

# ECOLOGIA MATEMÁTICA: UM MODELO PARA CONTROLE DE PRAGAS COM EMPREGO DA TEORIA DOS JOGOS

D.R. MONTEIRO, A.C. DE CASTRO BARBOSA. C.A. DE MOURA\*

## Resumo

A teoria dos jogos é utilizada neste trabalho com a teoria de controle para modelar matematicamente um problema em ecologia: o controle de pragas de uma dada lavoura, o caso da soja foi o escolhido. Trata-se de uma pesquisa relevante, tanto no contexto ecológico quanto econômico, o que a torna um tópico frequentemente pesquisado, e com diferentes ferramentas. Nossa abordagem acopla técnicas matemáticas contínuas e discretas, uma vez que aplica às equações de Lotka-Volterra para sistemas de presa-predador o instrumental da teoria dos jogos. Este é um tratamento mais simples do que aquele baseado no controle ótimo, o que permite sua maior disseminação.

Palavras-chave: Cultura de soja, equações de Lotka-Volterra, controle ótimo

## 1 Introdução

A ecologia é a ciência que pesquisa as interações entre seres vivos e seu ambiente. A ecologia matemática se propõe a utilizar modelos matemáticos para analisar, entender, avaliar, prever fenômenos nesse contexto. Modelar matematicamente um fenômeno real consiste em estabelecer uma correspondência entre seres, grandezas, ações, eventos de um dado contexto do universo e variáveis sujeitas a determinadas relações matemáticas.

Neste trabalho apresentamos um problema real na agricultura: o controle de pragas. Esse controle é modelado com o uso das equações de Lotka-Volterra [16],[5] com competição. Introduzimos um controle e, com o emprego de dados extraídos de situações reais, montamos um jogo para o qual obtemos um ponto de equilíbrio de Nash [1]. Trata-se de uma aplicação da teoria dos jogos diferenciáveis, uma área que une a teoria dos jogos (clássica) à teoria de controle [11],[10].

## 2 Materiais e Métodos

O modelo matemático utilizado no presente trabalho se baseia em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) da forma  $dx/dt = g(t, x)$ , mais propriamente, no Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI) a ele associado:

$$\begin{cases} dx/dt = g(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1)$$

---

\* UERJ, danielarmonteiro@gmail.com; accb@ime.uerj.br, demoura@ime.uerj.br

em que  $g : J \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $J$  um intervalo da reta real  $\mathbb{R}$  tal que  $t_0$  pertence a  $J$  e  $D$  é um aberto conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Procura-se a solução do PVI, a função diferenciável  $x : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $dx/dt = g(t, x(t))$  e que satisfaça a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ .

O sistema (1) é chamado de sistema não-autônomo. Já um sistema autônomo é aquele cuja configuração independe (explicitamente) da variável  $t$ , a qual simula a medida do tempo. Nesse caso, podemos considerar o instante inicial como sendo  $t_0 = 0$ .

Define-se um sistema autônomo com controle de malha aberta como:

$$\begin{cases} dx/dt = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (2)$$

onde  $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  é o vetor de saída ou de estado;  $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$  é uma função, dita controle, que suporemos de classe  $C^1$ ; e a função  $f$  depende do vetor de saída, mas não explicitamente de  $t$ , ou seja, consideramos sistemas com controle ditos autônomos.

Conforme [13, p-18-19] um sistema de malha fechada ou de realimentação (feedback control system), associado à Eq. (2) é um sistema em que as variáveis de controle  $u = u(t)$  aplicadas na entrada do sistema são determinadas, ao menos em parte, pelo conhecimento dos vetores de estado ou de saída do sistema. A lei que exprime o vetor variável de controle em função do vetor de estado é chamada de lei de realimentação.

A lei de realimentação controla o sistema, corrigindo desvios do que se considera o comportamento desejável. Para isso, a lei de realimentação atribui um ganho ou uma perda, isto é, contribui positiva ou negativamente.

A estratégia de realimentação consiste em alterar a dinâmica do sistema de malha aberta, Eq. (2), acrescentando uma lei de realimentação  $u = K(x)$ , de modo a estabilizá-lo. Notemos que, nesse caso, o controle depende do vetor de saída. Como  $x = x(t)$ ,  $u$  dependerá de  $t$ , mas não explicitamente.

Numa comparação entre os sistemas de malha aberta e de malha fechada, vemos que os de malha aberta são relativamente mais simples e, em consequência, de menor custo. Entretanto, são mais imprecisos, pois não existe feedback para correção de possíveis erros. Já em um sistema de malha fechada, podemos combinar os valores reais com os desejados.

Definição: A formulação de um sistema autônomo com controle de malha fechada é

$$\begin{cases} dx/dt = f(x, u) \\ u = K(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx/dt = f(x, K(x)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (3)$$

onde  $f : D \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função que suporemos de classe  $C^1$  e  $u = K(x)$  é a lei de realimentação. Como  $u$  não depende explicitamente de  $t$ , o sistema é dito autônomo [13].

A teoria dos jogos [8] é o estudo matemático do contexto das tomadas de decisão entre indivíduos. Essa teoria foi inicialmente formalizada com a publicação por John von Neumann e Oskar Morgenstern do texto [17] e passou a ter maior destaque quando, em 1994, John Forbes Nash recebeu o Prêmio Nobel de Economia pelo trabalho que desenvolveu com esse suporte teórico [1].

Pode-se definir um jogo como um ambiente onde indivíduos interagem entre si, utilizando determinadas estratégias para conquistar um propósito [8]. Os elementos básicos são:

- Os jogadores (indivíduos) – o número de jogadores depende do jogo em questão.

- As regras do jogo – cada jogo tem sua regra: tipo de movimento da peça, o que ocorre depois que se chega a determinado ponto, entre outras;
- Os resultados – dependendo da ação que foi feita anteriormente, um resultado é atingido;
- Os ganhos (*payoffs* ou recompensas) – é o resultado que o jogador obtém por meio das estratégias por ele utilizadas. Dependendo do jogo, os ganhos são diversos, cabe ao jogador utilizar suas estratégias de forma a conseguir o ganho esperado. Pode-se dizer também que um ganho é aquilo que todo jogador obtém depois de terminado o jogo, de acordo com suas próprias escolhas e as dos demais jogadores.

Os jogos podem ser definidos pelo número de jogadores, sendo assim definidos como: jogos de uma só pessoa, ou jogos de duas pessoas, ou jogos de N-pessoas.

Além da quantidade de jogadores, os jogos são diferenciados por suas características, conforme listado abaixo:

- Jogo finito: um jogador só dispõe, em cada lance, de um número finito de alternativas e o jogo se encerra após um número finito de lances.
- Jogo com repetição: a partida, após o término, é repetida por certo número de vezes.
- Jogo sem repetição: a partida só ocorre uma vez e após não há mais jogadas.
- Jogo cooperativo: os jogadores cooperam entre si visando o melhor resultado possível.
- Jogo não cooperativo: os jogadores não cooperam entre si.
- Jogo de soma zero: a expressão soma zero deriva dos jogos de salão, como o pôquer, no qual não se cria, nem se destrói riqueza. Quem quiser ganhar dinheiro terá de ganhá-lo de outro jogador. Encerrado o jogo, a soma dos ganhos é sempre zero (as perdas são ganhos negativos).
- Jogo de soma não zero: o jogo não apresenta saldo neutro.
- Jogo simultâneo: é aquele em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão e os jogadores não se preocupam com as consequências futuras de suas escolhas.
- Jogo sequencial: é aquele em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem predeterminada.
- Jogo com informação perfeita: ambos os jogadores possuem conhecimento total das informações do jogo. Ou seja, surpresas estão fora de questão, a qualquer altura do jogo ambos os participantes estão inteiramente informados.
- Jogo geral ou de informação não perfeita: os jogadores não possuem todas as informações sobre o jogo. Podem existir informações novas que não são passadas aos mesmos, ou até informações que não são dadas por certos motivos. Jogos desse tipo são mais complexos do que os de informação perfeita.

Nesse trabalho, introduzimos uma proposta de um jogo diferenciável, com dois jogadores, de soma não zero, não cooperativo e simultâneo, para modelar o controle de pragas numa lavoura, escolhendo os jogadores, o plano de fundo e as condições do jogo.

O jogo é constituído por dois jogadores: Jogador I – as pragas (a lagarta da soja); Jogador II – o agricultor (representado pelos inimigos naturais da lagarta da soja, o agricultor que será o responsável em controlar o número de inimigos naturais no ambiente).

Manter uma plantação sem o uso de agrotóxico a torna muito mais vulnerável à ação das pragas, o que induz à perda da produção [9],[2]. Consequentemente, cresce o valor final do produto, tendo em vista uma menor produção por área comparativamente àquela obtida com emprego de agrotóxico.

O plano de fundo do jogo será uma lavoura infestada por uma praga, cujo controle biológico será realizado com um inimigo natural da mesma [4]. Sabemos que existe um limite máximo de pragas por folha que a lavoura consegue suportar sem grandes perdas, ou mesmo sua extinção. Consideramos também um limite mínimo, visto que, abaixo de certo número de pragas por folha, não se justifica o investimento.

Como *payoffs*, para o jogador I, isto é, para as pragas, o ganho será considerado o quanto que se pode consumir da lavoura. Já para o jogador II, isto é, para o agricultor, o ganho será considerado o menor prejuízo econômico na lavoura.

As regras desse jogo são: as lagartas estão na lavoura, podendo evadir a qualquer momento e o agricultor pode, ou não, liberar determinada quantidade de inimigos naturais das pragas.

Thomas Malthus (1766-1834) introduziu uma teoria populacional que pode ser usada para auxiliar no tratamento matemático de um problema agrícola: as pragas que atacam a lavoura. Estas podem, mesmo com todos os resultados a que chegamos, causar 100% de destruição. Existem, contudo, técnicas que tentam minimizar esse efeito, entre elas o controle de pragas [7],[12].

Malthus [6] conjecturou que, dados recursos abundantes, as populações humanas apresentam a tendência de crescimento geométrico. Esse padrão pode ser descrito por  $N_t = N_0 e^{rt}$ , onde  $r$  ( $r > 0$ ) é a taxa de crescimento relativo da população  $N$ .

Teoricamente, o crescimento exponencial com qualquer taxa maior que zero conduz a enormes populações, se continuar ininterruptamente. As populações reais somente obedecem a esse modelo exponencial quando os recursos são abundantes e outras condições favoráveis para o crescimento estão presentes.

Em 1838 Verhulst [15] sugeriu uma modificação na equação de Malthus. Considerou os recursos limitados e a população proporcional à sua taxa de crescimento em cada instante. Propôs assim a equação logística para descrever o crescimento de uma população com recursos limitados.

Em baixas densidades, a população cresce de maneira exponencial e, em altas densidades, as taxas de crescimento diminuem à medida que os recursos vão se tornando insuficientes para sustentar a demanda da população. Com o decorrer do tempo a população aproxima-se assintoticamente de um limite superior conhecido como  $\gamma$ , a densidade de saturação, ou capacidade de suporte logístico.

A equação logística é uma equação diferencial da forma

$$dx/dt = x(\alpha - \gamma x) , \quad (4)$$

onde  $x = x(t)$  é a densidade da população em um instante  $t$ ,  $dx/dt$  é a taxa de crescimento populacional,  $\alpha$  é uma constante positiva que representa a taxa de crescimento populacional quando não há fatores limitantes e, como já foi mencionado,  $\gamma$  é uma constante positiva (o limite populacional).

A equação logística considera que a taxa de crescimento,  $dx/dt$ , depende não só da população, mas também das condições existentes no meio que a abriga. O termo  $(-\gamma x)x$  representa a contribuição da competição entre os indivíduos da mesma espécie no crescimento da população. A equação acima modela uma única população.

Mas os organismos interagem com outras espécies e com o ambiente físico de diferentes formas. Essas interações às vezes incluem “*feedbacks negativos*”. Um exemplo de *feedback* negativo ocorre quando um aumento na população de uma espécie de presa provoca um aumento na população de seus predadores, o que, por sua vez, conduz à redução da população de presas (aumento da mortalidade provocada pela predação).

O modelo de Lotka-Volterra foi pioneiro ao descrever matematicamente a interação entre duas populações distintas (presas e predadores). Proposto independentemente por Alfred J. Lotka em 1925, cf. [3], e por Vito Volterra em 1926, cf. [16], é definido pelas equações

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) \end{cases}, \quad (5)$$

chamadas de Equações de Lotka-Volterra. Nelas,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  representam, respectivamente, as populações de presas/hospedeiro e predadores/parasitoide. Foram propostas a partir das seguintes hipóteses:  $dx/dt = ax$ , com  $a > 0$  quando  $y = 0$ ;  $dy/dt = -by$ , com  $b > 0$ , quando  $y = 0$ ; os termos  $\beta xy$  e  $\alpha yx$ , com  $\beta > 0$  e  $\alpha > 0$ , representam as interações entre as duas espécies. O termo  $\beta xy$  implica no crescimento de  $y$ , enquanto o termo  $-\alpha yx$  implica no decréscimo de  $x$ .

Supõe-se que os recursos para as presas são ilimitados, e que o único fator inibidor para seu crescimento é a presença dos predadores. Assim, sem predadores, a população de presas crescerá exponencialmente, segundo o modelo malthusiano, determinado pelo termo  $ax$  da primeira equação do sistema. Com a presença dos predadores a taxa de crescimento da presa decai linearmente com o aumento da população de predadores, o que justifica o acréscimo do termo  $\alpha yx$ .

Analogamente, supomos que os predadores se alimentam unicamente daquelas presas e, caso elas deixem de existir, os mesmos se extinguirão. Sem as presas, voltaríamos a ter o modelo malthusiano, mostrando uma queda na população de predadores, que está sendo representado pelo termo  $-yb$  da segunda equação do sistema. Com a presença das presas, essa situação sofre uma alteração. Temos então um aumento linear da taxa de crescimento da população de predadores quando a população de presas aumenta, justificando a introdução do termo  $\beta xy$ .

Trataremos agora de um modelo matemático, citado em [13, p.84] que une os dois modelos acima, isto é, o modelo da equação logística e o modelo de Lotka-Volterra. Vamos admitir na primeira equação em (5), o fator natural que inibe o crescimento da população. Ou seja, na ausência de predadores, essa equação é modificada de modo a se obter a Eq. (4). O sistema é definido como um caso particular da Eq. (5), sendo referenciado como modelo de Lotka-Volterra com competição,

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) \end{cases}, \quad (6)$$

onde:  $a$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $b$  e  $\beta$  são constantes positivas;  $a$  representa a taxa de crescimento das pragas, que nessa aplicação são as presas;  $b$  representa a taxa de mortalidade dos inimigos naturais das pragas, que são os predadores;  $-\alpha yx$  e  $\beta xy$  são as interações entre as duas populações;  $(-\gamma x)x$  representa a competição intraespecífica das pragas, que concorrem pelo alimento em lavouras.

Esse modelo considera a existência de um número elevado de presas, não sendo, portanto, o foco da análise a competição intraespecífica entre predadores. Assim, não introduzimos um termo que corresponderia à competição intraespecífica na equação dos predadores. O objetivo deste modelo é o equilíbrio entre as espécies.

Calculemos os pontos de equilíbrio do sistema (5):

$$\begin{cases} x(a - \gamma x - \alpha y) = 0 \\ y(-b + \beta x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } a - \gamma x - \alpha y = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -b + \beta x = 0 \end{cases}.$$

Como as condições  $x = 0$  ou  $y = 0$  não apresentaram interesse para o modelo, pois  $x$  e  $y$  representam as densidades das populações, das 4 possibilidades teremos:

$$\begin{cases} a - \gamma x - \alpha y = 0 \\ -b + \beta x = 0 \end{cases} .$$

Desse sistema, obtemos o ponto de equilíbrio para o sistema sem controle,  $P_e = (x, y) = (b/\beta, (a - (\gamma b/\beta))/\alpha)$ .

O ponto de equilíbrio do sistema (6) possuindo um nível acima do desejável, torna necessária a aplicação de um controle.

Observe que o número de pragas no ponto de equilíbrio é invariante relativamente aos coeficientes da primeira equação. Ou seja, a mudança de qualquer parâmetro na primeira equação não influi na redução (ou aumento) das pragas, apenas altera a população dos inimigos naturais das pragas (predadores).

Já para a segunda equação, alterar os coeficientes implica na obtenção de valores diferentes para as pragas (presas) no ponto de equilíbrio.

Para a estratégia de controle biológico baseada na inserção de inimigos naturais, de modo a manter o sistema em um estado de equilíbrio abaixo de danos econômicos, utilizamos o modelo descrito na Eq. (6), introduzindo na segunda equação uma função de controle denotada por  $U$ . Assim, a equação que descreve a taxa de variação da densidade populacional do inimigo natural da praga em questão passa a ser:

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) + U \end{cases} . \quad (7)$$

A aplicação de uma função de controle se baseia na existência de certo limite da quantidade de pragas que determina a margem de danos econômicos, denotado por  $x_d$ . Isto é, não há necessidade de exterminar completamente a praga. Basta manter sua população abaixo de uma margem  $x_d$  e ela não causará danos (economicamente) representativos à lavoura [12].

### 3 Resultados e Discussão

Para descrever melhor o processo do controle de pragas resumimos abaixo os dados do manual da EMBRAPA sobre soja [5].

A tecnologia de Manejo Integrado de Pragas da Soja (MIP-Soja) foi implantada no Brasil na década de 1970 e tem sido constantemente aperfeiçoada. Essa tecnologia orienta na tomada de decisões de controle de pragas com base num conjunto de informações sobre os insetos e sua densidade populacional, na ocorrência de inimigos naturais e na capacidade da cultura de tolerar os danos.

A lagarta-da-soja é encontrada em todos os locais de cultivo, sendo o desfolhador mais comum da soja no Brasil. Segundo os níveis de ação pelo MIP-Soja [5], a *A. gemmatalis* deve ser controlada com inseticidas químicos, quando forem encontradas, em média, 20 lagartas pequenas (até 1.5cm) por m<sup>2</sup>.

O agricultor busca diminuir a quantidade de lagartas por hectare com o auxílio de inimigos naturais no meio ambiente. Para isso, ele busca encontrar um controle  $U$  de modo que a quantidade total de lagartas permaneça num patamar economicamente viável [14]. Usaremos  $x_d = 20$  como ponto de equilíbrio estável para o número de lagartas [13, p.84]. Conforme mencionado, não é necessário dizimar toda a população de lagartas. Este fato acarretaria exigências econômicas, das quais o agricultor busca fugir.

Voltando às equações de Lotka-Volterra com competição (6), desejamos encontrar  $U$  de modo que o ponto  $P = (x_d, y_d)$  seja economicamente estável.

Utilizaremos no jogo os dados encontrados em [13, p.91] que constam da Tabela 1 para os parâmetros das equações acima.

Tabela 1: Dados da EMBRAPA.

a	b	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$
0.16	0.19	0.02	0.001	0.0029

Substituindo os valores acima nas equações em (6), sem controle, obtemos:

$$\begin{cases} dx/dt = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ dy/dt = y(-0.19 + 0.0029x) \end{cases}$$

Igualando a zero as duas últimas equações, obtemos como ponto de equilíbrio  $P_i \cong (65.5, 4.7)$ , valor que não é economicamente viável para o agricultor.

Substituindo  $x = x_d = 20$  em  $(0.16 - 0.001x - 0.02y) = 0$ , obtemos  $y_d = 7$ , ou seja,  $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$ .

O agricultor busca então sair do ponto  $P_i \cong (65.5, 4.7)$  para o ponto  $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$ . Para isso ele utilizará um controle  $U$ , da forma  $U = ky$ ,  $k$  constante não nula, na segunda equação:

$$\begin{cases} dx/dt = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ dy/dt = y(-0.19 + 0.0029x) + U \end{cases}$$

Variando gradualmente o parâmetro  $b$  da equação (7), utilizando para isso o auxílio do software matemático Maple, observamos que, quando  $b = 0.058$ , a solução do sistema é o ponto  $(20, 7)$ , ou seja, o ponto economicamente estável.

Assim sendo, determinamos  $U = 0.132y$  e podemos reescrever o sistema como:

$$\begin{cases} dx/dt = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ dy/dt = y(-0.19 + 0.0029x) + 0.132y \end{cases}$$

Determinando para cada valor de  $b$ ,  $0.058 \leq b \leq 0.019$ , o ponto  $P^* = (b/0.0029, (0.16 - 0.001(b/0.0029))/0.02)$ , obtemos o gráfico na Figura 1.

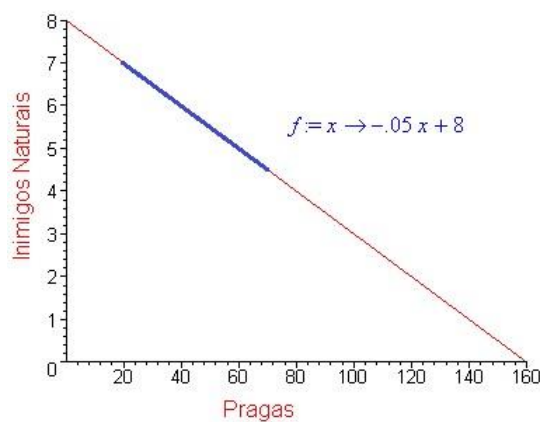


Figura 1: Variação do parâmetro.

Variando a função até os pontos  $(0,8)$  e  $(160,0)$ , obtemos a função linear  $f(x) = -0.05x + 8$ . A partir dessa função, podemos montar a Tabela 2 - Representação do jogo proposto. Observe que a função linear é destacada nos pontos  $(20, 7)$  e  $(65.5, 4.7)$ , pontos estes obtidos anteriormente. Com o gráfico, observamos que nesse intervalo, de 20 a 65.5, não existe outro ponto ótimo, obtendo então os quatro pontos que serão utilizados como os payoffs de cada uma das estratégias, montando assim a Tabela 2:

Tabela 2: Jogo lagarta X inimigos naturais.

	Lagartas	
Inimigos	Livres no Ambiente	Fora do Ambiente
Livres no Ambiente	7; 20 ←	8; 0 ↑
Fora do Ambiente	0; 160 ←	0; 0 ↑

Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um Equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores e isso é verdade para todos os jogadores.

Observe na Tabela 2, que para as Lagartas, a alternativa estar “Livre no Ambiente” é sempre mais vantajosa. Assim, cria-se a seta horizontal, para a opção de maior vantagem. A primeira seta compara a opção 0 com 20, e aponta para a opção 20 e a segunda seta compara a opção 0 com 160, apontando para a opção 160.

Já para os inimigos, é feita a mesma análise, só que neste caso, usa-se a seta na vertical. Para os inimigos, também é mais vantajoso estar “Livre no Ambiente”, basta observar que se têm os pares 0 e 7 e outro 0 e 8. Uma combinação de estratégias é um Equilíbrio de Nash quando duas setas apontam para a mesma estratégia, nesse caso, para a opção  $(20, 7)$ . O ponto  $(20, 7)$  é um equilíbrio de Nash, não havendo nenhum outro nesse jogo, conforme mostrado na Tabela 2.

Concluimos que, para ir do ponto  $P_i \cong (65.5, 4.7)$  para o ponto  $P_f = (20, 7)$ , o agricultor deve modificar o parâmetro referente à taxa de mortalidade dos inimigos naturais. Para isso, basta inserir no meio uma maior quantidade de inimigos, fazendo com que essa taxa decresça e se consiga assim atingir o ponto economicamente estável.

#### 4 Considerações Finais

Neste trabalho unimos a teoria dos Jogos à teoria de Controle. Modelamos um jogo utilizando as equações de Lotka-Volterra com competição e inserimos um controle para modelar as nossas estratégias. Primeiramente encontramos o controle para depois elaborar o nosso jogo e determinar assim o Equilíbrio de Nash a ele associado.

Mostramos, com o jogo desenvolvido, como um agricultor pode controlar uma peste que atinge sua lavoura. Cabe ressaltar que nas equações, caso o parâmetro  $\beta$  seja modificado, é possível encontrar o correspondente ponto de equilíbrio economicamente aceitável.

Utilizando os valores dos parâmetros fornecidos pela EMBRAPA, vimos que o sistema (4.3) tem como ponto de equilíbrio  $P_i \cong (65.5, 4.7)$ .



Ao mudar o parâmetro  $\beta$  de 0.0029 para 0.0095, isto é, inserir um controle  $U^* = 0.0066xy$ , nosso sistema também terá como ponto de equilíbrio  $P_1 \cong (65.5, 4.7)$ . Neste caso, porém, mudar o parâmetro  $\beta$  significa mudar a interação entre as espécies, o que apresenta dificuldades práticas.

O jogo aqui desenvolvido pode ser aplicado a qualquer modelo de Lotka-Volterra com competição.

## Referências

- [1] ALMEIDA, Paulo José A.L.de ; KAJIN, Maja ; VIEIRA Marcus V. Equilíbrio de Nash e Estratégias evolutivamente estáveis: A Teoria dos jogos na ecologia de populações. *Oecologia Australis* 16(1): 127-140, Março 2012
- [2] BIEDMA, Marina E. FERRELLIA, Maria Leticia; ROMANOWKIA, Víctor; SALVADORA, Ricardo; SCIOCCO-CAP, Alicia. Effect of the interaction between *Anticarsia gemmatalis* multiple nucleopolyhedrovirus and *Epinotia aporema* granulovirus, on *A. gemmatalis* (Lepidoptera: Noctuidae) larvae. *Biological Control*, [s.l.], v. 91, p.17-21, dez. 2015. Elsevier BV. DOI: 10.1016/j.biocontrol.2015.07.006.
- [3] CARMICHAEL, R. D.; LOTKA, A. J.. *Elements of Physical Biology*. The American Mathematical Monthly, [s.l.], v. 33, n. 8, p.426-428, out. 1926. JSTOR. DOI: 10.2307/2298330
- [4] FERREIRA, João A.M. ZANUNCIO, José C.; TORRES, JORGE B.; MOLINA-RUGAMA, ADRIÁN J. Predatory behaviour of *Podisus nigrispinus* (Heteroptera: Pentatomidae) on different densities of *Anticarsia gemmatalis* (Lepidoptera. *Biocontrol Science And Technology*, [s.l.], v. 18, n. 7, p.711-719, set. 2008. Informa UK Limited. DOI: 10.1080/09583150802271220.
- [5] HOFFMANN-CAMPO, Clara Beatriz Soja - Manejo integrado de pragas: Pragas da soja no Brasil e seu manejo integrado. Londrina: Embrapa, 2000.
- [6] MALTHUS, Thomas Robert. *An Essay on the Principle of Population*. Inglaterra: Liberty Fund, 1798.
- [7] MOLTER, Alexandre; RAFIKOV, Marat. Nonlinear optimal control of population systems: applications in ecosystems. *Nonlinear Dynamics*, Virginia, v. 76, n. 2, p.1141-1150, abr. 2014.
- [8] MONTEIRO, Daniela Ribeiro. Uma abordagem por meio da teoria dos jogos de um modelo em ecologia matemática. 2013. 115 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências Computacionais, IME, UERJ, Rio de Janeiro, 2013.
- [9] PILKINGTON, Leigh J.; MESSELINK, Gerben; LENTEREN, Joop C. van; MOTTEE, Kristian Le. “Protected Biological Control” – Biological pest management in the greenhouse industry. *Biological Control*, [s.l.], v. 52, n. 3, p.216-220, mar. 2010. Elsevier BV. DOI: 10.1016/j.biocontrol.2009.05.022.
- [10] RAFIKOV, Marat.; BALTHAZAR, José Manoel. Optimal pest control problem in population dynamics. *Comput. Appl. Math.* [online]. 2005, vol.24, n.1, pp. 65-81. ISSN 1807-0302.
- [11] RAFIKOV, Marat.; BALTHAZAR, José Manoel.; VON BREMEN, H.F.. Mathematical modeling and control of population systems: Applications in biological pest control. *Applied Mathematics And Computation*, [s.l.], v. 200, n. 2, p.557-573, jul. 2008. Elsevier BV. DOI: 10.1016/j.amc.2007.11.036.
- [12] RAFIKOV, Marat; SILVEIRA, Jean Carlos. On dynamical behavior of the sugarcane borer – Parasitoid agroecosystem. *Ecological Complexity*, [s.l.], v. 18, p.67-73, jun. 2014. Elsevier BV. DOI: 10.1016/j.ecocom.2013.12.003

- [13] SANTOS, Lucianna Helene Silva dos. Teoria de Controle Ótimo com Aplicações a Sistemas Biológicos. 2012. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências Computacionais, IME, UERJ, Rio de Janeiro, 2012.
- [14] TANG, Sanyi; CHEKE, Robert A.. Models for integrated pest control and their biological implications. *Mathematical Biosciences*, [s.l.], v. 215, n. 1, p.115-125, set. 2008. Elsevier BV. DOI: 10.1016/j.mbs.2008.06.008.
- [15] VERHULST, Pierre François. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, 10:113-121, 1838.
- [16] VOLTERRA, Vito. Fluctuation in the abundance of a species considered mathematically. In *Nature*, Vol. 118, No. 2972, Saturday, October 16, 1926, pp. 558
- [17] VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. *Theory of Games and Economic Behavior*. New Jersey: Princeton University Press, 1944.