

CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
ISSN impresso 1413-9022 / ISSN on-line 2317-4536 - v.47, p.17 - 34, 2019
DOI: 10.12957/cadest.2019.51576

ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE CUSUM E EWMA: ESTUDO COMPARATIVO COM USO DE SIMULAÇÃO

Liane Werner

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

werner.liane@gmail.com

Aline da Silva Argenta

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

00095640@ufrgs.br

Felipe Soares

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

soarescmsa@gmail.com

Resumo: *Este trabalho apresenta um estudo comparativo dos gráficos de controle de soma cumulativa (CUSUM) e de médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA). O objetivo principal é o de estudar a influência dos parâmetros de controle de ambos os gráficos no desempenho de detecção de situações fora de controle, definido pelo Average Run Length (ARL). Simulações computacionais são efetuadas considerando diversos cenários, alterando os parâmetros dos gráficos de controle e alterando também os parâmetros do processo, para investigar o ARL. Verificou-se que o CUSUM obteve desempenho superior ao EWMA para pequenas alterações na média, até um desvio padrão do processo, enquanto o EWMA mostrou-se mais eficaz para alterações de maior magnitude. Além disso, foi verificado que o EWMA é superior quando há alterações simultâneas na média do processo e na sua variabilidade. As rotinas de simulação provaram-se úteis para estudar o comportamento do ARL de acordo com os parâmetros das cartas dos gráficos de controle e dos processos, sendo uma abordagem válida para o estudo e escolha dos parâmetros em aplicações reais.*

Palavras-chave: CUSUM; EWMA; simulação; gráficos de controle; ARL

1. Introdução

A melhoria e monitoramento da qualidade têm feito parte das preocupações das organizações, devido à grande competitividade do mercado. Segundo Montgomery (2009), para os consumidores a qualidade é um dos fatores mais relevantes para selecionar um produto ou serviço entre os que o mercado oferece.

Segundo You (2018) a melhoria da qualidade de produtos ou serviços pode ser obtida implementando o controle estatístico do processo (CEP) que apresenta um conjunto de ferramentas úteis para detectar mudanças no processo, tal como os gráficos de controle. Ainda conforme o autor, os primeiros gráficos de controle foram propostos por Shewart e são amplamente utilizados para quando se deseja captar grandes mudanças no processo. Porém quando pequenas mudanças nos processos de produção são de interesse, algumas ferramentas são mais adequadas. Em tal situação, o gráfico de controle da soma cumulativa (CUSUM) e o gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) são mais indicados (CHEN; ELSAYED, 2012).

Zwetsloot; Woodall (2017) abordam que o fato dos gráficos CUSUM e EWMA apresentarem desempenho muito semelhante é um consenso. Sendo assim, neste artigo será realizado um estudo dos dois gráficos, onde serão apresentadas abordagens baseadas em simulação computacional para verificar a influência dos parâmetros dos gráficos CUSUM e EWMA, em diferentes cenários.

O presente artigo está estruturado da seguinte forma: na seção dois será apresentado um breve referencial teórico dos gráficos CUSUM e EWMA. Na seção três o detalhamento do método utilizado para o desenvolvimento das simulações. A seção quatro abriga os resultados obtidos com a aplicação das simulações, além de uma breve discussão sobre os principais resultados encontrados. Na seção cinco é possível encontrar as conclusões sobre o presente artigo.

2 Gráficos de Controle

Os gráficos de controle desenvolvidos por Walter A. Shewhart são os mais conhecidos e amplamente aplicados, porém utilizam apenas a informação do último ponto plotado, ignorando a informação dada pela sequência de pontos observados. Isso faz com que, quando existem pequenas mudanças na média, da ordem de $1,5\sigma$ ou menos, a sensibilidade desses gráficos não seja suficiente para indicar a mudança. Como

alternativas para esse problema, foram estruturados os gráficos de controle da soma cumulativa (CUSUM) e o de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA). Os gráficos CUSUM e EWMA são métodos muito populares e amplamente utilizados no controle estatístico da qualidade em processos de manufatura (ALI et al., 2020). Tanto o CUSUM, quanto o EWMA foram concebidos para aumentar a capacidade de detectar pequenas mudanças de processo (HAN et al., 2010).

Conforme Vargas et al. (2004), o gráfico CUSUM, além de incorporar diretamente todas as informações na sequência de valores de amostra, ele atribui peso igual aos dados mais antigos, bem como o mais recente, já o gráfico EWMA, conforme Claro et al. (2007), para valores baixos do parâmetro de ponderação (λ), o gráfico detecta pequenos desajustes com maior rapidez, fazendo com que dados recentes tenham peso grande no cálculo da média ponderada.

Tanto o gráfico CUSUM quanto o gráfico EWMA são dependentes de parâmetros que são definidos *a priori* e que exercem influência direta no desempenho dos gráficos de controle, e para tal, é preciso mensurar o impacto destes parâmetros. Uma medida utilizada é o Número Médio de Sequências (*Average Run Length* – ARL) que pode ser definida como o número esperado de amostras até o primeiro ponto sinalizar uma condição fora de controle (VARGAS et al., 2004; YOU, 2018).

2.1 Gráfico CUSUM

O gráfico de controle CUSUM, também chamado de soma cumulativa, foi inicialmente proposto, em 1954, por E. S. Page e diversas aplicações foram realizadas ao longo do tempo. Page (1954) definiu como número de qualidade um parâmetro θ da distribuição de probabilidade para ser monitorado, sendo em geral, a média o parâmetro comumente escolhido. O método desenvolvido por ele busca detectar mudanças neste parâmetro, propondo um critério de decisão para iniciar ações corretivas. O gráfico CUSUM é então uma forma sequencial de analisar a média de um processo, especialmente útil para detectar pequenas alterações desta, medida em unidades de desvios padrões. (VARGAS et al., 2004).

O gráfico CUSUM incorpora de forma direta toda a informação na sequência de amostras plotando a soma cumulativa dos desvios da amostra em relação ao alvo do parâmetro θ , que neste caso é a média. Para tanto, considerando amostras unitárias, a

diferença entre valor mensurado na amostra x_i e o alvo do processo θ_0 é calculada e somada cumulativamente ao longo das amostras. Uma abordagem usual para definir o valor alvo é utilizar a média do processo quando considerado em controle, portanto o parâmetro θ_0 pode ser visto como μ_0 . A equação 1 demonstra tal procedimento.

$$C_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0) \quad (1)$$

onde: i é o número da amostra e C_i é a soma cumulativa incluindo a j -ésima amostra.

Examinando a equação 1 pode-se notar que se o processo estiver sob controle os valores de C_i tendem a oscilar em torno de 0, porém se há uma mudança positiva na média, uma tendência ascendente será notada nos valores de C_i . Da mesma forma, se a média do processo muda para um valor menor, uma tendência decrescente poderá ser notada. Portanto, tanto uma tendência crescente ou decrescente pode ser considerada como uma evidência de que houve mudança na média.

Embora a equação 1 seja uma forma efetiva de verificar se há evidências de que há mudanças no processo, ela não pode ser considerada um gráfico de controle, pois não há limites estatísticos que identifiquem tais mudanças. Existem basicamente duas abordagens para tais limites: a máscara V, popularizada por Barnard (1959) e o CUSUM tabular, ou algorítmico. Nesta abordagem duas variáveis derivadas da equação 1 são utilizadas, uma para monitorar os desvios acima da média, ou positivos, e outra para os desvios abaixo da média, ou negativos. As equações 2 e 3 definem estas estatísticas.

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (2)$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (3)$$

Nas equações 2 e 3 os valores iniciais, C_0^+ e C_0^- , são considerados iguais à zero. Além disso, nota-se a existência de um parâmetro K em ambas as equações, o qual é comumente chamado de valor de tolerância ou folga. Tal valor é escolhido como a metade da “distância” entre o valor alvo μ_0 e a média μ_1 considerada fora de controle que se deseja monitorar (MONTGOMERY, 2009; NAZIR et al., 2013). Caso a mudança na média seja expressa em unidades δ do desvio padrão, K pode ser representado pela equação 4.

$$K = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \quad (4)$$

Como K é um parâmetro de folga, as estatísticas C_i^+ e C_i^- só irão acumular os desvios que são maiores do que K , sendo que se qualquer uma das duas estatísticas exceder um limite H pré-definido, o processo é tido como fora de controle. A escolha do valor H não é tão evidente quanto o do valor K , mas Montgomery (2009) recomenda que

valores da ordem de 5 vezes o desvio padrão σ do processo sejam utilizados. A correta escolha e combinação de H e K irão definir o desempenho do gráfico para detectar situações fora de controle e o controle do número de falsos alarmes quando o processo está estável.

2.2 Gráfico EWMA

Os gráficos *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) são especialmente efetivos em detectar pequenas mudanças na média do processo que está sendo analisado. Eles foram desenvolvidos por Roberts em 1957 e desde então diversas melhorias e propriedades vem sendo analisadas de acordo com Mitra et al. (2019).

Diferentemente dos gráficos de Shewhart, que levam em consideração apenas o momento atual para verificar a estabilidade, o EWMA utiliza os valores anteriores como parte da análise. Para tanto é construída a estatística z_t atribuindo um peso λ para a amostra atual que é então somada com todos os valores previamente calculados, os quais terão peso $(1 - \lambda)$, conforme a equação 5:

$$z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda)z_{t-1}, 0 < \lambda < 1, t = 1, 2, \dots \quad (5)$$

O peso λ deve estar entre 0 e 1, sendo que quanto mais próximo de 1 estiver, maior importância será dada para os valores mais recentes. Valores usuais de λ para controle estatístico estão na faixa de 0,05 e 0,25 (MONTGOMERY, 2009; STEINER, 1999). Quando se inicia o monitoramento, além de definir a constante de ponderação, é necessário também definir um valor para z_0 . Uma forma de definir este valor é considerar a média de dados preliminares como o inicial, considerando que o processo estava estável.

Por meio da equação 5 é possível notar que a cada novo dado inserido, os anteriores vão decaindo de importância em nível geométrico, de modo que o primeiro dado terá peso próximo a zero após determinado número de rodadas, e a soma total dos pesos terá valor 1. Segundo Montgomey (2009), o EWMA pode ser visto como uma média ponderada dos valores passados e do atual, fazendo com que o gráfico seja robusto a não normalidade, sendo ideal para observações individuais.

Para a construção dos limites de controle do gráfico EWMA é necessário definir, além de λ , a largura dos limites de controle, denominada L . Inicialmente calcula-se a variância de z_t , a qual é dada pela equação 6.

$$\sigma_{z_t}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \quad (6)$$

Os limites de controle por sua vez são dados pelas equações de 7 a 9:

$$LSC = z_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (7)$$

$$LC = z_0 \quad (8)$$

$$LIC = z_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (9)$$

É importante notar que os limites de controle superior e inferior estão em função de t , fazendo com que os limites sejam mais estreitos para valores pequenos de t . Porém, como demonstrado na equação 10, quando se tem valores grandes de t (gráfico monitorando há algum tempo) o termo $(1 - \lambda)^{2t}$ aproxima-se de zero, resultando em limites de controle estacionários, dados pelas equações 11 e 12.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \lambda)^{2t} = 0, 0 < \lambda < 1 \quad (10)$$

$$LSC = z_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \quad (11)$$

$$LIC = z_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \quad (12)$$

3. Materiais e métodos

Nesta seção será apresentado os procedimentos para realização dos estudos de simulação, que foram implementados utilizando o software Matlab R2012b. Os algoritmos construídos foram paralelizados utilizando a Toolbox de processamento paralelo do software em questão em um computador desktop HP com processador Intel i5 3.4 GHz e com 4 GB de memória RAM. Serão realizados dois estudos, um onde os parâmetros H e K do gráfico CUSUM e os parâmetros λ e L do gráfico EWMA são fixos, o outro com os parâmetros variando dentro de intervalos a serem descritos na sequência.

No primeiro estudo, os parâmetros dos gráficos serão todos mantidos fixos, sendo que os parâmetros do processo – média e/ou desvio-padrão - serão alterados em diferentes cenários. Os parâmetros do gráfico CUSUM serão $H = 8,01$ e $K = 0,25$ já os parâmetros para o gráfico EWMA serão $L = 2,86$ e $\lambda = 0,20$. A escolha de tais valores foi feita de forma com que ambos os gráficos tivessem um ARL em controle próximo ao ARL dos gráficos de controle de Shewhart, que em média é de aproximadamente 370. Este valor de ARL é obtido por $1/\alpha$ (Montgomery, 2009), mais especificamente na situação de normalidade e $\alpha = 0,0027$ (probabilidade ao se usar os limites de controle em 3 desvios

padrão).

Para este estudo se tem três cenários. No primeiro cenário (1) simulado serão feitos incrementos na média do processo entre $0,2\sigma$ e $4,0\sigma$, porém o desvio padrão será mantido fixo. Já no segundo cenário (2), a média do processo será mantida a mesma, porém o desvio padrão do processo será incrementado entre 0,1 e 2. O terceiro cenário (3) é uma combinação dos anteriores, realizando as alterações simultaneamente, onde a média será alterada conforme o cenário 1 e o desvio padrão do processo será alterado conforme o cenário 2.

Neste estudo serão geradas 2000 amostras para treino provenientes de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1 e 2000 amostras para teste, também provenientes de uma distribuição normal. Cada cenário (ou combinação) será simulado com 20.000 repetições.

No segundo estudo serão testadas diferentes combinações dos dois parâmetros para os dois gráficos em questão. As variações serão feitas com intervalos linearmente espaçados, e seus valores limites estão dados na Tabela 1.

Tabela 1 – Limites de variação estudados para EWMA e CUSUM

	EWMA		CUSUM	
	L	λ	H	K
Mínimo	2,00	0,10	4,00	0,25
Máximo	4,00	0,60	6,00	1,00

Fonte: os autores

Para verificar a influência dos parâmetros já citados, serão criados dois cenários de alteração na média: um cenário com a alteração na média da ordem de $0,25\sigma$, para verificar o desempenho em pequenas alterações, e outro cenário com a alteração de $1,5\sigma$, procurando testar alterações na média de maior magnitude.

Inicialmente são simuladas 2000 amostras provenientes de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1, as quais são utilizadas para treino dos gráficos, e representam o processo sob controle. Em seguida são simuladas outras 2000 amostras normalmente distribuídas com desvio padrão 1, porém com média incrementada em $0,25\sigma$ e $1,5\sigma$, representando o processo fora de controle, denominadas teste.

Os gráficos de controle foram construídos e as amostras de teste foram sequencialmente apresentadas e o ARL de cada combinação dos parâmetros em cada um deste dois cenários, foi coletado. Neste estudo, em cada combinação de

cenário/parâmetros, o procedimento foi executado 20.000 vezes, valor este que é suficiente para atingir a convergência do ARL, pois a simulação consiste em realizar muitas vezes certo experimento na busca para atingir o parâmetro verdadeiro. Se por exemplo, deseja-se saber se uma moeda é equilibrada - mesma probabilidade para ambas as faces - na medida que aumenta-se o número de vezes que a moeda é lançada, mais próximo se chegará a probabilidade de ocorrer determinada face, convergindo assim para o valor real de 0,5, que neste caso é a probabilidade de ocorrer a face escolhida em uma moeda equilibrada.

4. Resultados e discussões

Nesta seção serão apresentados os resultados e será discutido os achados das simulações para os cenários citados nos dois estudos explanados na seção 3.

4.1 Resultados para simulação com parâmetros dos gráficos fixos

Neste estudo os procedimentos foram executados e os resultados foram coletados para cada um dos três cenários anteriormente apresentados.

Na Tabela 2 são apresentados os resultados do ARL médio (\overline{ARL}) para os gráficos considerando alterações na média do processo entre $0,25\sigma$ e 4σ , onde σ é o desvio padrão do processo. Em cada linha, correspondente à magnitude do incremento na média, está grifado o menor valor obtido entre os dois gráficos de controle. É possível verificar que o gráfico CUSUM obteve desempenho superior ao EWMA para mudanças de até 1σ na média do processo, sendo que para mudanças maiores o gráfico EWMA obteve melhores resultados. Destaca-se ainda que o desvio padrão estimado do \overline{ARL} , simbolizado por $\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$, que no gráfico CUSUM para mudanças de até 1σ na média do processo, obteve menor variação do \overline{ARL} . Já quando o gráfico EWMA obteve desempenho superior o $\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$ se manteve o mesmo.

Tabela 2 – \overline{ARL} e seus desvios padrões para os gráficos CUSUM e EWMA para diferentes mudanças na média do processo

Mudança na média (em desvios padrões)	EWMA		CUSUM	
	\overline{ARL}	$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	\overline{ARL}	$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$
0,25	122,42	0,84	75,71	0,49
0,50	36,09	0,23	24,74	0,12
0,75	16,17	0,08	13,88	0,05
1,00	9,61	0,04	9,58	0,03
1,50	5,13	0,02	5,96	0,02
2,00	3,54	0,01	4,38	0,01
2,50	2,74	0,01	3,50	0,01
3,00	2,26	0,01	2,94	0,01
4,00	1,74	0,00	2,28	0,00

Fonte: os autores

Para o cenário 2 onde foram efetuadas mudanças apenas na variabilidade do processo, o gráfico EWMA obteve desempenho superior ao CUSUM em todos os valores testados. Apesar da superioridade para o incremento de $1,1\sigma$, onde ambos tiveram desempenhos muito próximos. Destaca-se a ainda que a variação do \overline{ARL} também foi similar para os dois gráficos, sendo que o CUSUM apresentou um $\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$ um levemente maior para todos os incrementos simulados. Os resultados podem ser conferidos na Tabela 3.

Tabela 3 – \overline{ARL} e seus desvios padrões para os gráficos CUSUM e EWMA para diferentes mudanças no desvio padrão do processo

Mudança no desvio padrão do processo	EWMA		CUSUM	
	\overline{ARL}	$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	\overline{ARL}	$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$
$1,1\sigma$	182,57	1,84	183,20	1,87
$1,2\sigma$	103,39	1,03	113,25	1,14
$1,5\sigma$	35,79	0,35	44,29	0,42
$1,7\sigma$	22,82	0,21	29,64	0,27
$2,0\sigma$	13,82	0,13	1859	0,16

Fonte: os autores

Considerando a combinação dos dois cenários anteriores os resultados foram consolidados na Tabela 4, onde os valores grifados correspondem ao melhor valor de \overline{ARL} em cada combinação.

Neste último cenário é possível verificar os achados do cenário 1 deste estudo, onde o gráfico CUSUM teve melhor desempenho para o \overline{ARL} em pequenas mudanças na média do processo. O gráfico CUSUM também apresenta melhor desempenho com relação ao \overline{ARL} , para pequenos incrementos da média e da variação do processo

simultaneamente. Já o gráfico EWMA obteve melhor desempenho em duas situações quando a média do processo é superior a $1,0\sigma$ (considerando os valores simulados) com qualquer variação no processo e na situação de quando tem-se pequenas alterações na média, mas altas variação no processo. Nas combinações simuladas o gráfico EWMA apresentou $\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$ menor ou igual ao gráfico CUSUM.

Uma possível explicação para a superioridade do EWMA inclusive em pequenas alterações na média, porém com maior variabilidade, é de que o CUSUM reinicia a soma cumulativa quando o valor amostrado não atinge o valor de folga. Já o EWMA mantém o histórico das amostras coletadas, portanto uma pequena alteração na média é potencializada pelo aumento da variabilidade, levando a amostras individuais com maior desvio do alvo.

Tabela 4 – \overline{ARL} e seus desvios padrão para os gráficos CUSUM e EWMA para diferentes mudanças na média e no desvio padrão do processo

Mudança na média (em desvios padrão, $\sigma = 1$)			0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00
$\sigma^{\text{nov}} = 1,1\sigma$	EWMA	\overline{ARL}	74,64	25,18	12,89	8,05	4,54	3,20	2,50	2,10	1,62
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,71	0,21	0,09	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
	CUSUM	\overline{ARL}	56,00	20,64	12,34	8,54	5,40	4,00	3,22	2,73	2,12
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,51	0,14	0,07	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
$\sigma^{\text{nov}} = 1,2\sigma$	EWMA	\overline{ARL}	50,32	19,73	10,57	7,02	4,07	2,94	2,30	1,95	1,52
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,47	0,17	0,07	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
	CUSUM	\overline{ARL}	44,51	18,27	10,85	7,81	4,97	3,71	2,99	2,54	1,99
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,39	0,13	0,06	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
$\sigma^{\text{nov}} = 1,5\sigma$	EWMA	\overline{ARL}	36,04	16,09	9,14	6,16	3,72	2,69	2,14	1,82	1,42
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,24	0,09	0,05	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
	CUSUM	\overline{ARL}	35,36	16,04	9,87	7,09	4,58	3,44	2,78	2,37	1,88
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,22	0,08	0,04	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
$\sigma^{\text{nov}} = 1,7\sigma$	EWMA	\overline{ARL}	16,30	9,42	6,07	4,41	2,83	2,11	1,71	1,48	1,17
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,15	0,08	0,04	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
	CUSUM	\overline{ARL}	19,43	11,00	7,25	5,40	3,58	2,72	2,24	1,94	1,56
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,16	0,08	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
$\sigma^{\text{nov}} = 2,0\sigma$	EWMA	\overline{ARL}	10,91	7,12	4,90	3,65	2,42	1,86	1,53	1,32	1,09
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,10	0,06	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
	CUSUM	\overline{ARL}	14,09	8,70	6,04	4,56	3,08	2,38	1,97	1,71	1,34
		$\hat{\sigma}_{\overline{ARL}}$	0,12	0,06	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

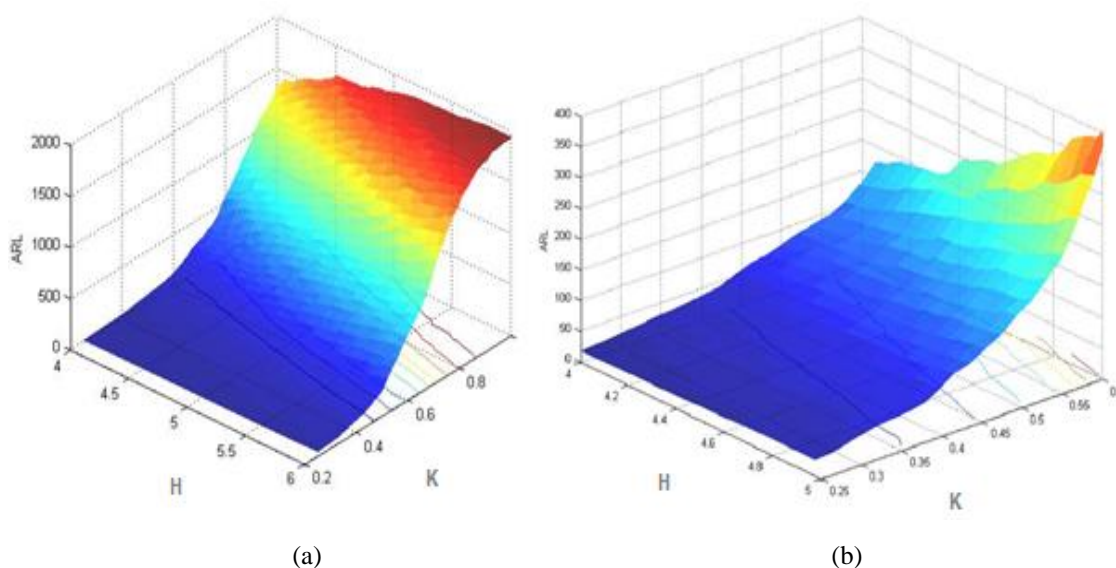
Fonte: os autores

4.2 Resultados para simulação com parâmetros dos gráficos variando

No segundo estudo, para melhor visualização do comportamento do \overline{ARL} de acordo com cada combinação da variação dos parâmetros foram construídos gráficos de superfície e curvas de nível. É importante destacar que devido ao fato de terem sido geradas 2000 amostras de teste, quando o gráfico de controle não detecta nenhuma alteração, o ARL foi tomado como o máximo, no caso 2000. Tal limite foi estabelecido dado que para pequenos incrementos na média ocorre um rápido aumento no \overline{ARL} , como pode ser observado na figura 1(a).

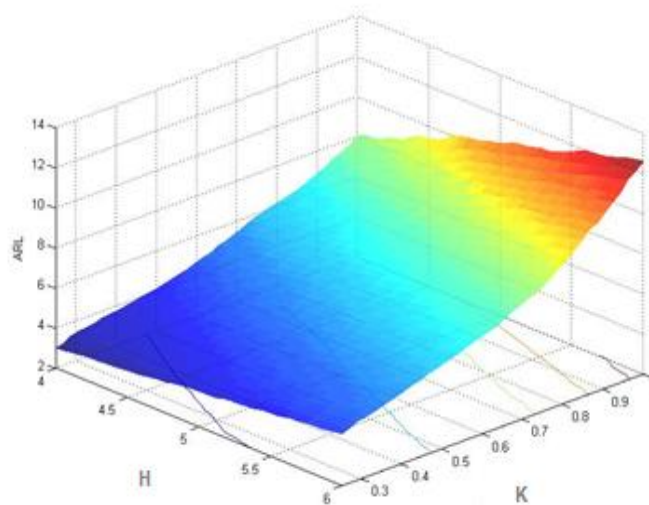
Na Figura 1 é possível verificar o comportamento do \overline{ARL} para o gráfico CUSUM considerando um incremento na média de $0,25\sigma$. No gráfico da esquerda, figura 1(a), é possível verificar o comportamento considerando todo o intervalo de variação para os dois parâmetros do gráfico, já no gráfico da direita, figura 1(b), o intervalo de exibição foi reduzido, sendo que K varia entre 0,25 e 0,6 e H entre 4 e 5, buscando assim que se possa analisar mais detalhadamente a curva.

Figura 1 – \overline{ARL} das simulações para o gráfico CUSUM com incremento na média de $0,25\sigma$



Fonte: os autores

O comportamento do \overline{ARL} do CUSUM para incremento de $1,5\sigma$ na média está demonstrado na Figura 2. É possível notar que para valores pequenos dos parâmetros K e H tem-se valores baixos de \overline{ARL} e, à medida que os dois parâmetros aumentam, aumenta também os valores de \overline{ARL} .

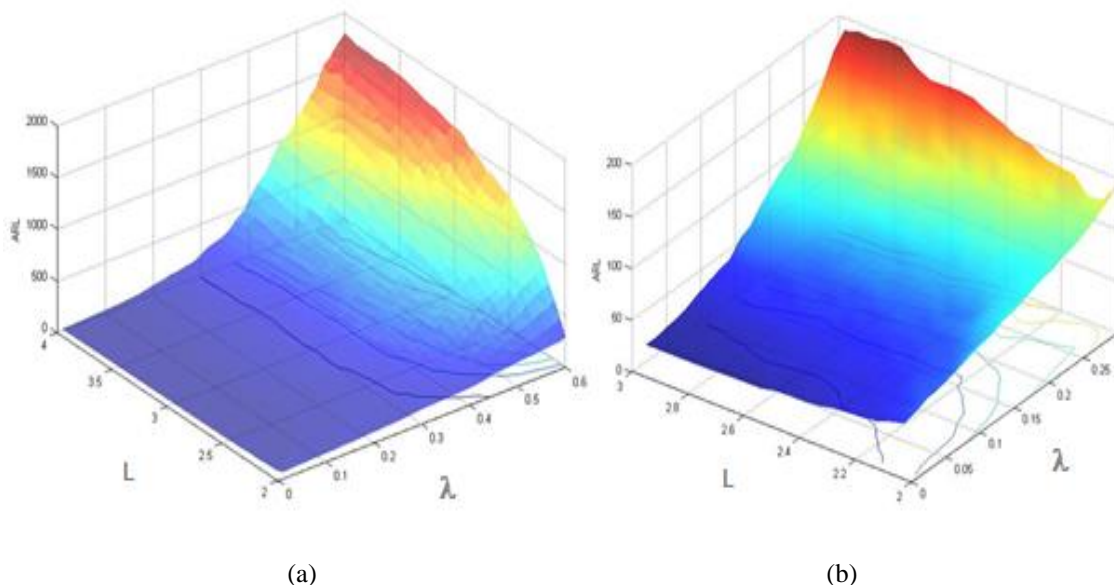
Figura 2 – \overline{ARL} para o gráfico CUSUM para incremento de $1,5\sigma$ na média

Fonte: os autores

Observa-se nas figuras 1 e 2 que ambas apresentam uma similaridade com relação ao comportamento dos parâmetros, quando estes aumentam dentro dos intervalos analisados na simulação, os melhores desempenhos do \overline{ARL} tendem a ser para valores baixos destes parâmetros.

Observa-se ainda, nas figuras 1 e 2 que, na região onde os valores de K são inferiores a 0,3 e para qualquer valor de H no intervalo estudado, o \overline{ARL} é praticamente nulo. Além disto, observa-se por meio das figuras 1(a) e 2 que, para os valores de K do estudo (entre 0,2 e 0,9), ao se comparar as situações de incremento da média de $0,25\sigma$ com $1,5\sigma$, à medida que aumenta o incremento, a curva torna-se menos íngreme, dando um indicativo que o \overline{ARL} aumenta mais rapidamente quando tem-se pequenas incrementos na média.

De forma similar ao que foi realizado para o gráfico CUSUM, também foram simulados dados para o gráfico EWMA. Na Figura 3 são demonstradas as superfícies e curvas de nível do \overline{ARL} para o incremento de $0,25\sigma$ na média. No gráfico da esquerda, figura 3(a), é possível verificar o comportamento considerando todo o intervalo de variação para os dois parâmetros do gráfico EWMA, já no gráfico da direita, figura 3(b), o intervalo de exibição foi reduzido, sendo que λ varia entre 0,10 e 0,30 e L varia entre 2 e 3, visando que se possa analisar mais detalhadamente a curva, de onde se observa pelas curvas de nível que, valores baixos de L levam a um bom desempenho do \overline{ARL} .

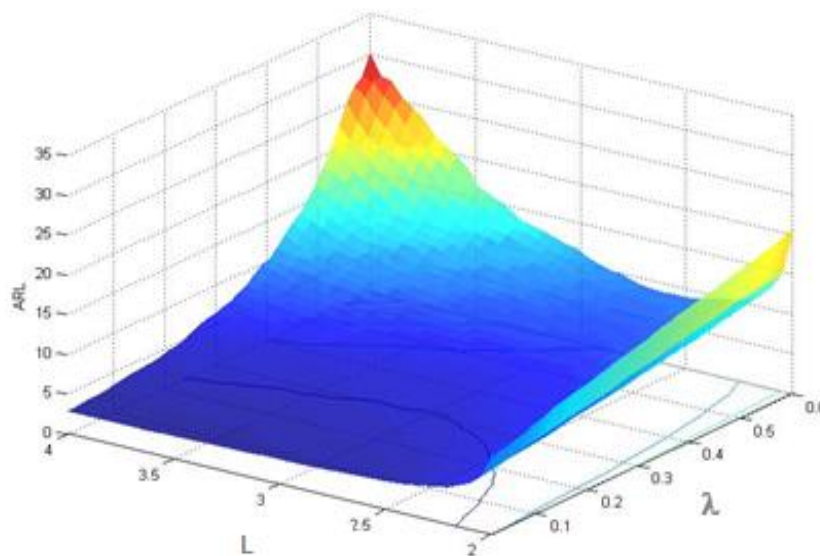
Figura 3 – \overline{ARL} das simulações para o gráfico EWMA com incremento na média de $0,25\sigma$ 

Fonte: os autores

Na Figura 3 o comportamento não linear dos parâmetros do EWMA evidenciado na figura 3(b), pode ser influenciado pela natureza exponencial da estatística e dos limites de controle. Já a Figura 4 apresenta o comportamento do \overline{ARL} para o cenário onde o incremento na média foi de $1,5\sigma$. O comportamento não linear do \overline{ARL} também pode ser observado para tal incremento na média do processo.

Observa-se ainda na figura 3, onde tem-se a situação para incremento de $0,25\sigma$, que o \overline{ARL} é praticamente nulo na região para valores de λ que são inferiores a $0,05$ e para valores de L superiores a aproximada $2,1$. Para o incremento da média de $1,5\sigma$, observa-se na figura 4 que onde os valores de λ são inferiores a $0,2$ e para valores de L superiores a aproximada $2,2$ o \overline{ARL} é praticamente nulo.

Cabe ainda ressaltar, na região próxima de L igual a 2 , o \overline{ARL} tem um comportamento diferenciado nas duas situações estudadas. Quando o incremento da média é de $0,25\sigma$ o \overline{ARL} aumenta para os valores λ até $0,3$, como pode ser visto na figura 3(b), já para valores de λ entre $0,3$ e $0,6$, o \overline{ARL} tende a diminuir, conforme a figura 3(a). Com relação ao incremento da média de $1,5\sigma$, apresentado na figura 4, ocorre um aumento do \overline{ARL} para qualquer valor de λ do estudo.

Figura 4 – \overline{ARL} para o gráfico EWMA para incremento de $1,5\sigma$ na média

Fonte: os autores

Ao se comparar os gráficos EWMA e CUSUM é possível verificar que o \overline{ARL} do EWMA tem uma curvatura mais acentuada em situações onde há uma mudança de maior amplitude na média do processo, e para pequenas mudanças na média do processo sua curvatura é mais suave. Já para o CUSUM é possível verificar o contrário, para pequenas mudanças na média do processo a superfície do \overline{ARL} é mais íngreme, enquanto para mudanças de $1,5\sigma$ o comportamento é praticamente linear e com pequena inclinação.

4.3 Indicativos do melhor \overline{ARL} do estudo

Como foram realizadas simulações em cinco cenários diferentes. Os três primeiros, fizeram parte do estudo um, onde os parâmetros dos gráficos de controle CUSUM e EWMA foram mantidos fixos e com a média e/ou o desvio padrão do processo sendo alterados. Os dois outros cenários que fizeram parte do estudo dois, em cada um dos gráficos, seus respectivos parâmetros foram avaliados dentro um determinado intervalo. Neste estudo dois, o primeiro cenário foi considerado uma pequena alteração na média e o segundo, foi considerado como uma alteração grande na média. A análise destes cenários culminou com indicações sobre o melhor \overline{ARL} para cada um dos gráficos, que são apresentadas de forma esquemática no quadro 1.

Quadro 1 - Indicações sobre do melhor \overline{ARL} para cada cenário estudado

Estudo	Cenário	Indicação de melhor desempenho do \overline{ARL}
1 CUSUM com $H=8,01$ e $K=0,25$ EWMA com $L=2,86$ e $\lambda = 0,20$	1 - incrementos na média do processo de $0,25\sigma$ a $0,4\sigma$	incremento $< 1,0\sigma \Rightarrow$ EWMA incremento $\geq 1,5\sigma \Rightarrow$ CUSUM
	2 - incrementos no desvio padrão do processo de 0,1 a 2	para qualquer incremento EWMA
	3 - incrementos na média do processo de $0,25\sigma$ a $0,4\sigma$ e incrementos no desvio padrão do processo de 0,1 a 2 (junção dos cenários 1 e 2)	incremento na média $< 0,5\sigma$ em conjunto com incremento no desvio padrão $< 1,5\sigma$ CUSUM incremento na média $> 1,0\sigma$ em conjunto com incremento no desvio padrão $< 1,5\sigma$ EWMA qualquer incremento na média em conjunto com incremento no desvio padrão $> 1,5\sigma$ EWMA
2 CUSUM $4 \leq H \leq 6$ e $0,25 \leq K \leq 1,0$ EWMA $2 \leq L \leq 4$ e $0,1 \leq \lambda \leq 0,6$	1 - incremento na média do processo de $0,25\sigma$ (pequena alteração média)	CUSUM com valores baixos de H e K EWMA com valores baixos de λ e para todos valores testados de L (exceto próximo de 2)
	2 - incremento na média do processo de $1,5\sigma$ (grande alteração média)	CUSUM com valores baixos de H e K EWMA com valores baixos de λ e para todos valores testados de L (exceto próximo de 2)

5. Considerações finais

O presente artigo apresentou os gráficos de controle de soma cumulativa (CUSUM) e de médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA), os quais são mais eficazes do que os tradicionais gráficos de Shewhart para detecção de pequenas mudanças na média do processo. Buscando comparar o desempenho dos dois gráficos foi avaliado o Average Run Length (ARL) destes e, foram executadas simulações computacionais alterando seus parâmetros em diversos cenários.

Foram testados diferentes cenários, onde foram alterados os parâmetros dos

gráficos CUSUM e EWMA para distintas situações da média e de variabilidade do processo. Foi possível identificar a superioridade do gráfico CUSUM para alterações na média de até 1 desvio padrão do processo. Já o gráfico EWMA foi superior para alterações maiores de média, bem como quando houve incremento simultâneo da média e da variabilidade do processo.

O presente estudo mostra a importância da correta escolha dos parâmetros das cartas de controle em relação ao desempenho do ARL. Tal decisão deve ser tomada considerando as condições e conhecimento prévio do processo que será monitorado, bem como a correta definição dos objetivos do emprego de tais técnicas de controle. As simulações apresentadas mostram-se como uma alternativa para definição dos limites de controle, pois uma vez conhecendo-se o processo que será monitorado, é possível proceder com a mesma metodologia para auxiliar na escolha dos parâmetros mais adequados.

Referências

- ALI, S.; ALTAF, N.; SHAH, I.; WANG, L.; RAZA, S. M. M. On the Effect of Estimation Error for the Risk-Adjusted Charts. **Complexity**, v.2020, article ID 6258010, 21 p. DOI: 10.1155/2020/6258010
- BARNARD, G. A. Control charts and stochastic processes. **Journal of Royal Statistical Society**. Serie B. v. 21, n.2 p. 239–271, 1959.
- CHEN, A.; CHEN, Y. K. Design of EWMA and CUSUM control charts subject to random shift sizes and quality impacts. **IEEE Transactions**, v. 39, n. 12, p. 1127-1141, 2007. DOI: 10.1080/07408170701315321
- CHEN, A.; ELSAYED, E. A. Design and performance analysis of the exponentially weighted moving average mean estimate for process subject to random step changes. **Technometrics**, v.44, n.4, p. 379-389, 2002. DOI: 10.1198/004017002188618572
- CLARO, F. A. E.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e de Xbarra para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Produção**, v. 17, n. 3, p. 536-546, 2007. DOI: 10.1590/s0103-65132007000300010
- HAN, S. W.; TSUI, K.; ARIYAJUNYA, B.; KIM, S. B. A comparison of CUSUM, EWMA, and temporal scan statistics for detection of increases in poisson rates. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 26, n.3, p. 279-289, 2010. DOI: 10.1002/qre.1056
- MITRA, A.; LEE, K. B.; CHAKRABORTI, S. An adaptive exponentially weighted moving average-type control chart to monitor the process mean. **European Journal of Operational Research**, v.279, n.3, p.902-911, 2019. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.07.002
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction Statistical to quality control**. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- NAZIR, H. Z.; RIAZ, M. DOES, R.J. M. M.; ABBAS, N. Robust CUSUM Control charting. **Quality Engineering**, v.25, n.3, p.211-224, 2013. DOI: 10.1080/08982112.2013.769057

PAGE, E. S. Continuous inspection schemes. **Biometrika**, v. 41, n. 1/2, p. 100–115, 1954.

STEINER, S. H. EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response. **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 1, p. 75-86, 1999. DOI: 10.1080/00224065.1999.11979899

VARGAS, V. C. C.; LOPES, L. F. D.; SOUZA, A. M. Comparative study of the performance of the CuSum and EWMA control charts. **Computers & Industrial Engineering**, v. 46, p. 707–724, 2004. DOI: 10.1016/j.cie.2004.05.025

YOU, H. W. Optimal estimated process parameters side sensitive group runs chart based on expected average run length. **Helyon**, v.4, n.10, October 2018, e00848 DOI: 10.1016/j.heliyon.2018.e00848

ZWETSLOOT, I. M.; WOODALL, W. H. A head-to-head comparative study of the conditional performance of control charts based on estimated parameters. **Quality Engineering**, v.29, n.2, p. 244-253, 2017. DOI: 10.1080/08982112.2016.1237651

PERFORMANCE ANALYSIS OF THE CONTROL CHARTS CUSUM AND EWMA: COMPARATIVE STUDY USING SIMULATION

Abstract:

This work presents a comparative study of the cumulative sum control (CUSUM) and exponentially weighted moving averages (EWMA) graphs. The main objective is to study the influence of the control parameters of both graphs in the performance of detecting out of control situations, defined by the Average Execution Length (ARL). Computer simulations are performed considering different scenarios, changing the parameters of the control charts, and changing the process parameters, to investigate the ARL. It was found that CUSUM performed better than EWMA for small changes in the average, up until one standard deviation of the process, while EWMA was more effective for changes of greater magnitude. In addition, it was found that EWMA is superior when there are simultaneous changes in the process average and in its variability. The simulation routines proved to be useful in the study of ARL behavior according to the parameters of the control charts and processes, being a valid approach for the study and choice of parameters in real applications.

Keywords: CUSUM; EWMA; simulation; control charts; ARL