

# CONTACTO E CURVAS PLANAS\*

MAURICIO A. VILCHES\*\*

## Resumo

Diferentes fenômenos ocorrem naturalmente nas curvas planas e são de interesse em Topologia, Teoria das Catástrofes, Geometria Algébrica e em Computação Gráfica. Nestas notas, apresentaremos, através da teoria do contacto, uma abordagem totalmente elementar de alguns destes fenômenos, acessíveis aos alunos. Essencialmente, utilizaremos derivadas de primeira, segunda e terceira ordem e algumas noções elementares de Geometria Diferencial.

## 1 Contacto

Sejam  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  uma curva,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização local de classe  $C^k$  de  $\Gamma$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo e  $p_0 = \gamma(t_0)$  um ponto regular. Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^k$  tal que 0 é ponto regular, então pelo Teorema da Função Implícita,  $F^{-1}(0)$  é uma subvariedade de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^n$ , de codimensão 1. Consideremos a função  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ , definida por  $g(t) = F(\gamma(t))$ .

**Definição 1** A curva  $\Gamma$  e a subvariedade  $F^{-1}(0)$  tem contacto de ordem  $k \geq 0$  em  $t_0$  se a função  $g$  satisfaz simultaneamente a:

$$\begin{cases} g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0, \\ g^{(k)}(t_0) \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $g^{(n)}(t)$  é a derivada de ordem  $n$  de  $g$  em  $t$  e por definição  $g^{(0)} = g$ .

Em Teoria das Singularidades é comum utilizar a notação de Arnol'd: A curva  $\Gamma$  e a subvariedade  $F^{-1}(0)$  tem contacto de ordem  $k \geq 0$  em  $t_0$  se, e somente se  $t_0$  é uma  $A_{k-1}$ -singularidade da função  $g$ . Consideremos  $\Gamma$  a curva parametrizada por  $\gamma(t) = (t, t^k)$  com  $k \in \mathbb{N}$  e  $F(x, y) = y$ ; então,  $g(t) = F(\gamma(t)) = t^k$ ,  $g'(t) = k t^{k-1}$ ,  $g''(t) = k(k-1)t^{k-2}$  e  $g^{(k)}(t) = k!$ . Logo, a curva tem contacto de ordem  $k$  com o eixo dos  $x$  na origem ( $t_0 = 0$ ). Note que à medida que  $k$  cresce, a curva aumenta o contacto com o eixo dos  $x$ . Se a curva  $\Gamma$  e a subvariedade  $F^{-1}(0)$  tem contacto de ordem  $k \geq 0$  em  $t_0$ , então  $g(t) = (t - t_0)^k g_1(t)$ , onde  $g_1(t_0) \neq 0$  se  $g^{(k)}(t_0) \neq 0$ .

**Proposição 1** A ordem dos pontos de contacto é invariante por isometrias.

*Prova:* Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma isometria. Consideremos  $\beta = A \circ \gamma$  uma reparametrização de  $\gamma$  e  $h = F \circ A^{-1}$ ; então,  $h(\beta(t)) = F(A^{-1}(A(\gamma(t))) = F(\gamma(t)) = g(t)$ .  $\square$

\*Palavras chaves: Curvas Planas, Singularidades, Geometria Diferencial

\*\*Departamento de Análise, IME/UERJ, mauricio@ime.uerj.br

Em particular a ordem dos pontos de contacto é invariante por translações e rotações. A regularidade do ponto de contato não pode ser omitida na proposição 1. Por exemplo, consideremos  $\Gamma$  parametrizada por  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$  e  $F(x, y) = x^2 + 2x - y^2$ ; então  $g(t) = t^4 + 2t^2 - t^6$ . Logo, as curvas tem contacto de ordem 4 na origem; reparametrizando  $\gamma$  por  $\gamma_1(t) = (t^6, t^9)$ , as curvas apresentam contacto de ordem 12.

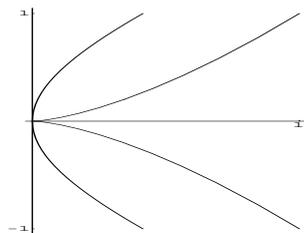


Figura 1: A origem não é ponto regular das parametrizações  $\gamma$  e  $\gamma_1$ .

**Proposição 2** *A ordem dos pontos de contacto é independente da parametrização.*

*Prova:* Seja  $\beta$  outra parametrização de  $\Gamma$ ; suponhamos que  $\beta$  seja parametrizada pelo comprimento de arco e que  $\beta'(s) > 0$ , (caso contrário consideramos  $\beta_1(s) = \beta(-s)$ , pois, pela proposição 1, a ordem dos pontos de contacto não muda por isometrias). Denotemos por:

$$w(s) = F(\beta(s)) = F(\beta(t(s))) = g(t(s)),$$

onde  $t = t(s)$  é a inversa local de  $s = s(t)$ . Logo:

$$\begin{aligned} w'(s) &= g'(t(s)) \frac{dt}{ds}, \\ w''(s) &= g''(t(s)) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + g'(t(s)) \frac{d^2t}{ds^2}, \\ &\vdots \\ w^{(k)}(s) &= g^{(k)}(t(s)) O^k(t) + g^{(k-1)}(t(s)) O^{k-1}(t) + \dots + g'(t(s)) O^1(t). \end{aligned}$$

Onde  $O^k(t)$  são expressões que envolvem derivadas de  $t = t(s)$  de ordem  $k$ . Utilizando indução e tendo em vista que  $\frac{dt}{ds} \neq 0$ , temos:  $w(s_0) = w'(s_0) = \dots = w^{(m)}(s_0) = 0$  e  $w^{(m+1)}(s_0) \neq 0$ , onde  $s_0 = t(s_0)$  se, e somente se  $g(s_0) = g'(s_0) = \dots = g^{(m)}(s_0) = 0$  e  $g^{(m+1)}(s_0) \neq 0$ .  $\square$

## 2 Inflexões e Vértices

Nestas notas estudaremos apenas o contacto entre curvas e retas e entre curvas e círculos. Sejam  $\mathbf{p}$  e  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ . Considere as seguintes funções:

$$F_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{e} \quad F_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{p}\|^2.$$

$F_1$  e  $F_2$  são funções de classe  $C^k$ . Em ambas as funções, 0 é um valor regular. No caso  $n = 2$ ,  $F_1^{-1}(0)$  é uma reta passando por  $\mathbf{p}$  perpendicular a  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $F_2^{-1}(0)$  é um círculo centrado em  $\tilde{\mathbf{u}}$  passando por  $\mathbf{p}$ .  $\Gamma$  e  $F_i$ , ( $i = 1, 2$ ) tem um ponto de contacto de ordem 1 em  $t_0$ , isto é  $g(t_0) = 0$  se, e somente se  $\gamma(t_0)$  pertence a  $F_i^{-1}(0)$ , ( $i = 1, 2$ ). A equação da reta tangente a  $\Gamma$  no ponto  $p_0$  é  $(\gamma(t) - p_0) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0 = 0$ , onde  $\tilde{\mathbf{n}}_0$  é o vetor normal a  $\Gamma$  no ponto  $p_0 = \gamma(t_0)$ .

**Proposição 3** *A reta tangente a  $\Gamma$  no ponto  $p_0 \in \Gamma$  é a única reta que passa por  $p_0$  e que tem contacto de ordem  $k \geq 2$ .*

*Prova : Consideremos*

$$g(t) = F_1(\gamma(t)) = (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

Então,  $g'(t) = \gamma'(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ . Logo,  $g'(t_0) = 0$  se, e somente se  $\gamma'(t_0)$  e  $\tilde{\mathbf{u}}$  são ortogonais, ou seja, se, e somente se  $\tilde{\mathbf{u}}$  é paralelo a  $\tilde{\mathbf{n}}_0$ . Como  $F_1^{-1}(0)$  é uma reta passando por  $\gamma(t_0)$  perpendicular a  $\tilde{\mathbf{n}}_0$ . Logo, temos que a reta tangente a  $\Gamma$  em  $\gamma(t_0)$  é a única reta que passa por  $\gamma(t_0)$  e que tem contacto de ordem  $k \geq 2$ . Em particular, qualquer outra reta que passe por  $\gamma(t_0)$  tem contacto de ordem 1 com  $\Gamma$ .  $\square$

**Definição 2** *O ponto regular  $p_0 \in \Gamma$  é um ponto de inflexão ordinário (respectivamente, degenerado) simples de  $\Gamma$  se é um ponto de contacto de ordem 3 (respectivamente, de ordem  $\geq 4$ ) com a reta tangente a  $\Gamma$  no ponto  $p_0$ . Em tal caso dizemos que  $\Gamma$  tem um ponto de inflexão simples em  $t_0$ .*

A continuação daremos uma caracterização geométrica dos pontos de inflexão de uma curva regular.

**Proposição 4**  *$p_0$  é um ponto de inflexão simples de  $\Gamma$  se, e somente se  $\gamma'(t_0)$  é paralelo a  $\gamma''(t_0)$  e  $\gamma^{(3)}(t_0)$  não é paralelo a  $\gamma'(t_0)$ .*

*Prova:* Seja  $g(t) = F_1(\gamma(t)) = (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0$ , então:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \gamma'(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0 \\ g''(t) &= \gamma''(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0; \end{aligned}$$

$g''(t_0) = \gamma''(t_0) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0 = 0$  se, e somente se  $\gamma''(t_0)$  é ortogonal a  $\tilde{\mathbf{n}}_0$ . Então, num ponto de contacto de ordem 3, temos que  $g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = 0$  se, e somente se  $\gamma'(t_0)$  e  $\gamma''(t_0)$  são paralelos. Analogamente, derivando novamente  $g^{(3)}(t_0) = \gamma^{(3)}(t_0) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0$ . Logo, temos que  $g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = g^{(3)}(t_0) = 0$  se, e somente se  $\gamma^{(3)}(t_0)$  é ortogonal a  $\tilde{\mathbf{n}}_0$  e não é paralelo a  $\gamma'(t_0)$  se, e somente se  $\gamma^{(3)}(t_0)$  e  $\gamma''(t_0)$  são paralelos. Note que  $\gamma^{(3)}(t_0)$  pode ser nulo.  $\square$

Denotaremos a parametrização de  $\Gamma$  por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e por  $x', y'$  as derivadas de  $x$  e  $y$  em  $t$ . Com estas notações, o vetor normal a  $\gamma$  em  $t_0$  é  $\tilde{\mathbf{n}}_0 = (-y'(t_0), x'(t_0))$ .

Seja  $\gamma(t) = (t - 3t^2, 2t + 3t^3)$ , então  $\gamma'(t) = (1 - 6t, 2 + 9t^2) \neq \vec{0}$  e  $\gamma''(t) = (-6, 18t)$ . Logo  $\gamma'$  e  $\gamma''$  são paralelas num ponto  $t_0$  se, e somente se  $\gamma''$  é ortogonal a  $\tilde{\mathbf{n}}_0$  em  $t_0$ , isto é  $12 - 54t^2 + 18t = 0$ ; então

$6(3t_0 - 2)(3t_0 + 1) = 0$ . Logo,  $\gamma''$  é ortogonal a  $\tilde{\mathbf{n}}_0$  em  $t_0 = -1/3$  e  $t_0 = 2/3$ . Por outro lado, derivando novamente  $\gamma^{(3)}(t) = (0, 18)$ ,  $\gamma''(2/3) = (-6, 12)$  e  $\gamma''(-1/3) = (-6, -6)$ . Então  $\gamma$  tem pontos de inflexão simples em  $t_0 = -1/3$  e  $t_0 = 2/3$ .

**Definição 3** O ponto regular  $p_0 \in \Gamma$  é um vértice ordinário (respectivamente, degenerado) se é um ponto de contacto de ordem 4 (respectivamente, de ordem  $\geq 5$ ) com  $F_2^{-1}(0)$ . Em tal caso dizemos que  $\Gamma$  tem um vértice em  $t_0$ .

Por exemplo, a curva  $\gamma(t) = (t, t^2)$  possui um vértice na origem, isto é  $p = \vec{0}$ . De fato, consideremos  $g(t) = (F_2 \circ \gamma)(t) = \|\gamma(t) - p\|^2$ , então  $g(t) = t^2 + t^4$ . Nos próximos parágrafos daremos uma interpretação geométrica para o caso de um ponto ser vértice de uma curva. Intuitivamente, num vértice a curva é mais "arredondada".

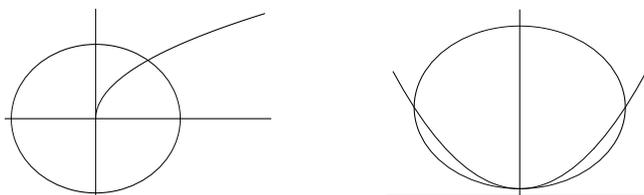


Figura 2: Contacto de ordem 1 e de ordem 4

**Observação 1** Seja  $g(t) = (F_2 \circ \gamma)(t) = \|\gamma(t) - p\|^2$ .

1. Se  $g(t_0) = 0$ , então  $\Gamma$  intersecta o círculo  $F_2^{-1}(0)$  no ponto  $\gamma(t_0)$ ; logo, as curvas possuem pelo menos um ponto de contacto de ordem 1.
2. Note que as tangentes ao círculo e a  $\Gamma$  em  $t_0$ , são diferentes.
3. Por outro lado,  $g'(t) = 2(\gamma(t) - p) \cdot \gamma'(t)$ ; se  $\gamma(t_0)$  é regular e  $g(t_0) = g'(t_0) = 0$ , então  $\Gamma$  intersecta o círculo  $F_2^{-1}(0)$  no ponto  $\gamma(t_0)$  e a reta tangente a  $\gamma$  é ortogonal ao raio do círculo, isto é,  $\Gamma$  e  $F_2^{-1}(0)$  tem a mesma reta tangente passando por  $\gamma(t_0)$ ; logo, as curvas possuem pelo menos um ponto de contacto de ordem 2 em  $t_0$ .

Denotemos por:

$$g_h(t) = \gamma(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{e} \quad g_d(t) = \|\gamma(t) - \tilde{\mathbf{u}}\|^2.$$

A função  $g_h$  é chamada altura e mede a distância de  $\gamma$  à reta que passa pela origem e é perpendicular a  $\tilde{\mathbf{u}}$ . A função  $g_d$  é chamada quadrado da distância.

A prova da seguinte proposição segue diretamente das definições e as observações anteriores.

**Proposição 5** 1.  $\Gamma$  possui em  $t_0$  contacto de ordem  $k$  com sua reta tangente em  $\gamma(t_0)$  sendo  $\tilde{\mathbf{u}}$  perpendicular a  $\gamma'(t_0)$  se, e somente se:

$$g_h^{(i)}(t_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1 \quad \text{e} \quad g_h^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

Em particular  $\Gamma$  possui um ponto de inflexão ordinário em  $t_0 \Leftrightarrow k = 3$ .

2.  $\Gamma$  possui em  $t_0$  contacto de ordem  $k$  com o círculo centrado em  $\tilde{\mathbf{u}}$  passando por  $\gamma(t_0)$  se, e somente se:

$$g_d^{(i)}(t_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1 \quad \text{e} \quad g_d^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

Em particular  $\Gamma$  possui um vértice ordinário em  $t_0 \Leftrightarrow k = 4$ .

### 3 Contacto e Curvatura

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  uma parametrização local de classe  $C^k$  de  $\Gamma$ . Para todo  $t \in I$  existem os vetores  $\tilde{\mathbf{t}}(t) = (x'(t), y'(t))$  e  $\tilde{\mathbf{n}}(t) = (-y'(t), x'(t))$  ortogonais tais que  $\{\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{n}}\}$  é uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$ ; logo,  $\tilde{\mathbf{t}}'$  e  $\tilde{\mathbf{n}}$  devem ser paralelos. A curvatura (com sinal) de  $\Gamma$  no ponto  $\gamma(t)$  é denotada e definida por  $\tilde{\mathbf{t}}'(t) = k(t) \tilde{\mathbf{n}}(t)$ . Como  $k(t) = \tilde{\mathbf{t}}'(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(t)$ , então:

$$k(t) = \frac{\gamma''(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

$k = k(t)$  é uma função com a mesma classe de diferenciabilidade de  $\Gamma$ . Intuitivamente a curvatura é uma medida do afastamento da curva de sua reta tangente. Na verdade, não é difícil provar que  $\Gamma$  tem curvatura zero se, e somente se é uma reta. A curvatura é intrínseca. De fato, suponha que  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco; então:

$$(\gamma' \ \gamma'') = (\mathbf{t} \ \mathbf{n}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

onde todas as funções são calculadas em  $t$ . Logo,  $k = \det(\gamma', \gamma'')$ . Seja  $I$  uma isometria e  $\beta = I \circ \gamma$ ; então  $I(\gamma', \gamma'') = (\beta', \beta'')$ . Como  $\det(I) = 1$  temos que:

$$k(\gamma) = \det(\gamma' \ \gamma'') = \det(I) \det(\beta', \beta'') = k(\beta).$$

**Definição 4** Um ponto regular de  $\Gamma$  é de ondulação simples em  $t_0$ , se  $k(t_0) = k'(t_0) = 0$  e  $k''(t_0) \neq 0$ .

Seja  $\gamma(t) = (t, f(t))$ , onde  $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ , então  $k(t_0) = k'(t_0) = 0$  e  $k''(t_0) \neq 0$  é equivalente a  $f''(t_0) = f^{(3)}(t_0) = 0$  e  $f^{(4)}(t_0) \neq 0$ . Se  $f(t) = t^k$ , então  $\gamma$  tem um ponto de inflexão em  $t_0 = 0$ ; o ponto é de ondulação se, e somente se  $k \geq 4$ .

#### 3.1 Função Altura

Seja a função altura  $g_h(t) = \gamma(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ ; então,  $g_h'(t) = \gamma'(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$  e  $g_h''(t) = \gamma''(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ . Se  $\|\tilde{\mathbf{t}}(t)\| = 1$ , então:

$$\begin{aligned} g_h'(t) &= \tilde{\mathbf{t}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ g_h''(t) &= k(t) \tilde{\mathbf{n}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \\ g_h^{(3)}(t) &= (k'(t) \tilde{\mathbf{n}}(t) + k(t) \tilde{\mathbf{n}}'(t)) \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Note que não perdemos a generalidade ao supor que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, pois a ordem de contacto independe da parametrização das curvas.

**Proposição 6**  $\Gamma$  tem um ponto de inflexão ordinário em  $t_0$  se, e somente se  $k(t_0) = 0$  e  $k'(t_0) \neq 0$  e o ponto é degenerado se, e somente se  $k(t_0) = k'(t_0) = 0$ .

*Prova:* Então,  $g_h'(t_0) = 0$  se, e somente se  $\tilde{\mathbf{u}} = \lambda \tilde{\mathbf{n}}_0$ , onde  $\lambda \neq 0$  e  $g_h''(t_0) = 0$  se e somente se  $k(t) \tilde{\mathbf{n}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ . Logo,  $g_h'(t_0) = g_h''(t_0) = 0$  se e somente se  $\lambda k(t_0) = 0$ ; isto é,  $g_h'(t_0) = g_h''(t_0) = 0$  se, e somente se  $k'(t_0) = 0$ . Por outro lado, se  $g_h'(t_0) = g_h''(t_0) = 0$ , então  $g_h^{(3)}(t_0) = \lambda k'(t_0)$ , no ponto de inflexão ordinário temos que  $k'(t_0) \neq 0$  e no caso degenerado  $k'(t_0) = 0$ .  $\square$

Denotando  $k(t) = P(t)Q(t)$  tal que  $Q(t) \neq 0$ , temos que  $k(t) = 0$  se, e somente se  $P(t) = 0$ . Por outro lado,  $k'(t) = P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)$ ; então se  $k(t) = 0$ , temos que  $k'(t) = 0$  se, e somente se  $P'(t) = 0$ . Analogamente, se  $k(t) = k'(t) = 0$ , temos que  $k''(t) = 0$  se, e somente se  $P''(t) = 0$ .

**Observação 2** Se  $\Gamma$  é uma curva regular:

1. Como  $P(t) = -\gamma'(t) \cdot \mu(t)$ , onde  $\mu(t) = (-y''(t), x''(t))$ . Temos que  $P(t_0) = 0$  se, e somente se  $\gamma''(t_0)$  é paralelo a  $\gamma'(t_0)$ .
2. Como  $P'(t) = -\gamma''(t) \cdot \mu(t) - \gamma'(t) \cdot \mu'(t) = -\gamma'(t) \cdot \mu'(t)$ . Logo,  $P'(t_0) \neq 0$  se, e somente se  $\gamma'(t_0)$  for paralelo a  $\gamma^{(3)}(t_0)$ .
3. Um ponto regular de  $\Gamma$  é de ondulação simples em  $t_0$  se, e somente se  $\gamma'(t_0)$ ,  $\gamma''(t_0)$  e  $\gamma^{(3)}(t_0)$  são paralelos e  $\gamma^{(4)}(t_0)$  não é paralelo a  $\gamma'(t_0)$ .
4. Como  $\gamma'(t_0)$ ,  $\gamma''(t_0)$  e  $\gamma^{(3)}(t_0)$  são paralelos,  $P''(t_0) \neq 0$  se, e somente se  $\gamma'(t_0)$  não é paralelo a  $\gamma^{(4)}(t_0)$ .

A curva  $\gamma(t) = (t^2/2, t + t^3/3)$ , é tal que  $P(t) = t^2 - 1$  e  $P'(t) = 2t$ . Logo,  $P(t_0) = 0$  se, e somente se  $t_0 = \pm 1$ ; por outro lado,  $P'(\pm 1) = \pm 2$ ; então  $t_0 = -1$  e  $t_0 = 1$  são pontos de inflexão simples. A curva não possui pontos de ondulação.

**Sinal da Curvatura :** Seja  $g_h(t) = \gamma(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0$ ; então  $g(t_0) = g'_h(t_0) = 0$  e  $g''_h(t_0) = k(t_0)$ . Se  $k(t_0) > 0$ , então  $g_h$  possui um ponto de mínimo local em  $t_0$ . Logo, numa vizinhança de  $t_0$ , a curva está contida no semiplano determinado pela reta tangente à curva no ponto  $t_0$ , para o qual aponta o vetor normal  $\tilde{\mathbf{n}}_0$ . Analogamente, considerando  $-k(t_0)$  temos que  $g_h$  possui um ponto de máximo local em  $t_0$ . Logo, numa vizinhança de  $t_0$ , a curva está contida no semiplano determinado pela reta tangente à curva no ponto  $t_0$  e para o qual aponta o vetor normal  $-\tilde{\mathbf{n}}_0$ .

### 3.2 Função Quadrado da Distância

Seja  $g_d(t) = \|\gamma(t) - \mathbf{u}\|^2$ . Então,  $g_d'(t) = 2(\gamma(t) - \mathbf{u}) \cdot \gamma'(t)$ ,  $g_d''(t) = 2[\gamma''(t) \cdot (\gamma(t) - \mathbf{u}) + \|\gamma'(t)\|^2]$  e  $g_d^{(3)}(t) = 2[3\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) - (\gamma(t) - \mathbf{u}) \cdot \gamma^{(3)}(t)]$ . Se  $\|\tilde{\mathbf{t}}(t)\| = 1$ , então,

$$\begin{aligned} g_d'(t) &= 2(\gamma(t) - \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{t}}(t), \\ g_d''(t) &= 2[k(t)\tilde{\mathbf{n}}(t) \cdot (\gamma(t) - \mathbf{u}) + 1], \\ g_d^{(3)}(t) &= 2[(k'(t)\tilde{\mathbf{n}}(t) + k(t)\tilde{\mathbf{n}}'(t)) \cdot (\gamma(t) - \mathbf{u})] \\ &= 2(\gamma(t) - \mathbf{u}) \cdot [k'(t)\tilde{\mathbf{n}}(t) - k^2(t)\tilde{\mathbf{t}}(t)]. \end{aligned}$$

**Proposição 7** *Se  $k(t_0) \neq 0$ , existe um (único) círculo que tem pelo menos ordem de contato 3 com  $\Gamma$ .*

*Prova:* Note que  $g(t_0) = g'(t_0) = 0$  se, e somente se  $(\gamma(t_0) - \mathbf{u}) = \lambda \tilde{\mathbf{n}}_0$  se, e somente se  $\mathbf{u}$  é paralelo à reta normal a  $\gamma$  em  $t_0$ . Por outro lado, se  $g(t_0) = g'(t_0) = 0$ , temos  $g''(t_0) = 2(\lambda k(t_0) + 1)$ . Logo, temos que  $g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = 0$  se, e somente se

$$\lambda = -\frac{1}{k(t_0)}, \quad \text{se } k(t_0) \neq 0.$$

Então,  $\|\gamma(t_0) - \mathbf{u}\|^2 = 1/k^2(t_0)$ .

Este círculo é chamado de círculo de curvatura ou osculador de  $\Gamma$ ; seu centro  $\gamma(t_0) + \tilde{\mathbf{n}}(t_0)/k(t_0)$  é dito centro de curvatura e o raio  $\rho(t_0) = 1/k(t_0)$  raio de curvatura.

**Corolário 1** *O ponto  $t_0$  é um vértice de  $\Gamma$  se, e somente se  $k = k(t)$  tem um ponto crítico em  $t_0$  tal que  $k(t_0) \neq 0$ .*

Seja  $\Gamma$  a parábola parametrizada por  $\gamma(t) = (t, at^2)$ ,  $t, a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ . Então

$$k(t) = \frac{2a}{R(t)^{3/2}}, \quad k'(t) = -\frac{24a^3t}{R(t)^{5/2}} \quad \text{e} \quad k''(t) = \frac{24a^3(-1 + 16a^2t^2)}{R(t)^{7/2}},$$

onde  $R(t) = 1 + 4a^2t^2$ . Logo, a parábola não possui pontos de inflexão e possui um vértice na origem. Logo, se  $k = k(t)$  possui um ponto de máximo ou de mínimo, então, necessariamente devem ser vértices. A seguir, apresentaremos um teorema clássico para curvas fechadas. Nós apresentaremos uma versão particular para curvas convexas. Lembramos que uma curva é convexa se está totalmente contida num dos semiplanos determinado por qualquer reta tangente a um ponto da curva. Equivalentemente, se para todo  $t$ , a função:

$$g(t) = F_1(\gamma(t)) = (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0(t),$$

não muda de sinal.

**Teorema 1 (dos Quatro Vértices)** *Toda curva fechada convexa em  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  possui pelo menos 4 vértices.*

*Prova :* Sem perda de generalidade podemos supor que  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja  $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Também podemos supor que a função  $k = k(t)$  possui um conjunto finito de pontos críticos; caso contrário, não temos nada a provar. Por outro lado a função contínua  $k = k(t)$  está definida num compacto, logo  $k = k(t)$  atinge seu valor máximo e seu valor mínimo. Se os valores extremos são atingidos em 0 e  $t_0$  tal que  $0 < t_0 < l$ , fazendo uma rotação e uma translação podemos supor que  $p = \gamma(0)$  e  $q = \gamma(t_0)$ , estão ao longo do eixo dos  $x$ . O segmento de reta que liga  $p$  a  $q$  divide  $\gamma$  em dois segmentos cada um deles contido num dos semiplanos determinado pelo segmento de reta. Afirmamos que não existem outros pontos de  $\gamma$  ao longo do eixo dos  $x$ . De fato, se existir  $r = \gamma(t_1)$  diferente de  $p$  e  $q$ , consideremos as retas tangentes a  $\gamma$  passando por  $p$ ,  $q$  e  $r$ . A tangente que se situar entre os outros dois, necessariamente deve ser o eixo dos  $x$ , pois caso contrário haveria pontos de  $\gamma$  em lados opostos dessa reta, o que contradiz a convexidade de  $\gamma$ . Logo, as retas tangentes a  $\gamma$  passando por  $p$  e  $q$  também são o eixo dos  $x$  o que implica em  $\gamma([0, t_0])$  ser um segmento de reta. Isto contradiz o fato de que  $k = k(t)$  possui um conjunto finito de pontos críticos. Suponha que  $p$  e  $q$  são os únicos vértices de  $\gamma$ , então:

$$k(t) = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } t \in [0, t_0] \\ \leq 0 & \text{se } t \in [t_0, l]. \end{cases}$$

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ; então a função  $y = y(t)$  não pode anular-se em  $(0, t_0)$  e  $y = -y(t)$  não pode anular-se em  $(t_0, l)$ ; o mesmo acontece com  $k' = k'(t)$  se  $\gamma$  não tiver mais de dois vértices. Logo, nesta hipótese, a função  $k'(t)y(t)$  tem sinal constante, anulando-se apenas em 0,  $l$  e  $t_0$ ; logo:

$$\int_0^l k'(t)y(t) dt = - \int_0^l k(t)y'(t) dt = - \int_0^l x''(t) dt = 0.$$

Como o integrando é não negativo, temos que  $k'(t)y(t) = 0$ ; logo,  $y(t) = 0$  para todo  $t$ , o que é uma contradição. Portanto, a função  $k = k(t)$  tem outro ponto tal que  $k' = k'(t)$  muda de sinal, ou seja é um vértice. Como os pontos extremos são aos pares, existem pelo menos 4 vértices.  $\square$

Seja a elipse  $\Gamma$  parametrizada por  $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ; a elipse é fechada e convexa. Por outro lado:

$$k(t) = \frac{ab}{R(t)^{3/2}} \quad \text{e} \quad k'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin(2t)}{2R(t)^{5/2}}.$$

Onde  $R(t) = b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)$ . Logo,  $k(t) \neq 0$  para todo  $t$ . Se  $a = b$ , todos os pontos são vértices. Logo, num círculo todos os pontos são vértices. A elipse possui 4 pontos de vértices. Estes vértices ocorrem em  $t = 0$ ,  $t = \pi/2$ ,  $t = \pi$  e  $t = 3\pi/2$ . Não é difícil verificar que  $k(0) = k(\pi) = a/b^2$  e  $k(\pi/2) = k(3\pi/2) = b/a^2$ .

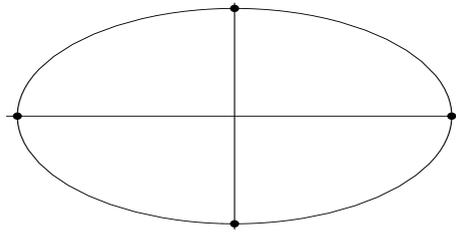


Figura 3: Vértices da elipse

Consideremos a família a 2-parâmetros de limaçons:  $\gamma(t) = (a + b \cos(t)) e^{it}$ , ( $a, b > 0$ ). Então,  $\gamma'(t) = e^{it} (-b \sin(t) + i(a + b \cos(t)))$ ; logo a curva não é regular nos pontos  $t$  tais que:

$$\begin{cases} \sin(t) & = 0 \\ a + b \cos(t) & = 0. \end{cases}$$

Isto é,  $a = b$  e  $t_0 = \pi$ . Determinemos os pontos de inflexão. Num ponto regular,  $k(t) = 0$  se, e somente se  $P(t) = 0$ ; isto é:

$$P(t) = 3ab \cos(t) + a^2 + 2b^2.$$

Como  $|\cos(t)| \leq 1$ , temos que  $k(t) = 0$  se, e somente se  $a^2 + 2b^2 \leq 3ab$  se, e somente se

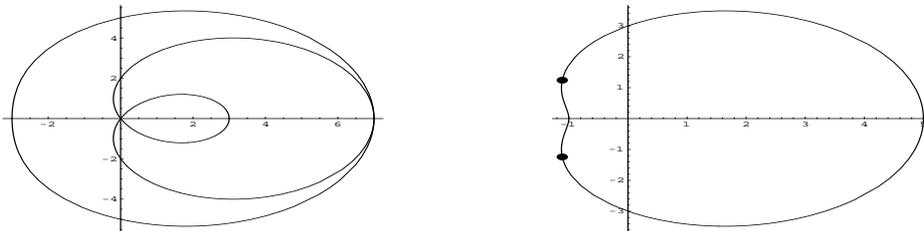
$$b \leq a \leq 2b.$$

Por outro lado, num ponto regular  $k(t) = k'(t) = 0$  se, e somente se  $P(t) = P'(t) = 0$ ; isto é:

$$\begin{cases} \sin(t) & = 0 \\ a^2 + 2b^2 + 3ab \cos(t) & = 0. \end{cases}$$

Se  $t = \pi$ , então  $(a - 2b)(a - b) = 0$ ; logo,  $a = b$  e o ponto não é regular. Então  $k(t) = k'(t) = 0$  se, e somente se  $t = \pi$  e  $a = 2b$ . Concluindo:

Se  $a < b$ ,  $a > 2b$  ou  $a = b$ , então  $\Gamma$  não possui pontos de inflexão. Se  $b < a < 2b$ , então existem 2 pontos de inflexão simples, dadas pelas soluções de  $\cos(t) = -(a^2 + 2b^2)/3ab$ .

Figura 4:  $\Gamma$  sem inflexões e para  $a = 3$  e  $b = 2$  e os pontos de inflexão

Se  $a = 2b$ , então existe um ponto de ondulação em  $t = \pi$ .

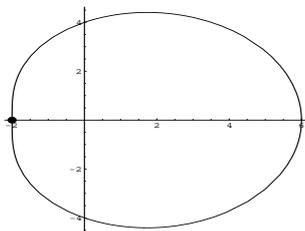


Figura 5:  $\Gamma$  para  $a = 4$  e  $b = 2$  e o ponto de ondulação.

Determinemos os vértices. Denotemos  $k'(t) = S(t)/M(t)$ , onde  $S(t) = 3ab^2 \operatorname{sen}(t)(b + a \cos(t))$ .

Se  $b < a$ , existem quatro vértices dados por  $t = 0$ ,  $t = \pi$  e pelas soluções de  $\cos(t) = -b/a$ . Se  $a = b$ , existe um vértice em  $t = 0$ ; pois se  $t = \pi$  a curva não é regular.

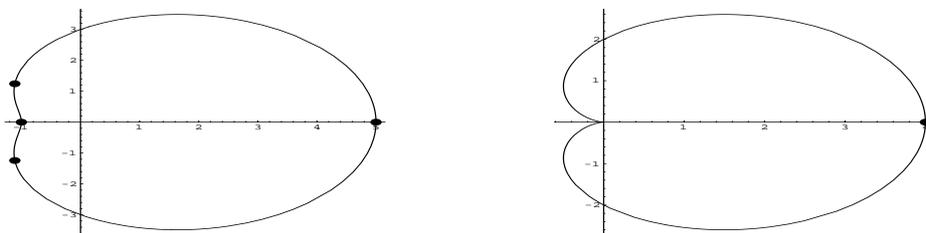


Figura 6:  $\Gamma$  para  $a = 3$  e  $b = 2$ ,  $a = b = 2$  e os vértices

Se  $b > a$  existem dois vértices em  $t = 0$  e em  $t = \pi$ . Pois  $\cos(t) = -a/b$  não tem solução.

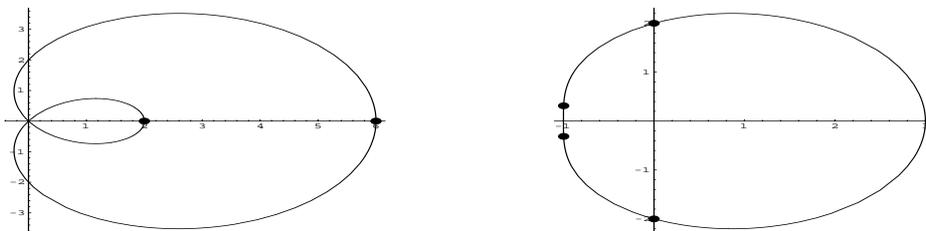


Figura 7:  $\Gamma$  para  $a = b = 2$ ,  $a = 2$  e  $b = 1$  e os vértices

## 4 Cúspides

Neste parágrafo apresentamos um fenômeno clássico que aparece com mais frequência na Teoria das Catástrofes e em Computação Gráfica. Por exemplo, quando se constroem as curvas offset (paralelas) a uma curva dada.

**Definição 5** Seja  $p_1$  um ponto singular de  $\Gamma$ :

1.  $p_1$  é uma cúspide ordinária de  $\Gamma$  se  $\gamma''(t_0) \neq 0$  e  $\gamma^{(3)}(t_0)$  não é paralelo a  $\gamma''(t_0)$ .

2.  $p_1$  é uma cúspide extraordinária de  $\Gamma$  se  $\gamma''(t_0) \neq 0$  e  $\gamma^{(3)}(t_0)$  é paralelo a  $\gamma''(t_0)$ .

3. A reta que passa por  $p_1 = \gamma(t_1)$  e é paralela a  $\gamma''(t_1)$  é dita reta tangente cuspidal em  $p_1$ . Isto é:

$$c(s) = p_1 + s\gamma''(t_1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Note que num ponto singular  $t_1$  de  $\Gamma$ , temos que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |k(t)| = +\infty.$$

A curva parametrizada por  $\gamma(t) = (t^2, t^5)$  possui uma cúspide extraordinária na origem. Para a curva parametrizada por  $\gamma(t) = (-2t^2 + t^4, -3t + t^3)$  temos que  $\gamma'(t_1) = \vec{0}$  se, e somente se  $t_1 = \pm 1$ ; isto é, tem pontos singulares em  $t_1 = 1$  e  $t_1 = -1$ . Por outro lado:  $\gamma''(t) = (12t^2 - 4, 6t)$  e  $\gamma^{(3)}(t) = (24t, 6)$ . Logo,  $\gamma''(1) = (8, 6)$ ,  $\gamma^{(3)}(1) = (24, 6)$  e  $\gamma''(-1) = (8, -6)$ ,  $\gamma^{(3)}(-1) = (-24, 6)$ , então  $\gamma$  possui cúspides ordinárias em  $t_1 = 1$  e  $t_1 = -1$ . As equações das retas tangentes cuspidais a  $\gamma$  nos pontos  $t_1 = 1$  e  $t_1 = -1$  são:  $c_1(s) = (8s - 1, 6s - 2)$  e  $c_2(s) = (8s - 1, -6s + 2)$ , respectivamente.

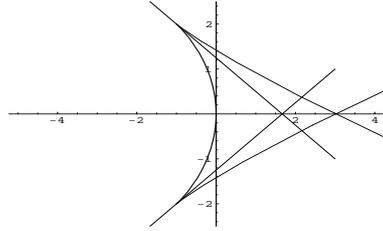


Figura 8:  $\gamma$  e as retas tangentes cuspidais.

**Proposição 8** Se  $\Gamma$  possui uma cúspide em  $t_1$ , então  $\Gamma$  tem contacto de ordem 2 com  $F_1^{-1}(0)$ , exceto para a reta tangente cuspidal em  $t_1$ , onde possui ordem de contacto  $k \geq 3$ .

*Prova:* Sabemos que  $\gamma'(t_1) = 0$  e  $\gamma''(t_1) \neq 0$ . Por outro lado, a equação de uma reta arbitrária, que passa por  $p_1$  é  $(r - p_1) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ , onde  $\tilde{\mathbf{u}} \neq \vec{0}$ . Consideremos  $g_h(t) = (\gamma(t) - p_1) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ . Então,  $g'(t_1) = \gamma'(t_1) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$  e  $g''(t) = \gamma''(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ ; logo,  $g'(t_1) = g''(t_1) = 0$  se, e somente se  $\gamma''(t_1)$  é perpendicular a  $\tilde{\mathbf{u}}$ , ou seja,  $g'(t_1) = g''(t_1) = 0$  se, e somente se a reta é cuspidal. A equação da reta cuspidal em  $t_1$  é  $(\gamma(t) - p_1) \cdot (-y''(t_1), x''(t_1)) = 0$ . Análogamente à argumentos anteriores, consideramos  $g(t) = (\gamma(t) - p_1) \cdot \eta(t_1)$ , onde  $\eta(t) = (-y''(t_1), x''(t_1))$ ; então:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \gamma'(t) \cdot \eta(t_1), \\ g''(t) &= \gamma''(t) \cdot \eta(t_1), \\ &\vdots \\ g^{(n)}(t) &= \gamma^{(n)}(t) \cdot \eta(t_1). \end{aligned}$$

Na cúspide  $\gamma'(t_1) = \gamma''(t_1) = 0$ ; logo, a curva tem contacto de ordem  $n \geq 3$  com a reta tangente cuspidal.  $\square$

Se  $t_1$  é uma cúspide de  $\gamma$ , então  $\gamma|_{[t_1-\varepsilon, t_1]}$  e  $\gamma|_{[t_1, t_1+\varepsilon]}$  são ditas ramificações de  $\gamma$ , onde  $\varepsilon > 0$ .  
 Numa cúspide de ordem par, as ramificações ficam do mesmo lado do semi-plano determinado pela reta tangente cuspidal. Numa cúspide de ordem ímpar, as ramificações ficam em lados opostos do semi-plano determinado pela reta tangente cuspidal. De fato, suponha que  $\gamma$  tem contato de ordem  $k$  com a reta tangente cuspidal; então:

$$g(t) = (t - t_1)^{k+2}\Psi(t)$$

onde  $\Psi(t_1) \neq 0$ . A função  $\Psi = \Psi(t)$  tem sinal constante em  $|t - t_1| < \varepsilon$ ; logo se  $k$  é ímpar,  $g$  tem sinais opostos em  $(t_1 - \varepsilon, t_1)$  e  $(t_1, t_1 + \varepsilon)$  e se  $k$  é par, então  $g$  não muda de sinal na vizinhança de  $t_1$ . A curva  $\gamma_1(t) = (t^2 + t^3, t^4)$  tem uma cúspide de ordem 2 na origem e  $\gamma_2(t) = (t^5, t^2)$  tem uma cúspide de ordem 5 na origem.

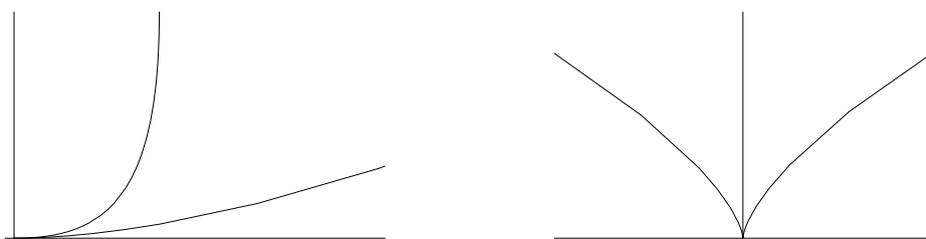


Figura 9: Ramificações de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$

Seja  $\Gamma$  e  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização regular. Com as notações anteriores, a curva offset ou paralela à distância  $d \in \mathbb{R}$  de  $\gamma$  é definida e denotada por:

$$\gamma_d(t) = \gamma(t) + d\tilde{\mathbf{n}}(t).$$

Sem perda de generalidade, consideramos  $\gamma$  parametrizada por comprimento de arco; logo:

$$\begin{aligned} \gamma_d'(t) &= \gamma'(t) + d\tilde{\mathbf{n}}'(t) = \gamma'(t) - dk(t)\gamma'(t) = (1 - dk(t))\gamma'(t), \\ \gamma_d''(t) &= (1 - dk(t))\gamma''(t) - d\gamma'(t)k'(t), \\ \tilde{\mathbf{n}}_d(t) &= (1 - dk(t))\tilde{\mathbf{n}}(t), \\ \gamma_d''(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_d(t) &= (1 - dk(t))^2\gamma''(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(t) = k(t)\|\gamma'(t)\|^3(1 - dk(t))^2, \\ \|\gamma_d'(t)\|^3 &= \|\gamma'(t)\|^3(1 - dk(t))^3. \end{aligned}$$

**Proposição 9** Com as notações anteriores

1.  $\gamma_d$  é regular se, e somente se  $d \notin \text{Im}(k)$ .

2. A curvatura de  $\gamma_d$  é:

$$k_d(t) = \frac{k(t)}{1 - dk(t)}.$$

3. Seja  $t_0$  um ponto regular que não é um vértice de  $\gamma$ . Se  $t_0$  é singular, então  $t_0$  é uma cúspide ordinária se, e somente se  $t_0$  não é um ponto de inflexão de  $\gamma$ .

As provas de 1. e 2 são imediatas.

3. Se  $\gamma_d'(t_0) = 0$ , então  $1 - dk(t_0) = 0$  e  $\gamma_d''(t_0) = -d\gamma'(t_0)k'(t_0) \neq 0$ . Por outro lado:

$$\gamma_d^{(3)}(t) = (1 - dk(t))\gamma^{(3)}(t) - 2d\gamma''(t)k'(t) - dk''(t)\gamma'(t).$$

Em particular, temos que  $\gamma_d^{(3)}(t_0) = -2d\gamma''(t_0) - dk''(t_0)\gamma'(t_0)$  e  $\gamma_d''(t_0) = -dk'(t_0)\gamma'(t_0)$ . Como  $dk'(t_0) \neq 0$ , então  $\gamma'(t_0)$  e  $\gamma''(t_0)$  são linearmente independentes se, e somente se  $\gamma_d'(t_0)$  e  $\gamma_d''(t_0)$  são linearmente independentes. Logo, é uma cúspide ordinária se, e somente se  $t_0$  não é ponto de inflexão de  $\gamma$ .

**Corolário 2** Um ponto de inflexão de  $\gamma$  que seja ponto regular de  $\gamma_d$  é ponto de inflexão de  $\gamma_d$ .

Consideremos a elipse parametrizada por  $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$  tal que  $a > b > 0$ . A parametrização é regular e possui 4 vértices, a saber  $t_0 = 0$ ,  $t_0 = \pi/2$ ,  $t_0 = \pi$  e  $t_0 = 3\pi/2$ . Como  $a > b$  temos que  $a/b^2 > b/a^2$ . Como os vértices são os pontos extremos de  $k = k(t)$ , temos que  $k(0) = a/b^2$  e  $k(\pi/2) = b/a^2$ . No intervalo  $(0, \pi/2)$ , temos  $k'(t) < 0$ . Logo a função  $k = k(t)$  decresce em  $[0, \pi/2]$ . Por outro lado:  $\pm 1/k_d(t) = 1/k(t) - d$ . Se  $b^2/a < d < a^2/a$ , a paralela à elipse possui uma cúspide em  $(0, \pi/2)$  e por simetria a curva possui 4 cúspides. Se  $d > a^2/b$  ou  $d < b^2/a$  a curva paralela à elipse é regular. No caso  $d = b^2/a$  a curva paralela à elipse é regular exceto nos pontos  $t_0 = 0$  e  $t_0 = \pi$ ; também temos que  $\gamma_d'(0) = \gamma_d''(0) = 0$  e  $\gamma_d^{(3)} = -dk(0)\gamma'(0) \neq 0$  e  $k''(0) < 0$ . Logo,  $t_0 = 0$  não é uma cúspide. Analogamente para  $t = \pi$ . Para  $d = a^2/b$  é análogo.  $\square$

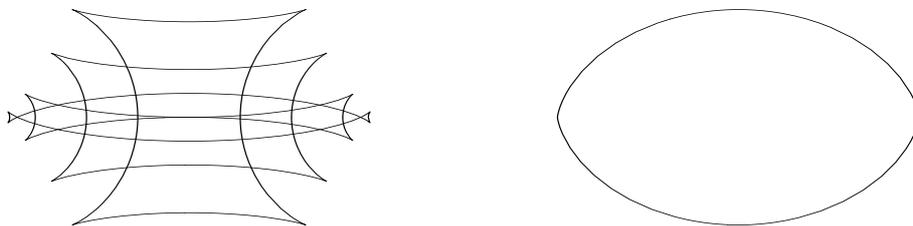


Figura 10: Curvas paralelas à elipse para  $b^2/a < d < a^2/a$  e  $d = b^2/a$

## Referências

- [BG] Banchoff, T - Gaffney, T - McCrory: *Cusps of Gauss Mappings*, Pitman Advances Pub. Prog.
- [G] Gibson, C: *Elementary Geometry of Differentiable Curves*, Cambridge, Univ. Press.