

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS EM UMA BARRA UNIFORME DE AÇO-CARBONO COM O MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

J. C. ARAÚJO¹

R. G. MÁRQUEZ²

Resumo

Nesse trabalho é desenvolvida uma solução numérica por diferenças finitas com o método de Crank-Nicolson para a condução de calor em regime transiente de temperatura em uma barra de aço-carbono unidimensional com condições de Dirichlet e Newmann. A solução analítica pode ser obtida formalmente pelo método de separação de variáveis. Os resultados das simulações mostraram que a solução numérica é convergente.

Abstract

In this work is obtained a numeric approach by finite difference with the Crank-Nicolson method for transient heat conduction in a carbon steel slab with the Dirichlet e Newmann conditions. The analytic solution was obtained applying the method of separation of variables. The simulated resulted showed that the numeric solution is convergent.

1. Introdução

Muitas das equações diferenciais que governam os problemas físicos de transferência de calor têm soluções analíticas muito trabalhosas (caso existam). Isso ocorre, por exemplo, em problemas de condução de calor em regime transiente [5]. Uma maneira de contornar essa dificuldade consiste na utilização de métodos numéricos que procuram representar a equação diferencial que descreve o problema por meio de um conjunto de equações algébricas. Essas representações são amplamente adotadas em uma grande variedade de problemas de engenharia [8]. Entre os vários métodos numéricos disponíveis para a representação de uma equação diferencial, destaca-se o método das diferenças finitas [3] que produz bons resultados em geometrias menos complexas como a descrita por Sanderson *et al.* [6] no estudo do resfriamento forçado de uma placa delgada de aço-carbono sem geração de energia e com condições de fronteira de primeira e segunda espécie em regime estacionário. Nesse trabalho o mesmo material é agora utilizado na forma de uma barra fina sem fonte de calor interno e submetida a condições de fronteira de primeira e segunda espécie, tem o perfil de temperaturas em regime transiente descritas por uma equação diferencial parcial numérica em diferenças finitas usando o esquema de Crank-Nicolson [9]. Os resultados numéricos obtidos em uma malha relativamente grossa mostraram boa concordância com os obtidos pela solução analítica que pode ser desenvolvida formalmente.

Palavras Chave: Método de Crank-Nicolson; Solução Analítica

DMAT/FFP-UERJ, ¹ jcaraujo@iprj.uerj.br, ² rosagm@uerj.br;

2. Materiais e Métodos

Uma barra fina de aço-carbono com coeficiente de condutividade térmica $k = 63,9 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ e difusividade térmica $\alpha = 18,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ com comprimento $L = 0,02 \text{ m}$ encontra-se em uma temperatura uniforme $T_i = 300^\circ\text{C}$.

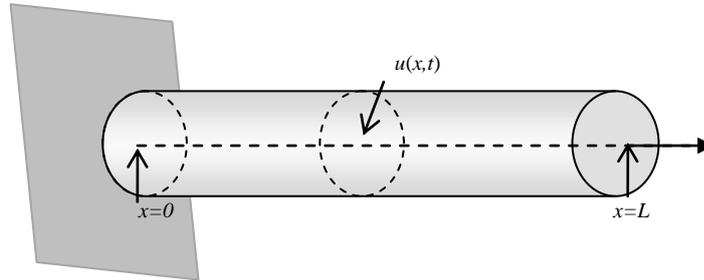


Figura 1: Barra uniforme de aço-carbono, isolada no lado esquerdo

Subitamente a superfície à direita é resfriada até a temperatura de zero grau e a superfície à esquerda é isolada termicamente (Fig. 1). A variação da temperatura ao longo da barra em regime transiente é governada pela equação diferencial parcial com condições de segundo e primeiro tipo [3] e é dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t), \quad 0 < x < L \text{ e } t > 0. \quad (1)$$

A distribuição da temperatura está sujeita às seguintes condições:

$$T(x,0) = f(x) = T_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t > 0 \quad (2a)$$

$$T(L,t) = T_L, \quad t > 0. \quad (2b)$$

2.1. Formulação Analítica

O tratamento que será aqui desenvolvido na formulação analítica é baseado no desenvolvimento proposto por Boyce e DiPrima [1] para o mesmo problema só que usando somente a condição de Dirichlet nas extremidades da barra, enquanto o problema proposto nesse estudo é não homogêneo.

As condições (2a) e (2b) são consideradas de segunda e primeira espécie. Como a condição (2b) não é necessariamente homogênea, uma nova temperatura é definida por

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_L, \quad (3)$$

de modo que a eq (1) combinada com as condições de contorno (2a) e (2b) reescrevem-se como na forma de equações homogêneas

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t > 0 \quad (4a)$$

$$\theta(L,t) = 0, \quad t > 0. \quad (4b)$$

Para resolver a eq (4) será aplicado o método de separação de variáveis ([1], [4], [10]) que consiste em assumir que a temperatura $\theta(x,t)$ pode ser representada como um produto de uma função de posição $H(x)$ com outra função de temperatura $\Gamma(t)$, isto é,

$$\theta(x,t) = H(x)\Gamma(t). \tag{5}$$

Substituindo a eq (3) na eq (4), resulta

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,t) = \frac{d^2 H}{dx^2}(x)\Gamma(t). \tag{6}$$

Da eq (5),

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) = H(x)\frac{d\Gamma}{dt}(t). \tag{7}$$

Substituindo as eqs (6 e 7) na eq (4), tem-se

$$\frac{d^2 H}{dx^2}(x)\Gamma(t) = \frac{1}{\alpha} H(x)\frac{d\Gamma}{dt}(t). \tag{8}$$

Separando as variáveis da eq (8) resulta

$$\frac{1}{H(x)}\left(\frac{d^2 H(x)}{dx^2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\frac{d\Gamma(t)}{dt} (= -\sigma). \tag{9}$$

A igualdade da eq (9) é verdadeira se ambos os lados são iguais a uma mesma constante de separação $-\sigma$. O sinal negativo para a constante de separação é para assegurar o decaimento de $\Gamma(t)$ com o tempo t [1]. Da eq (9) resultam duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 H}{dx^2}(x) + \sigma H(x) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt}(t) + \alpha\sigma \Gamma(t) = 0. \tag{11}$$

Desse modo o produto das soluções das eqs (10-11) produz soluções para a eq (4). Entretanto, essas soluções devem ser restritas às condições de contorno dadas pelas condições (4a-4b). Da eq (5) e usando (4a) tem-se

$$\frac{dH}{dx}(0)\Gamma(t) = 0. \tag{12}$$

A condição $\Gamma(t) = 0$ é implausível, pois nesse caso resulta da eq (5) que a temperatura $\theta(x,t) = 0$, para todo tempo t . Logo devemos ter

$$\frac{dH}{dx}(0) = 0. \tag{13}$$

Usando a condição de contorno (4b) na eq (5), resulta

$$H(L) = 0. \tag{14}$$

Reunindo as eqs (10, 13 e 14), tem-se o problema

$$\frac{d^2 H}{dx^2}(x) + \sigma H(x) = 0 \quad (15)$$

$$H(L) = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{dH}{dx}(0) = 0. \quad (15b)$$

É possível mostrar que o problema dado pelas eqs (15,15a,15b) tem soluções não triviais se a constante de separação é positiva. Nesse caso fazendo $\sigma = \lambda^2$, a eq. (15) tem como solução geral a expressão

$$H(x) = c_1 \text{sen}(\lambda x) + c_2 \text{cos}(\lambda x). \quad (16)$$

Usando a condição dada pela eq. (15b), tem-se $c_1 = 0$ e pela condição dada pela eq. (15a),

$$c_2 \text{cos}(\lambda L) = 0. \quad (17)$$

As raízes da eq (17) são dadas por

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}; \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Portanto, o problema dado pelas eqs (15, 15a e 15b) tem uma sequência infinita de autovalores

$\sigma = \lambda_n^2 = \left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2$ com autofunções correspondentes dadas pela eq. (16) com $c_1 = 0$ na forma

$$H(x) = c_2 \text{cos}(\lambda x). \quad (19)$$

Para esses valores de σ , as soluções $\Gamma(t)$ da eq. (11) são proporcionais a $e^{-\alpha\lambda_n^2 t} = e^{-\alpha\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 t}$. Da eq (5), eq (19) e das soluções de $\Gamma(t)$ resulta que

$$\theta_n(x,t) = c_{2,n} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \text{cos}(\lambda_n x). \quad (20)$$

A solução obtida pela eq(20) satisfaz as condições (4,4a e 4b) para qualquer n inteiro positivo. A solução completa para $\theta(x,t)$ pode ser obtida pela combinação linear de todas as contribuições individuais dadas pela eq (20), resultando desse modo na expressão dada por

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \text{cos}(\lambda_n x), \quad (21)$$

onde c_n são constantes a serem determinadas. Das eqs. (2b e 3),

$$\theta(x,0) = T(x,0) - T_L = T_i - T_L = c. \quad (22)$$

Fazendo $c = g(x) = T_i - T_L$, e combinando as eqs. (21-22) resulta

$$\theta(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cos}(\lambda_n x). \quad (23)$$

Portanto, a função $g(x)$ é representada por uma série trigonométrica em cossenos. Desde que $g(x)$ é uma função integrável no intervalo $[0, L]$, os coeficientes c_n são os coeficientes da série de Fourier ([2], [4], [10]) para $g(x)$ é uma função periódica de período $2L$. Esses coeficientes são então dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos(\lambda_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

A combinação das eqs (3, 21 e 24) resulta solução do problema original dado pelas eqs (1, 2, 2a, 2b)

$$T(x, t) = T_L + \frac{2}{L} \sum_1^{\infty} \left\{ \int_0^L g(x) \cos(\lambda_n x) dx \right\} e^{-\alpha \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2 t} \cos(\lambda_n x). \quad (25)$$

Como $T_L = 0$, então $g(x) = T_i = 300^\circ C$. Usando a eq (24) $c_n = \frac{1200}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right)$ e a eq. (25) a solução analítica para o problema específico da condução de calor da barra aço-carbono é finalmente dada por

$$T(x, t) = \frac{1200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right) e^{-\alpha \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 t} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right). \quad (26)$$

Em geral, como o fator exponencial da série em cossenos (eq. 26) é negativo, o número mínimo de termos dependerá da precisão desejada.

2.2. Formulação Numérica

O método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável, isso significa que não existem restrições a escolha do passo espacial Δx e do passo temporal Δt . O esquema de Crank-Nicolson para as derivadas parciais da eq (1) é dado por

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^n \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right\} \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n \cong \left\{ \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \right\}. \quad (28)$$

A eq (27) para a derivada segunda é uma aproximação como uma média no tempo entre n e $n+1$ e entre i e $i+1$ no espaço por diferenças centradas, enquanto a eq (28) é a representação para a derivada primeira no tempo com diferença avançada. Substituindo as eq (27-28) na eq (1) resulta

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right\} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \right\}. \quad (29)$$

Multiplicando a eq.(29) pelo fator $2\alpha\Delta t$ e fazendo $r = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$, a eq. (29) fica na forma

$$-rT_{i+1}^{n+1} + (2+2r)T_i^{n+1} - rT_{i-1}^{n+1} = (2-2r)T_i^n + rT_{i-1}^n + rT_{i+1}^n. \quad (30)$$

A eq (30) é dada em função dos nós interiores do meio unidimensional no instante n , $1 \leq i \leq N-1$.

Usando a condição de isolamento térmico dada pela eq (2a), resulta que $T_0^{n+1} = T_1^{n+1}$ em qualquer instante de tempo n . Destacando $i = 1$ na eq (30) e usando a condição de isolamento térmico na superfície à esquerda da barra, tem-se para o nó 1 a equação

$$(2 + 2r)T_1^{n+1} - rT_2^{n+1} = (2 - 2r)T_1^n + rT_2^n. \quad (31)$$

Usando a condição de contorno dada pela eq (2b) tem-se para o nó N-1 a equação

$$-rT_{N-2}^{n+1} + (2 + 2r)T_{N-1}^{n+1} = rT_{N-2}^n + (2 - 2r)T_{N-1}^n. \quad (32)$$

Para os nós interiores com $2 \leq i \leq N - 2$ resultam as equações algébricas dadas como na eq (30). Desse modo, reunindo as eqs (31, 32, 30) resulta um sistema linear $AT_i^{n+1} = BT_i^n$ de ordem $N - 1 \times N - 1$, onde A e B são matrizes tridiagonais. O algoritmo iterativo de Jacobi [3] pode ser utilizado eficientemente para resolver o sistema linear $AT_i^{n+1} = BT_i^n$ em cada iteração, devido ao fato da matriz A satisfazer ao critério de Scarborough [6]. Uma matriz A e B típicas ficam na forma

$$A = \begin{bmatrix} 2+r & -r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2-r & r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r & 2-2r & r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 2-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r & 2-2r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 2-2r & r & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 2-2r \end{bmatrix} \quad (34)$$

3. Resultados

As simulações numéricas consideraram inicialmente a barra de aço-carbono de comprimento $L = 2$ cm subdividida em 5 e 10 subintervalos igualmente espaçados.

No primeiro caso, $\Delta x = \frac{L}{5}$, $\Delta t = 0.11$ e $r = 0.125$. No segundo caso, $\Delta x = \frac{L}{10}$, $\Delta t = 0.11$ e $r = 0.517$. O objetivo com esses parâmetros foi testar o progresso da solução numérica quando o refinamento da malha foi duplicado. As comparações foram realizadas nos pontos $P_i = \{i\Delta x, i = 1..4\}$, isto é, nos pontos $i\Delta x = \frac{L}{5}, \frac{2L}{5}, \frac{3L}{5}$ e $\frac{4L}{5}$. Para a solução analítica, foram utilizados 15 termos dado pela eq (26). A Fig.2(a) mostra uma dificuldade do método numérico em acompanhar particularmente a curva $T_{i=L/5}^n$ com n variando de 0 a 181, isto é, de zero a 19.9 s. Essa curva de temperatura está localizada mais à esquerda perto da zona de isolamento térmico, portanto contém as temperaturas mais elevadas. O maior desajuste era esperado para essas temperaturas, pois a condição de contorno dada pelo isolamento térmico foi aproximada por uma derivada avançada no espaço x com erro de ordem Δx .

Essa dissipação costuma ocorrer em regiões de grandes gradientes de temperaturas às vezes destruindo as soluções [3]. A Fig. 2(b) mostra uma melhor aproximação da solução numérica quando a malha teve o seu refinamento duplicado. Nota-se claramente uma pequena dissipação da solução perto da superfície de maior gradiente de temperaturas. Portanto o método numérico adotado nesse estudo além de ser incondicionalmente estável é consistente. As Figs 3(a-b) mostram as curvas de temperaturas em cada região nodal de interesse com a variação do tempo. Como era esperado, a curva de mais baixa temperatura está localizada no nó 4 ($x = \frac{4L}{5}$), isto é, a 1.6 cm da superfície à esquerda da barra.

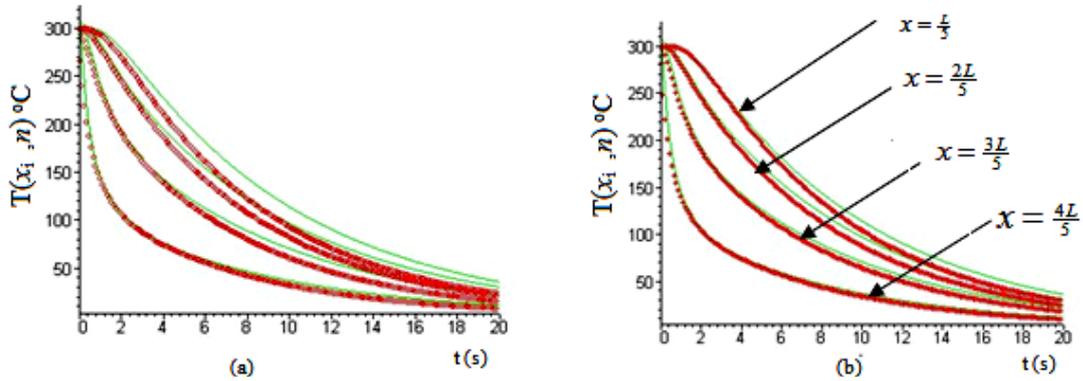


Figura 2. Curvas de temperaturas nos nós $\frac{L}{5}$, $\frac{2L}{5}$, $\frac{3L}{5}$ e $\frac{4L}{5}$ em função do tempo com a discretização (a) $\Delta x = \frac{L}{5}$ e (b) $\Delta x = \frac{L}{10}$. As linhas finas são as soluções exatas enquanto as linhas pontilhadas mais densas representam as soluções numéricas.

As Fig. 3a e 3b mostram que a equação numérica reproduz a equação diferencial quando a malha espacial e a malha temporal são refinadas, considerando $\Delta x = \frac{L}{100}$ e $\Delta t = \frac{1}{100}$.

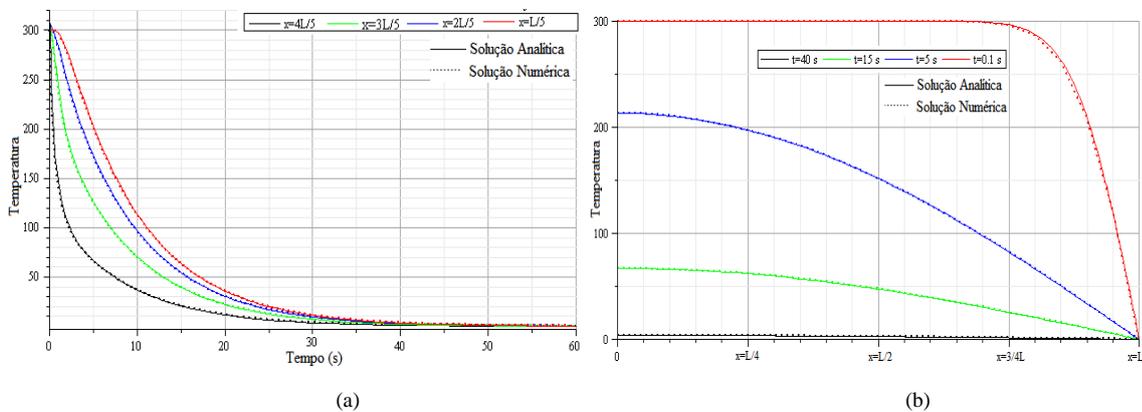


Figura 3. (a) Curvas de temperaturas nos nós $\frac{L}{5}$, $\frac{2L}{5}$, $\frac{3L}{5}$ e $\frac{4L}{5}$ em função do tempo. (b) Distribuição da temperatura ao longo da barra em diversos tempos, quando $t=0.1$ a temperatura permanece a 300 °C em quase toda a barra, uma vez que foi aplicada subitamente uma temperatura de zero grau no extremo livre (à direita), no extremo fixo após 15 s a temperatura baixa para 213 °C, após 15 s para 67 °C e com 40 s baixa para 4,7 °C. Após 60 segundos a temperatura na barra toda quase homogênea, no extremo fixo é menor que 0,36 °C

4. Conclusões

O problema de transferência de calor em uma barra de aço-carbono em regime transiente com condições de primeira e segunda espécie foi resolvido analiticamente de modo formal pelo método de separação de variáveis. Uma solução numérica foi proposta envolvendo o esquema de diferenças finitas com o método de Crank-Nicolson. Esse método embora exija um elevado esforço computacional, tem a vantagem de ser incondicionalmente estável. Uma primeira discretização com apenas 4 pontos interiores mostrou que a

solução numérica apresentava um maior desvio em relação à região de contorno isolada e de maior gradiente de temperatura, o que pode ser creditado ao fato de que a derivada avançada usada para modelar a condição de contorno nessa região dada pelo isolamento térmico ter erro de ordem mais elevada. Aumentando a discretização para 8 pontos notou-se, que a dissipação da solução nessa região foi reduzida e uma boa concordância entre as temperaturas nos nós da malha utilizados como referência foi obtida com as soluções analíticas. Com o refinamento das malhas espacial e temporal foi verificado uma concordância entre as soluções numérica e analítica para o problema proposto.

Referências

- [1] BOYCE, W. E; DiPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 6 Edição. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999
- [2] DAVIS, H. F. Fourier Series and Orthogonal Functions. Dover Publications, Inc. New York, 1963.
- [3] MALISKA, C. R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Coordenadas Generalizadas. 1 Edição. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985
- [4] MENZALA, G. P., Introdução às Equações Diferenciais Parciais. 11º colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas, 1977. Impa.
- [5] OZISIK, M. N. Heat Transfer A Basic Approach. MacGraw-Hill Book Company., 1985.
- [6] SANDERSON, L.G., ARAÚJO J.C. et al. Simulações do resfriamento de Chapas de aço em laminação controlada, Matéria, Vol. 9, N.1 (2004) 43-54.
- [7] SCARBOROUGH, J.B. Numerical Mathematical Analysis. Johns Hopkins Press, 1958.
- [8] SILVA NETO, A. J.; VASCONCELLOS, J.F.V. Uma introdução aos Métodos de Diferenças Finitas e Volumes Finitos com Aplicações em Transferência de Calor e Massa, LEMA, IPRJ, Nova Friburgo, RJ, 2002.
- [9] WENDLANDER, E. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas subterrâneas. São Carlos, SP: SBMAC, 2003 xii, 95 p. Notas em Matemática Aplicada; 3 (disponível em www.sbmac.org.br/boletim/pdf_2003/livro_03_2003.pdf)
- [10] EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS. Disponível www.ime.uerj.br/~calculo/LivroV/edp.pdf (acessado em nov/2012).