Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
D.O.I: 10.12957/cadmat.2021.56996
Recebido em 08 Jan. 2021 | Aceito em 02 Abr. 2021

O TEOREMA DE BAIRE E UMA APLICAÇÃO NO ESPAÇO DE FUNÇÕES

THE BAIRE'S THEOREM AND AN APPLICATION IN FUNCTION SPACE

RAFAEL A. DA C. SCHNEIDER [a]
VÍTOR COSTA SILVA †[b]

Abstract

O Teorema de Baire é de grande importância no campo da Análise e Topologia Geral. A compreensão de seu resultado permite apreciar a riqueza de suas consequências, como por exemplo sua aplicação no conjunto de funções reais contínuas e limitadas.

Palavras-chave: Teorema de Baire, Espaços Completos, Conjunto de Funções, Diferenciabilidade, Continuidade.

Abstract

Baire's theorem has great importance in the field of General Topology and Analysis. The understanding of its result allows us to appreciate the richness of its consequences, such as its application in the set of continuous and limited real functions.

Keywords: Baire's Theorem, Complete Spaces, Function Set, Differentiability, Continuity.

MSC2010: 54E35, 54E52, 46B25

[a]Instituto de Matemática e Estatística – IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; ORCID: `https://orcid.org/0000-0001-9824-0405` **E-mail: rafael.schneider96@hotmail.com**

[b]Instituto de Matemática e Estatística – IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; **E-mail: vitor.costa@ime.uerj.br**

1 Introdução

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um importante resultado de Espaços Métricos, o Teorema de Baire. Sua demonstração é fundamentada em uma propriedade que consiste em uma generalização do Princípio de Intervalos Encaixados na Reta, e por conta disso, o Teorema de Baire fornece uma caracterização para uma importante classe de Espaços Métricos, os Espaços Completos.

O Teorema principal desse texto também será utilizado para mostrar que o conjunto das funções reais contínuas sem derivada nenhum ponto é denso no conjunto das funções contínuas e limitadas de mesmo domínio e imagem em $\mathbb{R}$. Provar a densidade desse conjunto é muito interessante, pois traduz a noção de que o universo de funções contínuas sem derivada em nenhum ponto é maior do que o das contínuas que possuem derivada. Este é um resultado contra-intuitivo, já que construir funções contínuas sem derivada em nenhum ponto não é um exercício trivial.

Além disso, esta aplicação é responsável por quebrar a falácia de que derivação e integração são operações inversas, uma vez que garantimos a existência de funções integráveis e não deriváveis, visto que toda função contínua é integrável.

A organização deste trabalho foi dividida da seguinte forma: Na Seção 1, descrevemos parte da Biografia de René-Louis Baire, autor do teorema central apresentado neste artigo. Na Seção 2, nos dedicamos a estabelecer definições básicas que compõem o ferramental necessário para demonstrar os principais resultados do trabalho. Deste modo, definimos e apresentamos alguns exemplos espaços métricos, elucidando Espaços Completos e Espaços de Funções, ambientes onde se desenvolvem os resultados principais do texto. Na Seção 3, demonstramos o Teorema de Baire e as proposições interligadas a esse resultado, enquanto a Seção 4 foi reservada para a aplicação do Teorema de Baire no espaço de funções contínuas. Por fim, a Seção 5 foi destinada às conclusões.

1.1 Biografia

Antes de abordarmos o Teorema de Baire à luz de sua riqueza Matemática, vamos expor uma breve biografia sobre seu autor, René-Louis Baire, baseada em [9].

René-Louis Baire (Figura 1) nasceu em 21 de Janeiro de 1874 em Paris, na França, cidade onde cresceu. Nessa época, a capital francesa eclodia uma atmosfera de modernização, simbolizada pela construção da torre Eiffel e caracterizada pelo movimento cultural desabrochado em 1871, a Belle Époque.

No entanto, o desenvolvimento parisiense não refletiu a infância de René, que foi marcada por dificuldades financeiras, já que seu pai era alfaiate. Os empecilhos monetários não impediram o bom rendimento escolar de René, que em 1886, aos doze anos, foi premiado com uma bolsa de estudos no Lycée Lakanal. Em 1881, Baire foi admitido na École Polytechnique e na École Normale Supérieure.

Baire optou por ingressar na École Normale Supérieure, onde trabalhou com a teoria de funções e determinou condições sob as quais uma função é o limite de uma sequência de funções contínuas. Posteriormente estabeleceu sua própria classificação de funções. As funções ditas de classe 1 eram aquelas que eram o limite de uma sequência de funções contínuas. Funções de classe 2 eram aquelas que eram o limite de uma sequência de funções de classe 1, enquanto funções de classe 3 eram aquelas que eram o limite de uma sequência de funções de classe 2.

Figure 1: René-Louis Baire (1874 - 1932)

Fonte: [9]

A notoriedade de seu trabalho lhe garantiu uma bolsa de estudos na Itália, onde escreveu uma tese de doutorado sobre funções descontínuas, que foi examinada e aprovada por um conselho formado por Darboux, Appell e Émile Picard em 1899.

Após se tornar doutor, Baire teve a oportunidade de divulgar mais amplamente seu trabalho e por conta disso, a Fundação Peccot lhe concedeu uma bolsa para que lecionasse no Collège de France em 1904. Ele também ingressou em um cargo universitário na Faculdade de Ciências de Dijon, onde se tornou professor de Análise.

Entretanto, problemas de saúde impossibilitaram Baire de dar continuidade às suas pesquisas. Apesar disso, Baire escreveu uma série de importantes livros de análise, incluindo Théorie des nombres irrationels, limites e continuidade (1905) e Leçons sur lesories générales of l'analyse 2, 2 Vols. (1907-8).

Baire se aposentou no ano de 1925 e faleceu no dia 05 de Julho de 1932 em Chambéry, França.

2 Resultados Preliminares

Nesta seção definimos e apresentaremos definições, exemplos e propriedades de espaços métricos, ambiente central de estudo deste trabalho. O leitor interessado em se aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, deve consultar as referências [4] [6] e [10].

Definição 1. *Seja M um conjunto qualquer, com $M \neq \emptyset$ e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

1. $d(x, y) \geq 0$; *(não-negatividade)*
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; *(condição de distância nula)*
3. $d(x, y) = d(y, x)$; *(simetria)*
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. *(desigualdade triangular)*

*Nestas condições dizemos que d é uma **métrica** sobre M e que o valor real $d(x, y)$ é a distância entre os elementos x e y.*

Definição 2. *O par (M, d) é o que definimos como um **Espaço Métrico**.*

Por comodidade, diremos simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada.
Indicaremos por d_M a métrica correlacionada ao espaço métrico (M, d).

Exemplo 1. *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A função*

$$\begin{aligned} d : \ & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & d(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

*é chamada de **métrica usual da reta.***

2.1 Conjuntos de Funções

Definição 3. *Sejam M, N espaços métricos e $X \subset M$. O conjunto denotado por $\mathcal{F}(X; N)$ é o conjunto de todas aplicações $f : X \to N$, ou seja,*

$$\mathcal{F}(X; N) = \{f : X \to N : \ f \text{ é função}\}.$$

Definição 4 (Função contínua)**.** *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e* X *subconjunto do espaço métrico* M*. Uma função* $f : X \longrightarrow N$ *é dita* ***contínua em um ponto*** $a \in X$ *quando dado* $\varepsilon > 0$ *pode-se encontrar um* $\delta > 0$*, tal que* $d_M(x, a) < \delta$ *implica* $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$*.*

Uma aplicação f é dita **contínua** quando é contínua em todo seu domínio.

Definição 5. *Sejam* M*,* N *espaços métricos e* $X \subset M$*. O conjunto denotado por* $\mathscr{C}(X; N)$ *é o* ***conjunto de todas aplicações*** $f : X \to N$ ***que são contínuas.***

$$\mathscr{C}(X; N) = \{f \in \mathcal{F}(X; N) : \ f \text{ é contínua}\}.$$

Definição 6 (Função limitada)**.** *Dizemos que uma aplicação* $f : X \to N$ *é* ***limitada*** *quando o seu conjunto imagem,* $f(X)$*, é um subconjunto limitado de* N*, ou seja,* $f(X)$ *está contido em alguma bola em* N*.*

Em outras palavras, se f *é limitada, então podemos garantir a existência de uma constante* $c > 0$ *que cota superiormente o conjunto formado pelas distâncias entre elementos de* X*, ou seja,* c *é tal que* $d(x, y) \leq c$ *para quaisquer* $x, y \in X$*.*

No caso de funções reais, dizer que um conjunto é limitado é equivalente a dizer que existe $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leq c$*,* $\forall x \in M$*.*

Exemplo 2. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ *é limitada, pois* $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$*, ou seja,* $f(\mathbb{R}) \subset B(0, \varepsilon)$*, para todo* $\varepsilon > 1$*.*

Definição 7 (Diâmetro)**.** *Seja* M *um espaço métrico. Podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado* $X \subset M$ *como*

$$diam(X) = \sup_{x,\, y \,\in\, X} \{d(x, y)\}.$$

Esse número real representa a menor das cotas superiores do conjunto formado pelas distâncias entre elementos de X*.*

Definição 8. *Seja* M *um espaço métrico e* $X \subset M$*. Denotamos* $\mathcal{B}(X; N)$ *como* ***o conjunto das aplicações limitadas*** *com domínio* X *e contradomínio* N*.*

$$\mathcal{B}(X; N) = \{f \in \mathcal{F}(X; N) : \ f \text{ é limitada}\}.$$

Definição 9. *Sejam* M*,* N *espaços métricos e* $X \subset M$*. O conjunto denotado por* $\mathcal{C}(X; N)$ *é o* ***conjunto das aplicações contínuas e limitadas*** *com domínio* X

e contradomínio N.

$$\mathcal{C}(X;N) = \{f \in \mathcal{F}(X;N) : \ f \text{ é contínua e limitada}\}.$$

2.2 Espaços Métricos Formados por Conjuntos de Funções

Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X;N)$. Para cada $x \in X$, considere o valor dado por $d_N(f(x), g(x))$. Como $(f(X) \cup g(X)) \subset N$ é limitado, o conjunto

$$S = \{y \in \mathbb{R} : y = d_N(f(x), g(x)) \text{ para algum } x \in X\}.$$

é um conjunto limitado por ser a união de conjuntos limitados. Além disso, como d_N é uma métrica bem definida, o conjunto S é constituído por valores não negativos.

Portanto, pelo Axioma do supremo é natural considerarmos a distância entre duas funções limitadas $f, g : X \to N$, como

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \{d_N(f(x), g(x))\}.$$

Essa métrica definida no espaço de funções limitadas é conhecida como **métrica do supremo**.

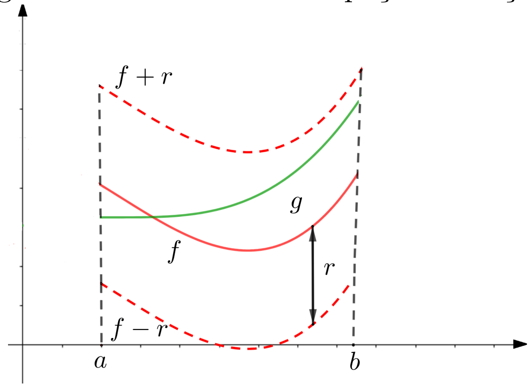
Se considerarmos f uma função tal que $f \in \mathcal{B}([a,b]\,;\mathbb{R})$, então a bola aberta de raio r centrada em f na métrica do sup é dada por

$$B\,(f;r) = \{h \in \mathcal{B}([a,b]\,;\mathbb{R}) : d(f,g) < r\}.$$

A condição para que $g \in \mathcal{B}([a,b]\,;\mathbb{R})$ pertença à bola aberta $B\,(f;r)$ é a seguinte:

O número real $\sup\limits_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$ precisa ser necessariamente menor do que r, isto é, $|f(x) - g(x)| < r, \forall x \in [a,b]$. Podemos ilustrar esse fato na Figura 2.

Figure 2: Bola aberta no espaço de funções.



Fonte: Autoral.

Definição 10. *Seja uma aplicação $f : X \to N$, o conjunto*

$$\mathcal{B}_f(X;N) = \{g : X \to N : d(g,f) \text{ está bem definida } \}$$

é definido como ***conjunto de funções que estão a uma distância finita de*** *f. Portanto, em cada $\mathcal{B}_f(X;N)$ temos um espaço métrico definido com a métrica do sup.*

Exemplo 3. *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Segue que

$$\mathcal{B}_f(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : d(g,f) \text{ está bem definida } \}$$

Note que qualquer função da forma $h(x) = x^2 + c$, onde c é uma constante real, pertence a $\mathcal{B}_f(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Após a construção do conjunto $\mathcal{B}_f(X;N)$, podemos enxergar $\mathcal{F}(X;N)$ como uma reunião de espaços métricos, uma vez que $\mathcal{F}(X;N) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{B}_f(X;N)$.
A igualdade dos conjuntos se verifica a partir da dupla inclusão. Cada função $f \in \mathcal{F}(X;N)$ tem um representante $B_f(X;N)$, portanto $\mathcal{F}(X;N) \subset \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{B}_f(X;N)$.
Por outro lado, $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{B}_f(X;N)$ é a união de conjuntos de funções que estão definidas em X com contradomínio N, então, necessariamente, $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{B}_f(X;N) \subset \mathcal{F}(X;N)$.

Definição 11. *Seja $f : X \to N$ uma aplicação. O conjunto*

$$\mathcal{C}_f(X;N) = \{g \in \mathcal{C}(X;N) : d(g,f) \text{ está bem definida } \}$$

é definido como ***o conjunto de funções contínuas que estão a uma distância finita de*** *f.*

Pela definição dos conjuntos definidos acima, podemos perceber que para cada $f : X \to N$, o conjunto $\mathcal{C}_f(X;N)$ constitui um subespaço métrico de $\mathcal{B}_f(X;N)$.

Observação 1. *Ao considerarmos $f \equiv c$, uma função constante no espaço métrico N, isto é, $f(x) = c$, $\forall x \in X$, formamos o conjunto*

$$\mathcal{B}_c(X;N) = \{g \in \mathcal{F}(X;N) : d(g,c) \text{ está bem definida } \}$$

que possui como elementos todas as funções $g \in \mathcal{F}(X;N)$, tais que $g(X)$ está contida numa bola centrada na função $f \equiv c$, mas estas são exatamente todas as funções limitadas de domínio X e contradomínio N, de onde concluímos que

$$\mathcal{B}_c(X;N) = \mathcal{B}(X;N).$$

Fazendo as mesmas ponderações, temos também a identificação: $\mathcal{C}_c(X;N) = \mathcal{C}(X;N)$.

2.3 Breves noções de Topologia

Dedicamos essa subseção para apresentar a relação entre Espaços Métricos e Topologia Geral, conceitos primordiais para o desenvolvimento do texto. Os resultados aqui descritos também podem ser encontrados nas referências [6] e [10].

2.3.1 Conjuntos Abertos

Definição 12. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ é chamado de* ***ponto interior de X*** *quando é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que se $d(x,a) < r$ então $x \in X$. Denominamos* ***interior de X em M*** *e denotamos por $intX$, o conjunto formado por todos os pontos interiores de X.*

Definição 13 (Conjunto Aberto)**.** *Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito* ***aberto em M*** *quando $intX = X$, ou seja, todos os seus pontos são interiores. Assim, se um conjunto $X \subseteq M$ é aberto em M significa que para cada $x \in X$, existe um raio $r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq X$.*

Dizemos que um ponto $b \in X$ não é interior ao subconjunto X significa então, dizer que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence à X.

Definição 14. *A* ***fronteira*** *de X em M, simbolizada por ∂X é o conjunto formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta centradas em b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar de X, $M \setminus X$.*

Proposição 2. *Seja $\mathcal{C}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M e L uma coleção de índices. Então:*

1. $M \in \mathcal{C}$ e $\emptyset \in \mathcal{C}$. (O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos);

2. Se $A_1, ...A_n \in \mathcal{C}$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{C}$. (A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto);

3. Se $A_\lambda \in \mathcal{C}$ para todo $\lambda \in L$, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{C}$. (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto).

Proof.

1. O espaço métrico M é, evidentemente, aberto em M. Este fato por si só, já exemplifica o quanto a propriedade de X ser um conjunto aberto é relativa. Argumentaremos por vacuidade. O conjunto vazio $\emptyset$ é aberto em qualquer espaço métrico que o contenha. Com efeito, para provar que um determinado conjunto X não é aberto, devemos exibir um ponto $x \in X$ que não seja interior a X. Isso é evidentemente impossível quando $X = \emptyset$. Logo, conclui-se que $\emptyset$ é aberto.

2. Seja $a \in A_1 \cap ... \cap A_n$. Como os conjuntos A_i, $1 \leq i \leq n$ são abertos, existem $r_1 > 0, ...r_n > 0$ tais que $B(a; r_1) \subset A_1, ...B(a; r_n) \subset A_n$. Seja r o menor dos números $r_1, ...r_n$. Então

$$B(a; r) \subset B(a; r_1) \subset A_1, \; \ldots \;, B(a; r) \subset B(a; r_n) \subset A_n,$$

e portanto,

$$B(a; r) \subset A_1 \cap ... \cap A_n.$$

Logo $A_1 \cap ... \cap A_n$ é aberto.

3. Seja $a \in A$. Existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, é sabido que existe uma bola $B(a; r)$ contida em A_λ, e portanto, contido em A. Logo A é aberto.

$\square$

2.3.2 Conjuntos Fechados

Definição 15. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto a é dito* ***aderente a*** *X quando $d(a, X) = 0$, isto é, existem pontos de X arbitrariamente próximos de a. Em outras palavras, a é aderente a X quando para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$.*

Analogamente podemos dizer que a é aderente a X das seguintes formas:

1. Para todo $\varepsilon > 0$, têm-se $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$;
2. Para todo aberto A que contém a, têm-se $A \cap X \neq \emptyset$.
3. Toda vizinhança de a tem pontos em comum com X

Observação 3. *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos pertencentes a fronteira de X, ∂X, também são aderentes a X.*

Definição 16 (Fecho de um conjunto)**.** *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. conjunto de pontos de M que são aderentes a X é chamado de **fecho** de um conjunto X num espaço M, denotado por $\overline{X}$.*

Exemplo 4. *Têm-se $\overline{M} = M$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, e $X \subset \overline{X}$, para todo $X \subset M$. Também, se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.*

Definição 17 (Conjunto Denso)**.** *Um subconjunto $X \subset M$ se diz **denso em** M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X. Ainda, para cada aberto $A \neq \emptyset$ em M, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$.*
Isto significa que fixados arbitrariamente um ponto $a \in M$ e um raio $r > 0$, a bola $B(a;r) \cap X \neq \emptyset$. Ou seja, sempre encontramos um ponto de X arbitrariamente próximo de a.

Definição 18 (Conjunto Fechado)**.** *Um conjunto $F \subset M$ é dito **fechado** quando o seu complementar, $M \setminus X$, é aberto em M.*

Proposição 4. *Sejam M espaço métrico e $F \subset M$. Então $\overline{F} = F$ se, e somente se, $M \setminus F$ é aberto. Ou seja, um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.*

Proof. Suponhamos que $\overline{F} = F$. Então, dado $a \in M \setminus F$, temos que a não é ponto aderente a F. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset M \setminus F$, o que prova que $M \setminus F$ é um conjunto aberto.
Reciprocamente, suponhamos que $M \setminus F$ é aberto. Seja $a \in \overline{F}$. Note que $a \notin M \setminus F$, pois caso contrário, existiria $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset M \setminus F$, o que contraria o fato de a ser ponto de aderência a F. Logo, $a \in F$ e portanto $\overline{F} \subset F$. Como a outra inclusão é trivial, tem-se que $\overline{F} = F$. □

Observação 5. *$\overline{X}$ é o menor subconjunto fechado de M que contém X, no seguinte sentido: se F é fechado e $X \subset F$, então $\overline{X} \subset F$. De fato, $X \subset F$ implica $\overline{X} \subset \overline{F}$, ou seja, $\overline{X} \subset F$.*

Definição 19. *Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ chama-se* ***ponto de acumulação de X*** *quando toda bola de centro a contém algum ponto de X,* ***diferente do ponto*** *a. Usaremos a notação X' o conjunto de pontos de acumulação de X em M. O conjunto X' chama-se* ***derivado*** *do conjunto X. Assim, $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.*

É claro que se $a \in X'$, então $a \in \overline{X}$. No entanto, enfatizamos que nem todo ponto aderente é um ponto de acumulação. Se considerarmos um conjunto formado por um único elemento, digamos $X = \{a\}$, como $a \in X$ então é aderente, mas não é de acumulação, já que não existe nenhum outro elemento diferente de a em X.

Observação 6. *A partir da definição de fecho e derivado, é possível explicitar a seguinte relação entre esses conjuntos: Se X é subconjunto de um espaço métrico M, então*

$$\overline{X} = X \cup X'$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [6].

Proposição 7 (Critérios um conjunto ser fechado)**.** *Suponha que X é um subconjunto de um espaço métrico M. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\partial(X) \subseteq X$
2. $\overline{X} = X$
3. $X' \subseteq X$

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [10].

Proposição 8. *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M usufruem das seguintes propriedades:*

1. O conjunto $\emptyset$ e o espaço inteiro M são fechados;
2. A reunião $F = F_1 \cup ... \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, ...F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M;
3. A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$ é um subconjunto fechado de M.

Proof.

1. Segue diretamente da Proposição 2.

2. Os conjuntos $A_1 = M \setminus F_1, ..., A_n = M \setminus F_n$ são abertos em M. Assim, $A_1 \cap ... \cap A_n = (M \setminus F_1) \cap ... \cap (M \setminus F_n) = M \setminus (F_1 \cup ... \cup F_n)$ é aberto, e portanto, $F_1 \cup ... \cup F_n$ é fechado em M.

3. Ponhamos $A_\lambda = M \setminus F_\lambda$, para cada $\lambda \in L$. Então, cada A_λ é aberto, e portanto, sua reunião $\cup A_\lambda = \cup(M \setminus F_\lambda) = M \setminus (\cap F_\lambda)$ é um aberto em M. Logo $\cap F_\lambda$ é fechado.

□

Proposição 9. *O diâmetro do fecho de um conjunto é igual ao diâmetro do próprio conjunto.*

Proof. Seja M um espaço métrico qualquer e $X \subset M$. Mostraremos que

$$diam(\overline{X}) = diam(X).$$

Segue diretamente da definição de diâmetro que:

$$X \subset \overline{X} \implies diam(X) \leq diam(\overline{X}) \iff diam(\overline{X}) \geq diam(X).$$

Para concluirmos a demonstração, resta provarmos que $diam(\overline{X}) \leq diam(X)$.
De fato, seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de $diam(\overline{X})$, existem $x_0, y_0 \in \overline{X}$, tal que

$$diam(\overline{X}) \leq d(x_0, y_0) + \varepsilon/3.$$

Além disso, pela definição de fecho podemos encontrar $x_1, y_1 \in X$ tais que $d(x_0, x_1) < \varepsilon/3$ e $d(y_0, y_1) < \varepsilon/3$.
Pela desigualdade triangular, segue que

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_0) \leq \varepsilon/3 + diam(X) + \varepsilon/3$$

Assim, $diam(\overline{X}) \leq diam(X) + \varepsilon$.
Pela arbitrariedade do ε, segue que $diam(\overline{X}) \leq diam(X)$. □

Proposição 10. *Sejam M, N espaços métricos e $X \subset M$. O conjunto das funções contínuas e limitadas $\mathcal{C}(X; N)$ é subconjunto fechado do espaço $\mathcal{B}(X; N)$.*

Proof. Para provar esse resultado, mostraremos que o conjunto das funções limitadas e descontínuas (complementar de $\mathcal{C}(X; N)$) é aberto em $\mathcal{B}(X; N)$.

Iniciaremos essa demonstração abordando a descontinuidade localmente. Para tanto, definimos D_a como o conjunto das funções limitadas e descontínuas no ponto $a \in X$. Seja $f : X \to N$ tal que $f \in D_a$, isto é, f é descontínua no ponto $a \in X$.
Pela negação da continuidade, existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ encontramos $x_\delta \in X$ tal que $d_M(x_\delta, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x_\delta), f(a)) \geq 3\varepsilon$.
Afirmação: Se $g \in \mathcal{B}(X; N)$ é uma aplicação tal que $d(f, g) < \varepsilon$, então $g \in D_a$.
De fato, $\forall \delta > 0$, tome $x_\delta \in B(a; \delta) \subset X$. Portanto,

$$\begin{aligned}
3\varepsilon &\leq d_N(f(x_\delta), f(a)) \\
&\leq d_N(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d_N(g(x_\delta), g(a)) + d_N(f(a), g(a)) \\
&\leq \sup_{x \in X} \{d_N(f(x), g(x))\} + d_N(g(x_\delta), g(a)) + \sup_{x \in X} \{d_N(f(x), g(x))\} \\
&= d(f, g) + d_N(g(x_\delta), g(a)) + d(f, g) \\
&< \varepsilon + d_N(g(x_\delta), g(a)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

De onde se conclui que $\varepsilon \leq d_N(g(x_\delta), g(a))$. Ou seja, $g \in B(f, \varepsilon) \subset D_a$
Seja D o conjunto das aplicações limitadas descontínuas $f : X \to N$.
Afirmação: $D = \bigcup_{a \in M} D_a$.
De fato, se $f \in \bigcup_{a \in M} D_a$, então f é descontínua em pelo menos um ponto a pertencente a M, portanto, $f \in D$.
Por outro lado, se $f \in D$, então existe Λ um conjunto de pontos $a_\lambda \in X$, no qual a função não é contínua. Para cada um desses pontos a_λ de descontinuidade, existe $\varepsilon_\lambda > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ encontramos $x_\delta \in X$ tal que

$$d_M(x_\delta, a_\lambda) < \delta \Rightarrow d_N(f(x_\delta), f(a_\lambda)) \geq \varepsilon_\lambda.$$

Portanto $f \in \bigcup_{a_\lambda \in \Lambda} D_{a_\lambda} \subset \bigcup_{a \in M} D_a$. Logo, $D = \mathcal{B}(X; N) \setminus \mathcal{C}(X; N)$ é aberto, por ser a união arbitrária de conjuntos abertos. □

Corolário 1. *O conjunto das aplicações contínuas $g : X \to N$ que distam finitamente de f, denotado por $\mathcal{C}_f(X; N)$ é fechado em $\mathcal{B}_f(X; N)$.*

Proof. Dada $f : X \to N$, denotamos o conjunto D_{f_a} como:

$$D_{f_a} = \{h : X \to N : d(h, f) \text{ está bem definida }, h \text{ é descontínua em } a\}$$

Também simbolizaremos o conjunto D_f como

$$D_f = \{h : X \to N : d(h,f) \text{ está bem definida }, h \text{ é descontínua em}\}$$

Analogamente à construção anterior, se $g \in \mathcal{B}_f(X;N)$ é uma aplicação tal que $d(f,g) < \varepsilon$, então g também pertence a D_{f_a}. Assim, $B(f;\varepsilon) \subset D_{f_a}$, e portanto, D_{f_a} é um conjunto aberto em $\mathcal{B}_f(X;N)$. Além disso, fazendo as mesmas considerações da Proposição 10, conclui-se que $D_f = \bigcup_{a \in M} D_{f_a}$ é aberto, por ser a união de abertos. □

2.4 Espaços Métricos Completos

Exibiremos alguns resultados importantes desses espaços, ambiente onde se desenvolve o Teorema de Baire.

Definição 20. *Uma sequência (x_n) definida em um espaço métrico M é chamada uma* ***sequência de Cauchy*** *quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ tem-se $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Definição 21 (Espaço Métrico Completo)**.** *Um espaço métrico M é dito* ***Espaço Completo*** *quando toda sequência de Cauchy em M é também convergente em M.*

Proposição 11. *O espaço $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual da reta*

$$d(x,y) = |x - y|\,,$$

é um espaço completo.

Proof. A demonstração desse fato pode ser encontrado nos livros clássicos de Análise Real, como [2], [5] e [12]. □

Proposição 12. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é também completo.*

Proof. Suponha $F \subset M$ fechado, e M completo.
Seja (x_n) uma sequência de Cauchy definida em F. Em particular (x_n) está definida em M, portanto, existe $L \in M$ tal que $\lim x_n = L$. Mas F é um conjunto fechado, portanto, $L \in F$, assim, toda sequência de Cauchy em F converge em F, portanto, F é completo. □

Proposição 13. *Sejam M, N espaços métricos e $X \subset M$. Se N é um espaço métrico completo, então para toda aplicação $g : X \to N$, o espaço $\mathcal{B}_g(X;N)$ é completo.*

Proof. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_g(X;N)$. Esta sequência é limitada, portanto, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$ vale

$$d_N(f_n(x), g(x)) \leq \sup_{x \in X} d_N(f_n(x), g(x)) = d(f_n, g) \leq c$$

Para qualquer que seja $x \in X$, a sequência $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em N, que é completo por hipótese, logo, para cada $x \in X$, o limite de $f_n(x)$ existe e é único.
Definimos assim, uma aplicação $f : X \to N$ que é o limite pontual da sequência (f_n). Escrevemos $\lim f_n(x) = f(x) \in N$.
Afirmação: $f_n \to f$ uniformemente em X.
De fato, como f_n é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de onde segue diretamente da definição de supremo que para todo $x \in X$ vale:

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, conclui-se que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ para todo $x \in X$, portanto a convergência de f_n para f é uniforme.
Como $d(f_n(x), g(x)) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, concluímos a partir de $n \to \infty$, que $d(f(x), g(x)) \leq c$ para todo $x \in X$. Logo, $f \in \mathcal{B}_g(X;N)$ □

Corolário 2. *Sejam M, N espaços métricos e $X \subset M$. Se N é completo, então para toda aplicação $g : X \to N$, o espaço $\mathcal{C}_g(X;N)$ é completo.*

Proof. Pela Proposição 10, o conjunto $\mathcal{C}_g(X;N)$ é um subespaço fechado em $\mathcal{B}_g(X;N)$, que por sua vez, é um espaço completo, podemos concluir a partir da Proposição 13 que o conjunto $\mathcal{C}_g(X;N)$ é completo.
Em particular, $\mathcal{C}(X;N)$ é completo. Para verificar essa firmação tome $c \in N$. Se considerarmos $g \equiv c$ uma aplicação constante, o conjunto $\mathcal{C}_c(X;N) = \mathcal{C}(X;N)$ (Observação 1), portanto, concluímos que $\mathcal{C}(X;N)$ é completo. □

2.5 Conjuntos Magros

Definição 22 (Conjuntos Magros)**.** *Seja M um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é **magro** em M quando X pode ser expresso como uma união*

enumerável, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$*, tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}, int\overline{X_n} = \emptyset$*.*
Equivalentemente, X *é magro em* M *quando* $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$*, onde cada* F_n *é fechado com interior vazio em* M*.*

A partir da definição, pode-se observar que ser magro é uma propriedade hereditária por subconjuntos.

Proposição 14. *Toda união enumerável de conjuntos magros é um conjunto magro.*

Proof. Segue do fato de que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é também enumerável. □

Exemplo 5. *Seja* (M, d) *um espaço métrico e* $X \subset M$ *aberto. A fronteira de* X*, denotada por* $\partial(X)$ *forma um subconjunto fechado com interior vazio e, portanto, magro em* M*.*

Exemplo 6. *Seja* $(\mathbb{Q}, d)$*, onde* d *é a métrica usual da reta. Se* $X \subset \mathbb{Q}$*, então* X *é um conjunto magro em* $\mathbb{Q}$*.*

3 Teorema de Baire

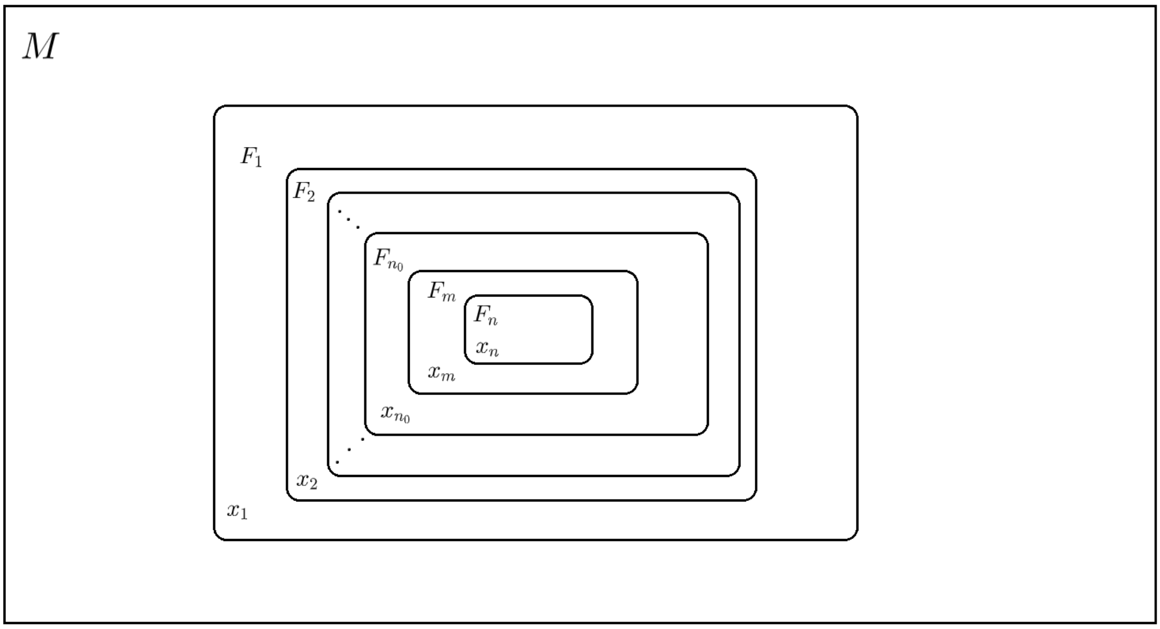
Destinamos esta parte do texto para apresentar e demonstrar detalhadamente o Teorema de Baire. Vale ressaltar que os resultados descritos nesta seção estão em conformidade com os textos clássicos de Espaços Métricos e Análise funcional, como por exemplo [3], [6] e [8].

Para demonstrarmos o Teorema de Baire, faremos uso da seguinte proposição:

Proposição 15. *Um espaço métrico* M *é completo se, e somente se, para toda sequência* $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ...$ *de subconjuntos fechados encaixados não vazios* $F_n \subset M$*, com* $\lim_{n\to\infty} diamF_n = 0$*, existe* $a \in M$ *tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$*.*

Proof. ($\Longrightarrow$): Suponhamos que M seja completo e que (F_n) seja uma sequência que satisfaz as condições descritas no enunciado.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $x_n \in F_n$. Isto define uma sequência $(x_n) \subset M$ tal que dado $n_0 \in \mathbb{N}$, para todo $m, n > n_0$ temos $x_m, x_n \in F_{n_0}$ (Figura 3).

Figure 3: Generalização do Princípio de Intervalos encaixados na reta.



Fonte: Autoral.

Como $\lim_{n\to\infty} diamF_n = 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $diamF_{n_0} < \varepsilon$. Logo, $m, n > n_0 \Rightarrow d_M(x_m, x_n) < \varepsilon$, e portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como o espaço M é completo, (x_n) é convergente, isto é, existe $a \in M$ tal que $x_n \to a$.

Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos $x_n \in F_p$, para todo $n \geq p$, donde $a = \lim_{n\to\infty} x_n \in F_p$ para todo p, o que implica que $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Agora mostraremos que a é único.

De fato, se existisse $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, com $b \neq a$ então $d_M(a, b) \leq diamF_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$

($\Longleftarrow$): Seja uma sequência (x_n) de Cauchy em M.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ considere

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\} \text{ então } X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$$

e, consequentemente $(\overline{X}_n)$ é uma sequência de subconjuntos fechados encaixados não-vazios. Além disso, temos $0 = \lim_{n\to\infty} diam\overline{X}_n = \lim_{n\to\infty} diamX_n$.

Então, por hipótese, existe $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n = \{a\}$.

Afrimação: $x_n \to a$.

De fato, fixado $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $diam X_{n_0} < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $x_{n_0+n}, a \in \overline{X}_{n_0}$

$$d(x_{n_0+n}, a) < diam X_{n_0} < \varepsilon,$$

e portanto, $x_n \to a$. □

Teorema 16 (Teorema de Baire)**.** *Seja M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em M possui interior vazio. Equivalentemente: se $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $intF = \emptyset$. Ou então: se $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ são abertos densos em M, então a interseção enumerável $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é subconjunto denso em M.*

Proof. Seja M um espaço métrico completo.
Como cada A_n é denso em M, temos que toda bola aberta em M contém algum ponto de A_n.
Dada uma bola aberta $B \subset M$, mostraremos que $B \cap A$ é não-vazio.
Por A_1 ser denso, tem-se que $B \cap A_1$ é não-vazio e aberto. Logo, existe uma bola $B_1 \subset B \cap A_1$, a qual podemos supor tão pequena que seu raio não exceda $\frac{1}{2}$ e $\overline{B_1} \subset B \cap A_1$.
Como A_2 é também aberto e denso garantimos que $B_1 \cap A_2$ é não-vazio e aberto, portanto, $B_1 \cap A_2$ contém uma bola aberta B_2 cujo raio é inferior a $\frac{1}{3}$ e $\overline{B_2} \subset B_1 \cap A_2$.
Define-se indutivamente, B_{n+1} da seguinte forma:
$B_n \cap A_{n+1}$ é (aberto) não vazio, por A_{n+1} ser denso, portanto, podemos tomar uma bola aberta $B_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1}$ com raio menor que $\dfrac{1}{(n+1)}$ e $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_{n+1}$.
Assim obtemos a sequência

$$\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \overline{B_3} ... \supset \overline{B_n} \supset ..., \text{ onde } \overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_{n+1} \text{ e } diam B_n \to 0.$$

Como M é completo, segue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \{a\}$, ou seja, $a \in B_n \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e em particular, $a \in B_1 \subset B$. Logo, $a \in B \cap A$. □

4 Uma aplicação: A existência de funções contínuas sem derivada em nenhum ponto

4.1 Função de Weierstrass

No ano de 1872, o matemático Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) publicou um trabalho, onde construiu um exemplo de uma função contínua que não era diferenciável em nenhum ponto de seu domínio [14]. A função de Weierstrass foi responsável pela quebra de um grande paradigma na comunidade matemática e abriu caminho para que outros matemáticos pudessem construir novos exemplos de funções com tais propriedades.

Em linhas gerais, ao observarmos o gráfico de uma função real f, percebemos que os pontos onde f não é derivável são aqueles em que o gráfico apresenta "bicos", já que é impossível traçar uma reta tangente nestes pontos. O processo de construir funções contínuas não deriváveis em nenhum de seus pontos pode ser resumido em criar funções cujos gráficos possuem "bicos" em todos os pontos. Esse comportamento é representado nos gráficos das iteradas da **função de Weierstrass** [13], que é definida como

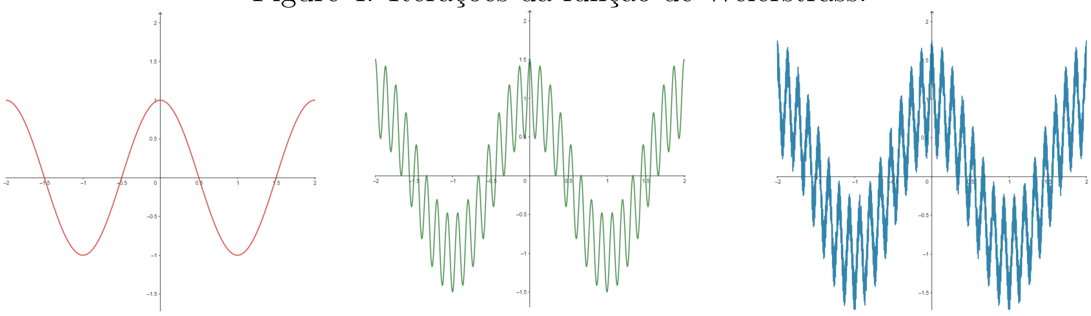
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \, cos(b^n \pi x)$$

onde $0 < a < 1$ e b é um número ímpar tal que $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$.
Tomamos como exemplo o caso particular onde $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 15$ (Figura 4).

Neste caso, temos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n cos(15^n \pi x).$$

Figure 4: Iterações da função de Weierstrass.



Índice: $n = 0$ Índice: $n = 1$ Índice: $n = 2$

Fonte: Autoral.

4.2 A surpreendente aplicação do Teorema de Baire

De maneira ainda mais surpreendente, se considerarmos um conjunto fechado e limitado da reta I, então o Teorema de Baire pode ser utilizado para mostrarmos que existem mais funções reais com domínio em I, contínuas e sem derivada em nenhum ponto do que funções reais com domínio em I, contínuas e que possuem derivada.

A demonstração que exibiremos consiste em uma generalização da construção descrita em [8], já que consideramos o domínio da função formado por qualquer conjunto compacto da reta (fechado e limitado).

Proposição 17. *Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $C = \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas e limitadas $f : I \to \mathbb{R}$, com a métrica do supremo e $\mathscr{D}$ o conjunto das funções contínuas sem derivada em ponto algum de $[a, b]$. Então, $\mathscr{D}$ é denso em $C = \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$.*

Proof. A métrica do supremo define a distância entre duas funções $f, g \in C$ como

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d_N(f(x), g(x))\}.$$

Pelo Teorema de Baire, é suficiente provar que o conjunto das funções contínuas $f : I \to \mathbb{R}$, que não possuem derivada em ponto algum de I contém uma interseção enumerável de abertos densos em C.

No que se segue, sempre que escrevermos $f(t + h)$, estaremos fazendo a suposição de que h é suficientemente pequeno, de forma que $t + h \in I$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos o conjunto

$$A_n = \left\{ f \in C : \ \forall t \in I, \ \exists h \ tal \ que \ \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \right\}.$$

Segue diretamente da definição de derivada que se $f \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f não possui derivada em ponto algum do intervalo I.

Dessa forma, basta mostrar que cada conjunto A_n é aberto e denso em C, pois sabemos que C é um espaço métrico completo, logo, pelo Teorema de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ será um conjunto denso em C, sendo $\mathscr{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

1. Afirmação: Cada A_n é aberto em C.

   De fato, seja $f \in A_n$. Para todo $t \in I$, existe h tal que

   $$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n, \text{ portanto, } |f(t+h) - f(t)| > n\,|h|.$$

   Consideremos então:

   $$\varphi(t, h) = |f(t+h) - f(t)| - n\,|h|,$$

note que $\varphi(t,h) > 0$.
Podemos obter $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in I$ existe h com $\varphi(t,h) > \varepsilon$. Caso contrário, existiria para $k \in \mathbb{N}$, algum ponto $t_k \in I$ tal que $\varphi(t_k,h) \leq \frac{1}{k}$, para qualquer que seja h.

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $t_k \to t_0 \in [a,b]$. Como φ é contínua, concluímos que para todo h, $\varphi(t_0,h) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k,h) \leq \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, o que é uma contradição, pois $\varphi(t,h) > 0$, para todo $t \in I$.
Obtido $\varepsilon > 0$, afirmamos que $g \in C$, $d(g,f) < \frac{\varepsilon}{2}$ implica que $g \in A_n$.
Com efeito, para todo $t \in I$, existe h tal que

$$\begin{aligned} n\,|h| + \varepsilon &< |f(t+h) - f(t)| \\ &\leq |f(t+h) - g(t+h)| + |g(t+h) - g(t)| + |g(t) - f(t)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + |g(t+h) - g(t)| + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= |g(t+h) - g(t)| + \varepsilon, \end{aligned}$$

e assim, $n < \dfrac{|g(t+h) - g(t)|}{|h|}$

2. Afirmação: Cada A_n é denso em C.
   Seja $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $f \in C$, mostraremos que existe $g \in A_n$ tal que $d(g,f) < \varepsilon$.
   Dados $f \in C$ e $\alpha > n$, vamos construir a função poligonal g, cujo gráfico é formado por segmentos retilíneos, onde seu coeficiente angular é, em módulo, maior ou igual do que α. Em primeiro lugar, utilizamos a continuidade uniforme da f para escolher uma partição do intervalo

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$$

   com a propriedade de que f restrita a cada $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ da partição produz imagem com variação menor ou igual a $\dfrac{\varepsilon}{4}$. Para cada $i \in [1, \ldots, m]$, elegemos um ponto $a_i \in (t_{i-1}, t_i)$ a escolher, tal que defina uma função poligonal g_1:

$$g_1(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}), & \text{se } \ x \in [t_{i-1}, a_i] \\ f(t_{i-1}) + m_i(x - a_i), & \text{se } \ x \in (a_i, t_i], \end{cases}$$

   onde $m_i = \dfrac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - a_i}$.

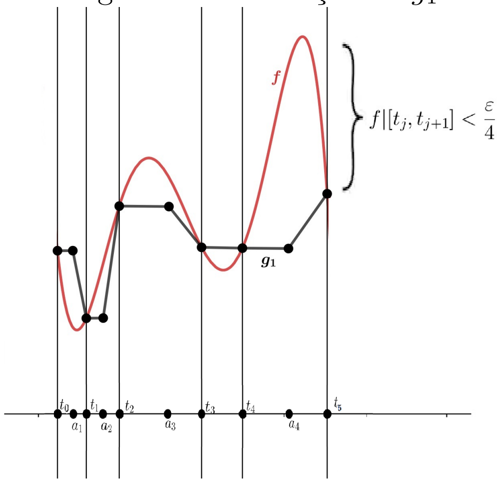
Para escolher a_i temos certa flexibilidade.

Se $f(t_i) \neq f(t_{i-1})$, escolhemos a_i suficientemente próximo de t_i, de modo que

$$t_i - a_i < \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\alpha}.$$

Então, o gráfico de g_1 será formado por segmentos horizontais (com coeficiente angular 0) e segmentos com coeficiente angular, em módulo, maior ou igual a α. (Figura 5)

Figure 5: Construção de g_1.



Fonte: Autoral.

Além disso, $d(g_1, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pois, para cada $x \in I_i$, $|g_1(x) - f(t_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ e $|f(x) - f(t_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, assim, $d(g_1, f)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

A função g que procuramos consiste em substituir cada segmento horizontal de g_1 por um gráfico de "serra" com distância até g_1 menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$ e o coeficiente angular de cada segmento da serra é maior ou igual a α. (Figura 6)

Com efeito, a função g se dá a partir de uma nova partição para cada intervalo I_i:

Seja P_i a partição que buscamos para cada I_i

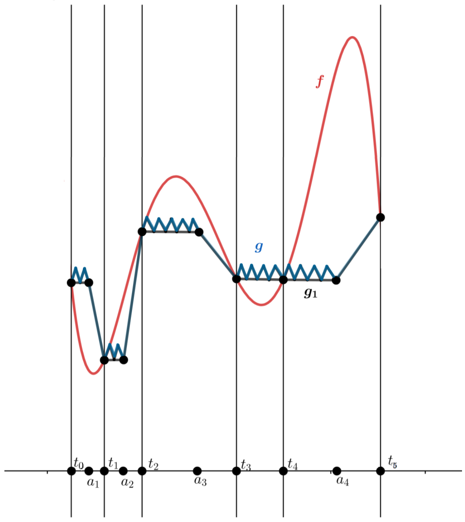
$$t_{i-1} = s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_{m_i} = t_i.$$

Consideramos

$$g(t) = \begin{cases} f(t_{i-1}), & \text{se } t = s_j,\ j \text{ ímpar} \\ f(t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}, & \text{se } t = s_j,\ j \text{ par} \\ g(s_{j-1}) + \eta(t - s_{j-1}), & \text{se } t \in (s_{j-1}, s_j) \end{cases},$$

onde $\eta = \dfrac{g(s_j) - g(s_{j-1})}{s_j - s_{j-1}}$.

Figure 6: Construção da função g.



Fonte: Autoral.

Cada par de pontos s_j e s_{j-1} é tomado de forma que estejam suficientemente próximos, de modo que

$$\frac{|g(s_j) - g(s_{j-1})|}{|s_j - s_{j-1}|} = \frac{|f(t_{i-1}) - f(t_{i-1}) + \varepsilon/4|}{|s_j - s_{j-1}|} = \frac{\dfrac{\varepsilon}{4}}{|s_j - s_{j-1}|} = \alpha > n.$$

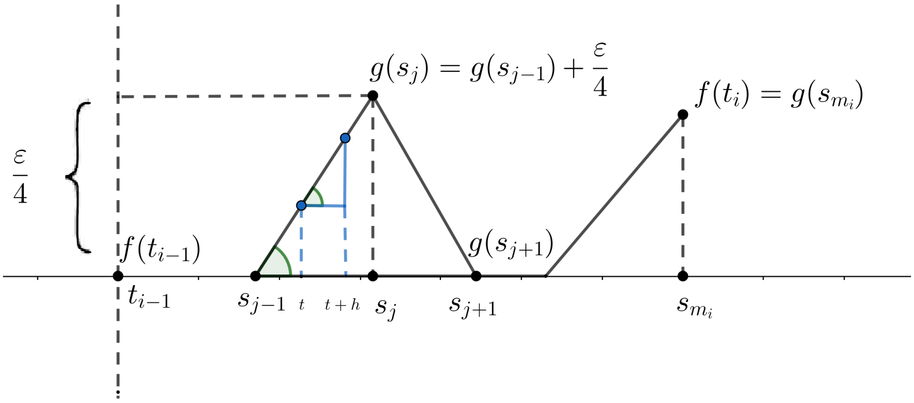
Para cada $t \in I_i$, pela definição de partição existe j tal que $t \in [s_{j-1}, s_j]$, podemos tomar h suficientemente pequeno, afim de que $(t+h)$ pertença ao intervalo $[s_{j-1}, s_j]$.

Sob estas condições,

$$\begin{aligned}\frac{|g(t+h) - g(t)|}{|h|} &= \frac{|g(s_j) - g(s_{j-1})|}{|s_j - s_{j-1}|} \\ &= \alpha > n.\end{aligned}$$

Essa estrutura das “serras” está ilustrada na Figura 7.

Figure 7: “Serras” da função



Fonte: Autoral.

Pela construção que fizemos a distância entre as funções g e g_1 é majorada por $\frac{\varepsilon}{4}$. Assim,

$$d(f,g) \leq d(f,g_1) + d(g_1,g) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

□

5 Conclusão

Neste trabalho mostramos que René-Louis Baire foi responsável por contribuir de maneira decisiva para caracterizar Espaços Métricos Completos.

A demonstração do Teorema de Baire apresentada neste artigo foi integralmente construída a partir dos conceitos de Espaços Métricos. As definições básicas apresentadas nos capítulos iniciais objetivam tornar o texto acessível e autossuficiente, com a finalidade de garantir o entendimento de alunos que estejam cursando o curso de graduação em Matemática.

Além disso, o Teorema de Baire mostrou-se determinante para a quebra de um paradigma: a ideia de que funções contínuas sem derivada em nenhum ponto são raras. A força da construção dessa prova é notória, pois é feita sem o uso de uma função específica.

O Teorema de Baire também possui aplicação em diversas outras áreas da matemática e pode ser utilizado para abordar o Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema do Gráfico Fechado e Aplicação Aberta, considerados o marco fundador da Análise Funcional e têm grande importância, uma vez que podem ser usados para comprovar a existência de solução de Equações Diferenciais, além de suas aplicações na Teoria do Controle Ótimo e Controlabilidade Exata. O leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos nessas áreas pode consultar as referências [1] [3], [7], [11].

References

[1] BACHMAN, G; NARICI, L. **Functional Analysis**, rev. ed. Mineola, NY: Dover, 2000.

[2] BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**; Ed. Campus Ltda, 1983.

[3] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.** Springer Science & Business Media, 2010.

[4] COPSON, E. T. **Metric spaces. No. 57**. CUP Archive, 1988.

[5] LIMA, E. L. **Curso de Análise, Volume 1**. 14ª edição. Rio de Janeiro: IMPA–Projeto Euclides, 2013.

[6] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 4^a Ediçao, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[7] MOURA, C. A. **Análise funcional e aplicações**. Posologia. Editora Ciência Moderna, 2002.

[8] MUNKRES, J. **Topology**. Pearson New International Edition. Pearson, 2013.

[9] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F., **René-Louis Baire.** School of Mathematics and Statistics University St Andrews, Scotland 2000. Disponível em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baire/`.

[10] O'SEARCOID, M. **Metric spaces**. Springer Science and Business Media, 2006.

[11] RIESZ, F.; NAGY, S. B. **Functional Analysis**. Vol. 3. 1955.

[12] RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. Vol. 3. New York: McGraw-hill, 1976.

[13] SALZER, H. E.; Levine, N. **Table of a Weierstrass continuous non-differentiable function**. Mathematics of Computation, v. 15, n. 74, p. 120-130, 1961.

[14] WEIERSTRASS, K. **Uber continuirliche functionen eines reellen arguments, die fur keinen worth des letzteren einen bestimmten differentailqutienten besitzen, Akademievortrag.** Math. Werke (1872): 71-74.