (s,t)-Narayana, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} n_{k+1} & n_{k+2} & n_k \end{bmatrix}, k > 0.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 2.5. □

Teorema 2.8. *Uma outra forma matricial da sequência (s,t)-Narayana, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} n_k & n_{k+1} & n_{k+2} \end{bmatrix}, k > 0.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 2.5. □

Teorema 2.9. *Uma outra forma matricial da sequência (s,t)-Narayana, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} n_k & n_{k+2} & n_{k+1} \end{bmatrix}, k > 0.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 2.5. □

Teorema 2.10. *Uma outra forma matricial da sequência (s,t)-Narayana, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} n_{k+1} & n_k & n_{k+2} \end{bmatrix}, k > 0.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 2.5. □

3 Conclusão

Com a introdução da sequência (s,t)-Narayana, foi possível estudar a generalização dos termos iniciais dessa sequência. Dessa forma, foram discutidas algumas propriedades e definições matemáticas, ressaltando a sua função geradora, fórmula de Binet, equação característica e forma matricial referentes à esses números.

No futuro, busca-se estudos referentes a visualização dessa sequência, como bem realizado nos trabalhos [2, 7], onde foi estudada uma alternativa de visualização da sequência de Padovan e outras sequências numéricas, por meio do GoogleColab integrado ao método de Newton.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

[1] Allouche, J. P.; Johnson, J. Narayana's cows and delayed morphisms, *Articles of 3rd Computer Music Conference JIM96*, France, 1996.

[2] Alves, F. R. V.; Vieira, R. P. M.; Catarino, P. M. M. C. Visualizing the Newtons Fractal from the Recurring Linear Sequence with Google Colab: An Example of Brazil X Portugal Research, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, vol. 15, n. 3, p. 1-19, 2020.

[3] Crilly, T. A Supergolden Rectangle, *The Mathematical Gazette*, vol. 78, n. 483, p. 320-325, 1984.

[4] Gomes, C. A.; Oliveira, O. R. B. O Teorema de Cayley-Hamilton, *Available online: https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Cayley-Hamilton.pdf*, p. 1-11, 2019.

[5] Lima, E. L. A Equação do Terceiro Grau, *Matemática Universitária*, n. 5, p. 9-23, 1987.

[6] Ramírez, J. L.; Sirvent, V. F. A note on the k-Narayana sequence, *Annales Mathematicae et Informaticae*, vol. 45, p. 91-105, 2015.

[7] Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. Alternative views of some extensions of the Padovan sequence with the Google Colab, *Anale. Seria Iformatica*, vol. XVII, n. 2, p. 266-273, 2019.

[8] Yazlik, Y; Taskara, N.; Uslu, K.; Yilmaz, N. The Generalized (s,t)-Sequence and its Matrix Sequence, *AIP Conference Proceedings* vol. 1389, 381, 2011.