Cadernos do IME - Série Matemática
***e-ISSN:** 2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2020.49731
Recebido em 30 Mar. 2020 | Aceito em 11 Maio 2020

DE UMA DISCUSSÃO PARA UMA INVESTIGAÇÃO (HISTÓRICA) A PARTIR DAS AULAS DE ANÁLISE REAL

FROM A DISCUSSION TO AN (HISTORICAL) INVESTIGATION STARTING IN CLASSES OF REAL ANALYSIS

KELLY R. M. LÜBECK[a] MARCOS LÜBECK[b]
ANTONIO R. JUNIOR[c]

Resumo

Este trabalho teve como motivação inicial as discussões acerca do tema numeração provenientes da disciplina de análise real, ministrada no quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus de Foz do Iguaçu. Na ocasião, buscávamos identificar e refletir sobre as principais diferenças entre o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) e o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), e as considerações a respeito da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ nos levou ao uso da *propriedade arquimediana*. A simplicidade de seu enunciado e sua relevância na estrutura dos números reais nos conduziu a diversos episódios que extrapolaram a ementa da disciplina, aprofundando os estudos tanto nos aspectos teóricos como nos históricos. Entre eles, buscamos esclarecer a origem do nome que caracteriza tal propriedade, bem como mostrar alguns exemplos e resultados sobre corpos arquimedianos e não arquimedianos[1].

Palavras-chave: Propriedade Arquimediana, Análise Real, Investigação Histórica.

---

[a]Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, Brasil; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4787-1279. **E-mail:** kellyrobertaml@gmail.com

[b]Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, Brasil; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6787-7083. **E-mail:** marcoslubeck@gmail.com

[c]Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, Brasil; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1057-8688. **E-mail:** juniorarjrodri3@gmail.com

[1]Uma versão preliminar deste artigo foi publicada no IV Congresso de Tecnologias, Engenharias e Ciências Exatas - IV CONTECE, UNIOESTE, Foz do Iguaçu, Outubro 2019 (apresentado como comunicação oral).

Abstract

This work was initially motivated by discussions on the theme of numbering in the real analysis discipline, given in the fourth year of the mathematics course at the State University of Western Paraná, Foz do Iguaçu. At the occasion, we sought to identify and reflect on the main differences between the set of rational numbers ($\mathbb{Q}$) and the set of real numbers ($\mathbb{R}$), and considerations about the density of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ led us to use the Archimedean property. The simplicity of its statement and its relevance in the structure of the real numbers led us to several episodes that went beyond the course program, deepening the studies in both theoretical and historical aspects. Among them, we seek to clarify the origin of the name that characterizes such property, as well as showing some examples and results about Archimedean and non-Archimedean fields.

Keywords: Archimedean Property, Real Analysis, Historical Research.

MSC2020: 03F60, 01A05.

1 Introdução

Quando discutimos temas ligados à numeração, alguns fatos nos parecem curiosos e até mesmo contraditórios à primeira vista, como exemplo a afirmação de que o todo nem sempre é maior que sua parte, contrariando o clássico enunciado do livro de Euclides [6, p. 99], em sua Noção Comum, que expõe no oitavo item que "e o todo [é] maior do que a parte". De fato, Georg Cantor (1845 - 1918) com sua teoria sobre conjuntos enumeráveis e transfinitos mostrou que o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais, entre outros, são enumeráveis e, portanto, possuem a mesma cardinalidade, estão em correspondência biunívoca. Entretanto, por conta da distribuição dos números racionais na reta real, a nossa percepção, muitas vezes, nos conduz a ilusão de que os racionais possuem "mais números" que os naturais. Sendo assim, como então interpretar estas diferenças?

Ao abordarmos tais questões na disciplina de análise real, do 4^o ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus de Foz do Iguaçu, questionamentos sobre estes temas foram surgindo e fez-se necessário revisitar a estrutura dos diversos conjuntos numéricos. Em especial, aqui vamos enfatizar a propriedade arquimediana e discutir algumas de suas implicações para corpos ordenados, bem como curiosidades sobre estes assuntos. Esta propriedade está na base da demonstração de que os racionais são densos no conjunto dos reais. Observemos que, como foi mencionado, os racionais e os naturais estão em correspondência biunívoca e, portanto, cabe a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ possibilitar a existência dos pontos de acumulação (racionais e irracionais) que, por sua vez, dão origem ao completamento dos números reais, donde a importância do estudo detalhado de tal tema.

Ademais, a curiosidade sobre a denominação de tal propriedade fez com que buscássemos em outras obras mais detalhes sobre este assunto, e logo trazemos algumas informações contidas nos livros de história da matemática. Também, discorremos sobre livros da obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* ([11], [12], [13]), de Felix Klein (1849 - 1925), matemático prodigioso que contribuiu em inúmeros ramos da matemática e se preocupou de forma especial com as questões didáticas, tanto a nível médio quanto superior, introduzindo importantes obras de análise matemática. Investigamos a obra *Cálculo Diferencial e Integral I* [4], de Richard Courant, por se tratar de um livro que serviu de referencial para muitos estudantes de cálculo e porque Courant se preocupava com a disseminação do conhecimento matemático, vindo a publicar à obra "O que é a matemática?", em parceria com Herbert Hobbins. Assim, acreditamos que o autor mantinha certa preocupação com o esclarecimento dos conceitos por ele abordado, vindo talvez a contextualizar à origem de tal propriedade e, por fim, abordamos o trabalho *Fundamentos da Geometria* [9], de David Hilbert (1862 - 1943), uma vez que ele versa sobre este tema de um ponto de vista geométrico. Tais considerações serão tratadas neste texto. As definições abaixo apresentadas podem ser encontradas em [1], [8] e [14].

2 Definições, Exemplos e a Propriedade Arquimediana

Na investigação histórica/matemática, geralmente, atribui-se o descobrimento dos irracionais ao pitagórico Hipaso de Metaponto (c. 470 a.E.C.). Contudo, não se sabe exatamente em que contexto matemático tais números foram descobertos [7, p. 107]. Os pitagóricos descobriram a existência dos números irracionais (segmentos não comensuráveis com uma unidade pré-fixada), de onde percebeu-se a necessidade de outros valores além dos racionais para se estabelecer o que hoje em nomenclatura moderna chamamos do completamento da reta real, ou seja, é necessário a união do conjunto dos racionais e dos irracionais para determinarmos que os reais são um corpo ordenado completo. Mas ambos os racionais e os reais possuem a estrutura de corpo[2] e ambos são ordenados. Falar da ordenação de um conjunto meramente é estabelecer subconjuntos que identificamos como positivo e negativo. Como a propriedade arquimediana está associada a corpos *ordenados*, abaixo informamos a especificação precisa deste termo.

Definição: Um *corpo ordenado* é um corpo K, no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elmentos *positivos* de K, tal que as condições são satisfeitas:

P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x.y \in P$.

P2. Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Se denominarmos $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos que $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos pela propriedade P2, que também é conhecida como propriedade da tricotomia. Os elementos de $-P$ chamam-se *negativos.*

Observemos que, para corpos ordenados, o elemento -1 não pode ser o quadrado de nenhum outro valor, ou seja, não existe elemento $a \in k$ tal que $a^2 = -1$. De fato, como coloca [14, p. 65], para um corpo ordenado, da propriedade P2, todo elemento ao quadrado é positivo, pois se considerarmos a um elemento não nulo, temos que, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a.a \in P$. No segundo caso $a^2 = (-a).(-a) \in P$, pois $-a \in P$. Assim, num corpo ordenado $1 = 1^2$ é sempre positivo, de onde temos que -1 é negativo. Em particular, num corpo ordenado, -1 não pode ser o quadrado de nenhum elemento.

Com isto, vemos que o conjunto dos números complexos não pode ser ordenado, pois $-1 = i^2$. Eis aqui um exemplo de corpo não ordenado.

Exemplo: Como é de se esperar, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é ordenado. Para tanto, basta tomarmos o conjunto positivo P pelos números racionais p/q tais que $p.q \in \mathbb{N}$. Isto significa que os inteiros p e q têm “o mesmo sinal”. Com esta definição, $\mathbb{Q}$ é ordenado.

De fato, sejam $p/q, r/s \in P$. Logo, $p.q > 0$ e $r.s > 0$, de onde segue que $p/q +$

[2] Um conjunto K munido com duas operações, tradicionalmente denominadas soma e produto, que satisfazem as propriedades associativa, comutativa, existência de elemento neutro e simétricos para soma e produto, além da distributividade da multiplicação em relação a soma, é dito um corpo. Maiores detalhes em [5].

$r/s = (pr + qs)/qr \in P$, já que $(pr + qs) \cdot (qr) = pq(r)^2 + rs(q)^2 > 0$. Fechado em relação a adição.

Para o produto temos $\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$, como $(pr) \cdot (qs) = (pq) \cdot (rs) > 0$, então $\frac{p}{q}.\frac{r}{s} \in P$. Fechado em relação a multiplicação.

Agora, seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $q \neq 0$, se $\frac{p}{q} \neq 0$ então temos as possibilidades $p.q \in \mathbb{N}$ ou $p.q \notin \mathbb{N}$, de onde segue o resultado.

OBS.: Todo corpo ordenado induz uma ordem em seus elementos por meio da relação:

$$x - y \in P \Leftrightarrow x > y.$$

Na sequência apresentamos a definição da propriedade arquimediana e alguns resultados relacionados a ela.

Definição: Dizemos que um corpo ordenado K satisfaz a *propriedade arquimediana* se dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.

Observemos que K se refere a qualquer corpo ordenado e que, neste caso, $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}_K$) representa sua cópia isomorfa em K, a saber: $1 = 1_K$, $2 = 1_K + 1_K$, $3 = 1_k + 1_k + 1_k$, etc.

Pensando a respeito dos reais a propriedade nos parece óbvia, já que para quaisquer dois números reais a enésima soma de um dos termos acaba por representar um segmento maior do que o outro. Entretanto, também nos parece óbvio que os naturais sempre são ilimitados superiormente, mas isto pode não acontecer a depender do corpo K que estamos trabalhando e de como é estabelecido sua ordenação.

No corpo dos racionais, os naturais $\mathbb{N}$ são ilimitados superiormente. De fato, para qualquer $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos que $|p| + 1 > p \geq \frac{p}{q}$ e $|p| + 1 \in \mathbb{N}$, logo nenhum número racional limita $\mathbb{N}$.

Vejamos abaixo um exemplo de corpo ordenado onde $\mathbb{N}$ é limitado.

Exemplo: Tomando o corpo das frações em $\mathbb{R}$ com a soma e o produto usual, $\mathbb{R}(t) = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \mid p, q \in \mathbb{R}(t), q \not\equiv 0 \right\}$, é possível definirmos uma ordem neste conjunto estabelecendo que $\frac{p}{q} \in P$ se o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $p \cdot q$ for positivo. Logo, denotaremos $\frac{p}{q} > 0$.

Abaixo mostraremos que $\mathbb{R}(t)$ é um conjunto ordenado. Para tanto, considere os seguintes polinômios:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0.\\
q(t) &= b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0.\\
r(t) &= c_r t^r + c_{r-1}t^{r-1} + ... + c_0.\\
s(t) &= d_s t^s + d_{s-1}t^{s-1} + ... + d_0.
\end{aligned}
$$

P1) Sejam $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s} \in P$. Sua soma é dada por,

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} + \frac{r}{s} &= \frac{ps + qr}{qs}\\
&= \frac{(a_n t^n + ... + a_0)(d_s t^s + ... + d_0) + (b_m t^m + ... + b_0)(c_r t^r + ... + c_0)}{(b_m t^m + ... + b_0)(d_s t^s + ... + d_0)}\\
&= \frac{a_n d_s t^{n+s} + b_m c_r t^{m+r} + \cdots}{b_m d_s t^{m+s} + \cdots}
\end{aligned}
$$

Analisando o produto dos termos de mais alto grau do numerador com o denominador (que foram expostos acima) obtemos:

$(a_n d_s)(b_m d_s)t^{(n+s)+(m+s)} + (b_m c_r)(b_m d_s)t^{(m+r)(m+s)} =$

$$= (a_n b_m)(d_s)^2 t^{n+m+2s} + (b_m)^2(c_r d_s)t^{2m+r+s} > 0,$$

donde a soma é positiva, independentemente do termo de maior valor ser $n+m+2s$ ou $2m + r + s$.

E a multiplicação é dada por

$$\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} = \frac{(a_n t^n + ... + a_0)(c_r t^r + ... + c_0)}{(b_m t^m + ... + b_0)(d_s t^s + ... + d_0)} = \frac{(a_n.c_r)t^{n+r} + ...}{(b_m.d_s)t^{m+s} + ...} \in P,$$

pois $a_n c_r.b_m d_s = (a_n b_m).(c_r d_s) > 0$.

P2) (Propriedade da tricotomia)

Seja $\frac{p(t)}{q(t)} \in \mathbb{R}(t)$. Se $\frac{p}{q} \equiv 0$ está ok! Se $\frac{p}{q} \not\equiv 0$, daí $a_n b_m > 0$ ou $a_n b_m < 0$ (da tricotomia de $\mathbb{R}$). Isto implica que ou $\frac{p}{q} \in P$ ou $-\frac{p}{q} \in P$.

Portanto, $\mathbb{R}(t)$ é um conjunto ordenado.

Mostraremos, agora, que com esta ordem o conjunto $\widetilde{\mathbb{N}}$ é limitado, onde $\widetilde{\mathbb{N}}$ é o conjunto dos polinômios das constantes naturais, ou seja, é formado por elementos do tipo $r_n(t) = n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $r_n(t) = \frac{n}{1} \in \mathbb{R}(t)$.

Para todo $r_n \in \widetilde{\mathbb{N}}$, ou equivalentemente para todo $n \in \mathbb{N}$, e para o polinômio $p(t) = t$, temos que $p(t) - r_n(t) \in P$, pois $p(t) - r_n(t) = \frac{1.t-n}{1}$, e como o coeficiente de maior grau do polinômio gerado pelo produto de seu numerador pelo denominador é $1.1 > 0$, segue que $t - n \in P$ e, portanto, $t > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, $p(t)$ limita superiormente todos os polinômios constantes em $\widetilde{\mathbb{N}}$. Em outras palavras, todas as constantes naturais são limitadas superiormente no corpo ordenado $\mathbb{R}(t)$.

Como $\widetilde{\mathbb{N}}$ está em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$, e é um isomorfismo, temos que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Percebemos, com isto, que a depender da ordem e do corpo, o conjunto $\mathbb{N}_k$ possui limitação, contrariando a ideia de naturais infinitos e ilimitados.

Para finalizar esta seção apresentamos algumas informações sobre densidade.

Definição: Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é *denso* em $\mathbb{R}$ se para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, existe $x \in A$ tal que $a < x < b$.

OBS.: O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Esta demonstração se baseia no fato de que dados dois números reais satisfazendo $a < b$ é possível comparar sua diferença com o valor 1 pela propriedade arquimediana dos números reais, ou seja, existe um número natural n de modo que $n(b - a) > 1$. Com isto, vê-se que o intervalo cujos extremos são os pontos na e nb possui comprimento maior do que 1. Logo, existe um inteiro m que satisfaz a desigualdade $na < m < nb$. Isto mostra que $a < \frac{m}{n} < b$ e o número racional procurado é $\frac{m}{n}$. Uma demonstração precisa deste fato pode ser obtida em [14, p. 84].

3 Alguns Resultados

Quando consideramos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ formado pelos irracionais união com os racionais, com as operações usuais, é possível, mas nada trivial, mostrar que ele forma um corpo ordenado completo, no sentido de que ao estabelecermos uma correspondência com a reta/eixo real este é "completo", "sem burracos". Neste sentido, Cifuentes relaciona estes conceitos colocando que:

> Hoje, no estudo da análise matemática, identifica-se a "reta euclidiana", que é um objeto geométrico, com a "reta real", que é um objeto algébrico, pois nessa área do conhecimento matemático começa-se com o estudo do corpo ordenado dos números reais. A ordem envolvida estrutura linearmente esse sistema de números, estabelecendo-o geometricamente como uma reta. Para tal identificação, supõe-se a reta euclidiana constituída de pontos (entidades inextensas) e associa-se a cada número real um único ponto da reta de modo que essa associação é demonstrada ser completa, no sentido do que é biunívoca,

> isto é, de que a cada ponto da reta também lhe corresponde um único número real, sendo uma consequência dessa associação a crença de que todo segmento de reta é mensurável por um número real positivo. Dizemos, nesse caso, que a reta euclidiana tem a estrutura dos números reais. [3, p. 648].

Como é plausível construir um corpo ordenado completo e, ainda, pelo fato de dois corpos ordenados completos serem sempre isomorfos, logo é costume postular a sua existência e denominá-lo de conjuntos dos números reais. Enfatizamos aqui o fato de que a completude dos reais está associada aos irracionais, já que $\mathbb{Q}$ também é um corpo ordenado, mas não completo. A definição precisa deste termo e outros resultados relacionados a ele serão apresentados posteriormente. Além disso, exibiremos abaixo a relação existente entre a propriedade arquimediana e a não limitação dos naturais.

Teorema 1: Num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;
(ii) dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.a > b$;
(iii) dado qualquer $a > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.
Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Dados $a, b \in K$ com $a > 0$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a} \Rightarrow a \cdot n > b$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $a > 0$ em K, para $b = 1$, temos que $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < a$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Para qualquer $b > 0, b \in K$, segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b} \Rightarrow n > b$. Com isto, vemos que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em K. O resultado é imediato se $b < 0$. Assim, $\mathbb{N}$ é ilimitado em K.

OBS.: Note que a propriedade arquimediana poderia ser substituída por qualquer um dos equivalentes acima. Além disso, como mencionamos anteriormente, $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{Q}$, logo $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado arquimediano. Isto também mostra que podemos ter corpos ordenados arquimedianos que não são completos, conforme verificaremos na sequência.

Definição: Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$. Diz-se que $\alpha \in K$ é uma *cota superior* do conjunto A se $x \leq \alpha$, para todo $x \in A$.

Definição: Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado K é *limitado superiormente* se ele possuir uma cota superior.

Definição: Seja A um subconjunto de um corpo ordenado K. Diz-se que $\alpha \in K$ é o *supremo* (quando existir) do conjunto A se ele for a menor de suas cotas superiores. Nesse caso, usa-se a notação $\alpha = \sup A$.

De forma análoga poderíamos obter definições equivalentes para cota inferior, conjunto limitado inferiormente e ínfimo ($\alpha = \inf A$).

Definição: Um corpo ordenado K chama-se *completo* quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.

Contra-exemplo: $\mathbb{Q}$ não é completo, pois o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ satisfaz $\sup X = \sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ não pertence a $\mathbb{Q}$. Maiores detalhes em [14].

É fácil ver que, num corpo ordenado completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset K$, possui um ínfimo. Basta considerar $X = -Y$, isto é, $X = \{-y; y \in Y\}$. Então X é não-vazio e limitado superiormente, pois como Y é limitado inferiormente $\exists\ k \in \mathbb{R} \mid k < y, \forall y \in Y$, donde $-k$ limita superiormente X. Logo, da definição de completeza, existe $a = \sup X$. Mostraremos que o elemento $-a$ será o $\inf Y$.

De fato, como $a = \sup X$, então $-y \leq a, \forall y \in Y$. Logo, $-a \leq y, \forall y \in Y$, de onde temos que $-a$ é cota inferior de Y. Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$, da definição de supremo de X, segue que $\exists\ x_0 = -y_0 \mid a - \epsilon \leq -y_0 \leq a \Rightarrow -a + \epsilon \geq y_0 \geq -a \Rightarrow -a \leq y_0 \leq -a + \epsilon$, ou seja, $-a$ é a maior das cotas inferiores de Y. Com isto concluímos que $-a = \inf Y$.

Teorema 2: Considere um corpo ordenado K que não seja arquimediano. Então o conjunto dos naturais não admite supremo em K.

Demonstração:

Começamos relembrando que $\mathbb{N}$ é um conjunto limitado superiormente em K, pois K é não arquimediano, logo é possível falar em cotas superiores e supremo de $\mathbb{N}$ em K.

Se $b \in K$ é um cota superior de $\mathbb{N}$ então $n + 1 \leqslant b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $n \leqslant b - 1$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $b \in K$ for uma cota superior de $\mathbb{N}$, $b - 1$ também será. Portanto, $\mathbb{N}$ não admite supremo, ou seja, num corpo não-arquimediano K, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado superiormente, mas não existe $\sup \mathbb{N}$ em K.

Resgatando o exemplo anterior observamos que $\mathbb{R}(t)$ é um corpo ordenado não arquimediano, pois $\mathbb{N}$ é limitado em $\mathbb{R}(t)$. Vimos, ainda, que para qualquer $n+1 \in \mathbb{N}$ tínhamos que $t > n+1 \Rightarrow t-1 > n$. De fato, como $t > n+1 \Rightarrow t-(n+1) \in P \Rightarrow (t-1)-n \in P \Rightarrow t-1 > n$. A título de ilustração, como num corpo ordenado todos os elementos são comparáveis, poderíamos nos questionar qual a ordem entre os elementos $p(t) = t = \frac{t}{1}$ e $q(t) = t-1 = \frac{t-1}{1}$. Como $p(t) - q(t) = 1 = \frac{1}{1} \in P$, temos que $p(t) > q(t)$.

A seguir, apresentamos a relação existente entre a propriedade arquimediana e a completude de corpos ordenados.

Teorema 3: Todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Demonstração:

De fato, se tivéssemos um corpo completo mas não arquimediano, logo $\mathbb{N}$ seria limitado e, pela definição de completeza, K teria que possuir o supremo de $\mathbb{N}$, mas isto não acontece pelo teorema 2.

Portanto, como os reais são um corpo ordenado completo, segue que os naturais são ilimitados em $\mathbb{R}$, como nos parece óbvio!

4 A Propriedade Arquimediana é de Arquimedes?

Retomando as discussões em sala de aula, os alunos indagaram sobre a origem da propriedade arquimediana. De fato, motivados pelo nome desta caracterização, ficou-nos a dúvida se foi realmente Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a.E.C.) quem elaborou esta propriedade ou se o seu nome foi usado como forma de homenagear tão prodigioso matemático. A busca em livros de história da matemática nos mostrou que muito se fala de Arquimedes, mas poucos abordam a referida propriedade.

Eves [7, p. 423] cita vários trabalhos desenvolvidos por Arquimedes, enfatizando o tratado sobre o "Método"(ou Método da Alavanca), um pergaminho que continha a descrição da técnica utilizada por Arquimedes para deduzir alguns de seus resultados. "O *Método*, foi a maneira como Arquimedes descobriu a fórmula do volume da esfera. Sua consciência matemática, porém, não se sastisfazia com esse procedimento, daí porque ele recoria ao método da exaustão para fornecer uma demostração mais rigorosa".

Struik [16, p. 93] traz considerações muito interessantes sobre o trabalho de Arquimedes (287-212 a.E.C.), considerando-o o maior matemático do período helenístico e de toda a antiguidade. Informa que "as mais importantes contribuições de Arquimedes na matemática foram feitas no domínio daquilo a que agora chamamos "cálculo integral" - teoremas sobre áreas de figuras planas e sobre volumes de corpos sólidos". Noticia, também, que Arquimedes estabeleceu um método correto para calcular aproximadamente o valor de π, calculou o volume da esfera, quadrou o círculo e a parábola, trabalhou com conceitos mecânicos (espiral de arquimedes), com hidrostática, entre vários outros assuntos.

Especificamente, em relação a propriedade arquimediana, retoma considerações de Eudoxo sobre sua teoria das proporções pensada como um subterfúgio para solucionar a crise gerada pelos incomensuráveis.

> É característica a definição 5 do livro V dos *Elementos*, de Euclides:
> Diz-se que [quatro] grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e tomando quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos excedem, são iguais ou são menores que os últimos equimúltiplos tomados na ordem correspondente.
> Isso significa, na nossa notação, que $a : b$ se $ma > nb$ implica $mc > nd, ma = nb$ implica $mc = nd$ e $ma < nb$ implica $mc < nd$, sendo m e n inteiros. Para uma tal definição tinha de ser estabelecido primeiro o chamado "axioma de arquimedes", que nos Elementos, de Euclides, precede a definição anterior como a definição 4:
> Diz-se que [duas] grandezas têm uma razão de uma para outra se cada uma puder, quando multiplicada, exceder a outra. [16, p. 84].

Struik conclui suas observações informando que tal axioma é devido a Eudoxo e que a teoria atual dos números irracionais de Dedekind (1831 - 1916) e Weierstrass (1815 - 1897) se espelham na teoria de Eudoxo.

Coloca, ainda, que para auxiliar nas demonstrações dos resultados em que aplicava o método da exaustão Arquimedes formulou um axioma equivalente ao axioma de Arquimedes (ou de Eudoxo) como segue:

> De duas grandezas desiguais, a maior excede a menor por uma grandeza tal que a operação de adição com ela própria pode ser feita de modo a exceder qualquer grandeza dada entre as que são comparáveis com ela e com aquela. Aqui, a operação de 'adição a si própria' pode ser repetida um número de vezes quaisquer. [16, p. 86].

Isto mostra que Arquimedes utilizava este resultado em seus trabalhos, entretanto Struik reforça que sua origem se deve a Eudoxo.

Katz [10] apresenta de forma detalhada a biografia e obra de Arquimedes com várias descrições das demonstrações dos resultados. Entretanto, não faz referêcia a propriedade arquimediana.

Roque [15, p. 193], em relação a esta temática, indica que "o uso de processos que tendem ao infinito será efetuado por Arquimedes, usando sequências de aproximações", mas alerta que coube a Eudoxo à elaboração da teoria das proporções, que busca enunciar teoremas gerais para grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Na sequência ela expõe algumas definições do livro V dos Elementos, as quais reproduzimos abaixo.

> 3. Uma razão é a relação de certo tipo concernete ao tamanho de duas magnitudes de meso gênero.
> 4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.
> 5. Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quardta, quando os mesmos múltiplos da priemria e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, sendo sido tomados correspondentes.
> 6. E as magnitudes tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção. [6, p. 205].

Dando continuidade, Roque realiza alguns comentários sobre as definições, mencionando que

> A definição 4 fornece um critério operatório para determinar se duas grandezas possuem uma razão: para que duas grandezas a e b possuam uma razão entre elas, é preciso que haja ao menos um par de inteiros, m e n, tal que $ma > b$ e $nb > a$. [...] Tal situação só ocorre quando elas são homogêneas, ou seja, de mesmo tipo. [15, p. 194].

Vemos, com isso, que esta caracterização não se aplica a todo um sistema (numérico), mas somente as grandezas homogêneas, mesmas magnitudes, não podendo, com isso, resultar no equivalente moderno da propriedade arquimediana. Porém, o âmago da questão estava posto. Bastava avançarmos deste panorama arraigado na geometria para um despertar numérico mais abrangente.

Em outro momento, a autora, se referindo ao método da exaustão, coloca que "essa nomenclatura, no entanto, não é a mais adequada, uma vez que o método se baseia justamente no fato de que o infinito não pode ser usado a exaustão, isto é, não permite ser exaurido - pois por mais que nos aproximemos, nunca chegamos até ele" [15, p. 204]. Com isso, ela procura enaltecer a preocupação dos gregos com as questões do infinito e salienta que Arquimedes, mesmo obtendo seus resultados através do método da alavanca, utilizava o método da exaustão para validar suas proposições.

Neste ponto, ao replicar a prova de Arquimedes da *medida do círculo* [15, p. 205][3], menciona que ele utiliza para demonstrar tal fato o princípio fundamental conhecido como "lema de Euclides", enunciado na proposição 1 do livro X dos Elementos [6, p. 354], a saber, "sendo dadas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta".

Roque incorpora a esta proposição uma nota de rodapé que diz "Seu conteúdo também pode ser comparado ao "axioma de Arquimedes", que trata de grandezas contínuas" [15, p. 204]. De certo modo, a proposição coloca que fixando magnitudes de mesma natureza, é possível determinar uma magnitude que seja menor do que outra magnitude dada. Isto é um equivalente da propriedade arquimediana como expresso no teorema 1 descrito neste artigo. Logo, Roque opta por este equivalente ao invés da definição 4 indicada por Struik.

Ainda, revisitando novamente a obra de Euclides, identificamos na proposição 1 do livro X dos Elementos a propriedade arquimediana embutida em sua demonstração. Parte da prova desta proposição 1 é apresentada por Euclides como

> [Demonstração:] Sejam as duas magnitudes AB, C desiguais, das quais a AB é maior; digo que, caso da AB seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, será deixada alguma magnitude que será menor do que a magnitude C. Pois, *a C, sendo multiplicada, será, alguma vez, maior do que a AB*. Fique multiplicada e seja [...], [6, p. 354], grifo nosso.

Observemos que Euclides assume a propriedade arquimediana ao permitir que a magnitude C ao ser multiplicada por um valor adequado seja maior do que a magnitude AB. Entretanto, esta propriedade não aparece de forma explícita em seu livro, mas diluída na definição 4 do livro V, "magnitudes são ditas ter uma *razão* entre si, quando multiplicadas podem exceder uma à outra"[6, p. 205], grifo nosso.

[3] "A área do círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo".

A de se observar que ela não assume um carater de aplicação geral, mas restrito a determinadas classes de magnitudes.

Aqui é interessante notar que a "razão" mencionada por Euclides se refere a caracterização de duas grandezas (magnitudes) ao invés de um quociente, como o significado moderno da palavra pode indicar. De fato, as definições anteriores 2 e 3 auxiliam a esclarecer à questão, relembrando que " 2. E a maior [magnitude] é um múltiplo da menor, quando seja medida exatamente pela menor. 3. Uma razão é a relação de certo tipo concernete ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero" [6, p. 205]. Veja que Euclides utiliza a palavra *múltiplo* para mencionar uma proporção exata/inteira de duas grandezas e utiliza a palavra *razão* para descrever a definição 4 que corresponde a 'propriedade arquimediana'.

Ainda nos livros de história, nas seções destinadas a análise matemática e questões de numeração, não encontramos referências diretas sobre a referida propriedade, nem em que momento ela ficou conhecida com este nome e, nos livros do Ávila [1], Figueiredo [8] e Lima [14] não encontramos nenhuma indicação confirmando a autoria da propriedade arquimediana como sendo de Eudoxo. Os livros só fazem referência ao enunciado do problema e sua utilização nos resultados já discutidos acima. Dessa forma, decidimos ampliar nossa investigação em obras menos recentes de análise, na esperança de encontrarmos mais informações.

Quando investigávamos os livros de Felix Klein ([11], [12], [13]), sobre Aritmética, Análise e Geometria, encontramos considerações interessantes a respeito deste tema. No livro sobre Aritmética ele trata de várias questões sobre numeração, da existência dos irracionais à densidade dos racionais (em $\mathbb{R}$), números complexos e transcendência. Em seu livro *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Análise* [12, p. 104], apresenta a definição da propriedade arquimediana, "Dados dois númeors positivos e e a é sempre possível encontrar um número inteiro finito n tal que $ne > a$, por muito pequeno que seja e e por muito grande que possa ser a".

Klein informa que

> Arquimedes apresentou-o como uma afirmação que não se pode provar, ou que, como é fundamental, não precisa ser provada, relativa aos números que usou. [...] O nome *axioma arquimediano*, contudo, como a maior parte das designações pessoais, é historicamente inexacto. Euclides deu destaque a este axioma mais de um século antes de Arquimedes e diz-se que também não foi inventado por Euclides mas, como tantos dos seus teoremas, é devido a Eudoxo de Knidos. [11, p. 105].

Já em seu livro de *Geometria* [13, p. 105], ele exauta a exposição de Euclides, devida provavelmente a Eudoxo, colocando que "gostaria também de chamar a atenção para uma das suas sutilezas mais brilhantes", referindo-se a propriedade arquimediana. Complementa informando que "este axioma arquimediano é um dos postulados de continuidade mais importantes da investigação moderna dos fundamentos da geometria e também dos fundamentos da aritmética".

Outro livro que trouxe algumas considerações distintas foi o de Richard Courant [4]. Esta obra, que teve sua primeira edição em 1934, foi reeditada inúmeras vezes e representa, por assim dizer, um referencial clássico para a disciplina de análise real. Em sua tradução de 1951, ele coloca o fato dos números racionais serem densos em $\mathbb{R}$, ou seja, que qualquer intervalo da reta sempre contém números racionais, justificando tal consequência sem falar da propriedade arquimediana, apelando fortemente para intuição, subdividindo o eixo dos números em intervalos com extremos do tipo $\frac{1}{2^n}$, $\frac{2}{2^n}$, $\frac{3}{2^n}$, $\ldots$, e tomando n suficientemente pequeno de forma que $\frac{1}{2^n}$ seja menor que o comprimento do intervalo dado e, assim, garante-se que pelo menos um dos pontos $\frac{m}{2^n}$ esteja nele. Courant informa que: "A representação geométrica dos números racionais por meio de pontos sobre o eixo dos números, sugere uma importante propriedade que, em geral, é enunciada da seguinte forma: o conjunto dos números racionais é denso"[4, p. 6].

Percebemos, entretanto, a falta de detalhamento em relação a tão importante resultado e a forma intuitiva que Courant utiliza para justificar a densidade dos racionais em $\mathbb{R}$.

Mencionamos, agora, a obra de David Hilbert, *Fundamentos da Geometria* [9], importante texto matemático que ajudou a estabelecer bases para os fundamentos que hoje são trabalhados nos cursos de geometria euclidiana. Nele, Hilbert expõe o equivalente geométrico da propriedade arquimediana como um dos Axiomas da Continuidade, a saber

> V1 (Axioma da medida ou axioma de Arquimedes) Se AB e CD são dois segmentos quaisquer, então há na recta AB um número finito de pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tais que os segmentos $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ são congruentes com o segmento CD e B está entre A e A_n. [9, p. 28].

Notemos, porém, que como mencionado anteriormente, um corpo ordenado e arquimediano pode não ser completo, como se vê no caso de $\mathbb{Q}$. Logo, o autor estabelece o segundo, e último, axioma da continuidade

> V2 (Axioma linear da completabilidade) Os pontos de uma recta constituem um sistema, com as suas relações de ordem e congruência, que já não pode ser

ampliado, se se quer manter as relações entre os elementos originais bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que resultam dos axiomas I-III e VI. [9, p. 28]

É interessante observar no trabalho de Hilbert o importante papel que ele confere a propriedade arquimediana, aqui postulada como axioma arquimediano. Ele toma o cuidado de estabelecer a geometria baseada em cinco grupos de axiomas: *de incidência, de ordem, de congruência, das paralelas e da continuidade.* Se refletirmos especificamente sobre os axiomas da continuidade (V1 e V2), como usualmente identificamos o conjunto dos números reais com o eixo real (reta real), há de se esperar que as ideias de análise estejam de certa forma vinculadas com as de geometria. Neste sentido, Hilbert coloca que

> O axioma da completabilidade não é uma consequência do axioma de Arquimedes. [...] Pelo contrário, juntando o axioma da completabilidade, consegue-se - se bem que este axioma não contenha nenhuma referência à noção de convergência - demonstrar a existência da fronteira correspondente a um corte de Dedekind e o teorema de Bolzano-Weierstrass acerca da existência de pontos de acumulação, com o que a nossa geometria se mostra ser idêntica à geometria cartesiana. [9, p. 30].

Vemos que, corroborando com as ideias de Hilbert, somente a propriedade arquimediana não permite estabelecermos a estrutura numérica dos reais desejada. Ela permite intuir a ideia de proximidade, de acumulação, mas a existência deste "ponto de acumulação" - também estabelecido pelo teorema de Bolano-Weiesrtrass[4] - só é garantida pela completude de $\mathbb{R}$, ou comparativamente, pelo Axioma V2 da compatibilidade de Hilbert para geometria.

Para finalizar, informamos que o nome "propriedade arquimediana" possivelmente foi adotado após sugestão de Otto Stolz, conforme indica Balieiro Filho,

> Vale salientar que no prefácio do tratado *Sobre a esfera e o cilindro*, Arquimedes testemunha que Eudoxo conhecia essas ideias, porém o termo "axioma de Arquimedes", empregado atualmente, foi proposto em 1882 por Otto Stolz (1842-1905) em seu artigo Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. [2, p. 254].

Sobre este tópico Otto também escreveu "Über das Axiom des Archimedes" (1891). Estas obras podem ser obtidas na íntegra em https://eudml.org/doc/157106 e https://eudml.org/doc/157565, respectivamente[5].

[4]Todo conjunto infinito e limitado X admite um ponto de acumulação.
[5]Acesso em: 30/03/2020.

5 Conclusão

Acreditamos que esta investigação nos possibilitou ver muito além do que há uma demonstração exposta num livro de análise, pois permitiu estudar situações em que os naturais são limitados, contrariando o senso comum. Ademais, a busca por esclarecer a origem do nome, que a priori acreditávamos que fosse estabelecido pelo próprio Arquimedes, nos conduziu a diversas investigações, inclusive nos livros de história da análise, verificando se algum autor esclarecia este ponto. Isto nos levou às obras de Felix Klein e do David Hilbert, já mencionadas e, que apesar de não tratarem propriamente da análise, muito contribuiram para a compreensão deste tema.

Além disso, a propriedade arquimediana, que afirma em termos geométricos, que dados dois segmentos distintos, existe sempre um múltiplo inteiro do menor que supera o maior, ou que em termos numéricos, dados dois números reais positivos, existe um múltiplo inteiro do menor deles que supera o maior, é fundamental na construção da chamada "reta real", em que se fundamenta a análise real. Na geometria euclidiana plana, Arquimedes utilizou a referida propriedade em inúmeras demonstrações e através do princípio de Eudoxo, e consequentemente pelo emprego do método da Exaustão, contornava fenômenos de proporcionalidade de figuras geométricas incomensuráveis para atribuir-lhes um valor numérico previamente "instituído".

Pela discussão apresentada, concluímos que esta propriedade possivelmente foi instituída por Eudoxo, entretando foi Arquimedes que melhor a empregou e a reformulou para as demonstrações de seus trabalhos, devendo a este fato a identificação de seu nome com o resultado.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Blücher, 1999.

[2] BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. Um Passeio pelo Labirinto da Lógica Matemática em Companhia de Malba Tahan, **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 19, p. 247-264, mai./ago. 2018.

[3] CIFUENTES, José Carlos. O "Salto Arquimediano": um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático, **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 645-67, 2011.

[4] COURANT, Richard. **Cálculo Diferencial e Integral**. Volume 1. Tradução de Alberto Nunes Serrão e Ruy Honorio Bacellar. Porto Alegre: Globo, 1951.

[5] DOMINGUES, Hygino H., IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4. ed., São Paulo: Atual, 2003.

[6] EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.

[8] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise 1.** São Paulo: Editora LTC, 2013.

[9] HILBERT, David. **Fundamentos da Geometria**. Revisão científica e coordenação A. J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

[10] KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[11] KLEIN, Felix. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Aritmética**. Lisboa: Editora da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

[12] KLEIN, Felix. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Análise**. Lisboa: Editora da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2011.

[13] KLEIN, Felix. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Geometria**. Lisboa: Editora da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2014.

[14] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Volume 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[15] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**, uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[16] STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.