

CADERNOS DO IME – Série Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
ISSN impresso 1413-9022 / ISSN on-line 2317-4536 - v. 39, p.1 - 16, 2015
DOI: 10.12957/cadest.2015.20255

ANÁLISE DO DESEMPENHO DE CARTAS DE CONTROLE DA VARIÂNCIA COM PARÂMETRO ESTIMADO CONSIDERANDO A SIGNIFICÂNCIA PRÁTICA

Pedro Carlos Oprime
Universidade Federal de São Carlos
pedro@dep.ufscar.br

Gilberto Miller Devós Ganga
Universidade Federal de São Carlos
ganga@dep.ufscar.br

Damaris Serigatto Vicentin
Universidade Federal de São Carlos
damaris_sv@hotmail.com

Resumo

O objetivo deste artigo foi analisar os efeitos da significância prática e da estimativa dos parâmetros em cartas de controle que monitorem a variância dos processos. Os métodos utilizados foram a modelagem e simulação, visando encontrar soluções numéricas de tal problemática. A modelagem e a simulação foram realizadas no ambiente do Software Maple. Os resultados alcançados neste artigo considerando a significância prática trazem vantagens em cartarelação às cartas tradicionais, pois possibilita poucos sinais de alarmes falsos detectados pelas cartas. As análises também mostraram o efeito do aumento de tamanho da amostra na capacidade dessas cartas em discriminar os estados de fora de controle do processo considerando a significância prática.

Palavras-chave: Controle Estatístico de Processo, Significância prática, Cartas de controle S^2 , Parâmetro estimado.

1. Introdução

O Controle Estatístico de Processo (CEP) compreende um conjunto de técnicas estatísticas utilizadas no monitoramento sistemático dos processos produtivos a fim de contribuir para a fabricação de produtos ou serviços que atendam aos requisitos dos clientes (CASTAGLIOLA; VÄNNMAN, 2008). A essência do CEP é monitorar a variação inerente dos processos, denominada de variação natural, e distingui-las das causas especiais, que em geral são identificáveis (JURAN, 1982; MONTGOMERY, 2009).

Um ponto central no estudo da variabilidade é a determinação, em termos estatísticos, dos erros relativos aos processos decisórios sobre o controle do processo, tais como o falso positivo (erro tipo I – α) e falso negativo (erro tipo II – β). Tais erros, quando não determinados corretamente, afetam o desempenho das cartas de controle e podem trazer consequências negativas para a produtividade e qualidade dos processos produtivos. Portanto, o desempenho do CEP é afetado por julgamentos errôneos sobre o real estado do processo e cabe aos instrumentos estatísticos do CEP mitigar esses erros (MONTGOMERY, 2009).

Um processo é considerado estável ou sob controle (*In Control* - IC), se as estatísticas plotadas nas cartas de controle flutuarem dentro dos limites de controle (influenciado apenas por causas comuns) previamente determinados na Fase I da implantação das cartas de controle. Nestas situações, supõe-se que não há causas especiais que interfiram no processo. No entanto, quando as estatísticas estiverem situadas fora dos limites de controle, ou com alguma tendência não aleatória, este pode ser um sinal de que o processo possa estar fora de controle (*Out of Control* - OOC) e pode ser necessária uma ação corretiva no processo, tal como sugerido por Jensen et al. (2006). Quando uma causa especial é detectada, a ação normal é interromper o processo de modo a identificar e eliminar a causa especial. Isso fará com que o processo mantenha a estabilidade. Contudo, em algumas situações, isso pode acarretar em custos financeiros, tempo, recursos e oportunidades de melhoria.

Entretanto, nem sempre é economicamente viável agir sobre pequenos desvios no parâmetro estatístico monitorado (WOODALL, 1985; MONTGOMERY, 2009). Woodall (1985) introduziu o conceito de significância prática, considerando exatamente

o sentido prático dos conceitos clássicos das cartas de *Shewhart*, propondo uma ampliação dos limites de controle. A incorporação do conceito de significância prática atende às especificações de engenharia e as necessidades dos clientes, com o menor custo possível. Em outras palavras, de modo prático, representa uma expansão dos limites de controle respeitando a relação de custo-benefício. Para tanto, Montgomery (2009) ressalta a importância de ter em consideração a questão da significância prática no projeto das cartas de controle. Pesquisas tem flexibilizado os parâmetros de projeto das cartas de controle com o objetivo de melhorar o seu desempenho e reduzir custos da sua operacionalização. Costa (1998) avalia que o desempenho das cartas de controle \bar{X}/R melhora conforme os seus parâmetros variam, enquanto que Magalhães et al. (2001) propõem a seleção dos parâmetros de modo a reduzir os custos do processo. Portanto, a ideia de adotar parâmetros variáveis das cartas ao invés da abordagem clássica de torná-los fixos não é nova, e é recomendada. Costa (1998) em seu artigo, tratou a flexibilização do tamanho e dos intervalos de tomada das amostras, e propôs além da região central e de ação um limite de alerta para os processos, possibilitando detectar de modo mais rápido desvios na média decorrentes de causas especiais.

A implantação das cartas de controle estatístico de processo passa por duas fases, conforme indicado por Montgomery (2009) e Jensen *et al.* (2006). É na chamada Fase I que são estabelecidos os limites de controle. No caso da carta clássica de Shewhart \bar{X}/S e \bar{X}/R , o controle é realizado por meio da estimativa dos parâmetros estatísticos da média (μ) e desvio padrão (σ). Uma fragilidade dessas cartas de controle é supor que os parâmetros estatísticos sejam conhecidos, o que na prática nem sempre é verdade. Isso afeta substancialmente a eficiência dessas cartas.

Esse problema foi estudado pelos principais autores da área (CHAO; CHENG, 1996; CHEN; CHENG, 1998; JENSEN *et al.*, 2006; CASTAGLIOLA *et al.*, 2009; CASTAGLIOLA; MARAVELAKIS, 2011; CASTAGLIOLA; CELANO; FICHERA, 2013). Nesses estudos o objetivo foi melhorar o desempenho das cartas de controle, redimensionando os procedimentos de cálculo dos limites de controle utilizados correntemente.

Nesse contexto, o objetivo deste artigo foi analisar os efeitos da significância prática e da estimativa dos parâmetros em cartas de controle que monitorem a variância

dos processos. O método utilizado foi a modelagem (BERTRAND; FRANSOO, 2002) visando propor soluções numéricas de tal problemática. A modelagem numérica foi realizada no ambiente do *Software Maple*, versão 13.

O artigo foi estruturado em cinco seções. A Seção 2 traz um breve resumo conceitual sobre cartas de controle e significância prática. A Seção 3 descreve as propriedades das cartas de controle S^2 (CS^2) com σ_0 estimado. A Seção 4 trata do desempenho das CS^2 considerando a significância prática e σ_0 estimado. A Seção 5 apresenta a modelagem e simulação numéricas realizadas, bem como os resultados alcançados. Por fim, a Seção 6 apresenta as considerações finais do estudo realizado.

2. Revisão de Literatura

2.1 Conceitos fundamentais das cartas de controle

A carta de controle é uma das principais técnicas utilizadas no CEP, dada sua suposta simplicidade operacional. Quando os parâmetros de uma determinada característica da qualidade são desconhecidos, a carta de controle é, normalmente, construído em duas fases. Na Fase I (fase pré-prospectiva) são estimados os limites de controle estatístico. Na carta tradicional de *Shewhart*, em geral, são extraídas 25 amostras de tamanho cinco ($n=5$) para estimativa dos parâmetros do processo e dos limites de controle estatístico. Na Fase II, com a carta já definido, novas amostras são retiradas e diz-se que o processo está estável quando o resultado da característica observada é plotado entre os limites de controle. Caso contrário, tem-se que o processo perdeu sua condição de estabilidade e está sujeito à ação de causas especiais (JENSEN *et al.*, 2006).

Um problema atual de pesquisa é estudar o desempenho das cartas de controle (por meio do valor esperado do *ARL* – *Average Run Length*) sabendo-se que os parâmetros estatísticos dos processos são estimados na Fase I. Apesar de alguns trabalhos que tratam do problema terem sido publicados na segunda metade da década de noventa, é a partir de 2006 que um significativo número de estudos tem surgido tratando dos efeitos da estimativa de parâmetros estatístico no desempenho da carta de controle.

Chen (1997) foi um dos primeiros autores a estudar o desempenho de gráficos de controle da média amostral quando a média μ e o desvio padrão σ são desconhecidos. O principal resultado ressaltado pelo autor foi mostrar a inadequação do número e tamanho

de amostras tradicionalmente utilizados na estimativa dos limites de controle para esse tipo de gráfico. Posteriormente, outros autores estudaram o mesmo problema, tais como Zhang e Castagliola (2011) propondo novos parâmetros para o cálculo dos limites de controle. Os efeitos da estimativa de parâmetros no desempenho de gráficos de controle por atributo foram estudados Braun (1999), Castagliola e Wu (2012) e Castagliola *et al.* (2014); por sua vez, Maravelakis e Castagliola (2009), Maravelakis (2011) estudaram os efeitos da estimativa de parâmetros em gráficos de controle da Média Móvel Ponderada Exponencialmente e gráficos de somas acumuladas, conhecido como gráficos de CUSUM.

O uso de estimativas dos parâmetros pode ocasionar piora no desempenho das cartas de controle, quando comparados com o desempenho das cartas construídos com parâmetros realmente conhecidos. Jensen *et al.* (2006) apresentam o problema de modo prático. Para os autores, o desempenho das cartas de controle é extremamente afetado pela estimativa dos parâmetros estatísticos realizados na Fase I.

2.2 Significância prática das cartas de controle

Partindo-se da premissa de que o objetivo de um sistema de controle de processo é a tomada de decisões que resultem em ganhos econômicos sobre o processo, é possível equilibrar as consequências destas decisões sobre o mesmo considerando duas situações: (a) tomar uma ação quando não é necessário (supercontrole), versus (b) não tomar uma ação quando se é necessário (falta de controle). Assim, é possível utilizar o conceito de significância prática para tomar decisões economicamente viáveis sobre a condição de processo. De acordo com Woodall (1985) existe a necessidade de reagir na presença de causas especiais. No entanto, esta decisão é tomada apenas quando essa causa especial apresente um impacto suficiente que seja economicamente viável removê-la, a fim de melhorar os indicadores de qualidade. As abordagens V_p (variação de parâmetros) encontradas em Costa (1998) e Magalhães *et al.* (2001) ajustaram os parâmetros das cartas de controle para melhorar os respectivos desempenhos e reduzir custos operacionais do processo em termos do tamanho médio da amostragem.

Essa questão é tão significativa que a AIAG (1991) considera, no seu guia de implantação do controle estatístico de processo, a significância prática. Segundo o Manual do CEP da AIAG, todo processo está sujeito a ser classificado segundo a sua

capacidade em atender aos limites de especificação da engenharia. Deste modo, um processo pode ser classificado dentro de um dos quatro casos, como mostra o Quadro 1.

Quadro 1 – Classificação de um Processo

Aderência às necessidades do produto	Sob Controle (IC)	Fora de Controle (OOC)
Aceitável	Caso 1 - é a situação ideal	Caso 3 - o processo atende os requisitos de modo aceitável, mas não está sob controle (significância prática)
Não aceitável	Caso 2 - processo que não atende aos requisitos do produto, tem variação excessiva de causas comuns	Caso 4 - o processo não está sob controle nem é aceitável.

Fonte: AIAG (1991).

No caso 3, sob certas circunstâncias, os clientes podem permitir que o gestor opere o processo nos seguintes casos: i) o cliente é insensível à variação da característica da qualidade dentro da especificação; ii) a economia envolvida em agir sobre as causas especiais excede o benefício aos clientes; e iii) A causa especial é identificada e tem sido documentada.

Do ponto de vista econômico (recomenda-se consultar o trabalho de Magalhães et al., 2001, que trata de design econômicos das cartas de controle) o excesso de intervenções sobre o processo decorrentes de falsos alarmes é danoso para a produtividade. Adotando a mesma linha de raciocínio, não é conveniente a ação sobre pequenos desvios no parâmetro monitorado estatisticamente, mesmo tendo na carta uma identificação de alarme de causa especial.

3. As propriedades das cartas de controle S^2 com σ_0 estimado

Suponha que $(X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$ sejam variáveis aleatórias, e $i = 1, 2, \dots, m$, sejam amostras independentes extraídas de um processo na Fase I, com σ_0 não conhecido, em que i identifica o subgrupo. Quando o processo está sob controle (IC), para $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, tem-se que $\delta = 1$, e quando o processo está fora de controle (OOC), $\delta > 1$. Deste modo, $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_0^2$ (IC), e $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_0^2$ (OOC). No estado IC, quando o desvio padrão é conhecido,

$$s_i^2 \in \{(0; k\sigma_0^2) = (0; LSC)\} \quad (1)$$

Em que LSC é o Limite Superior de Controle e k é uma constante. Para σ_0 não conhecido, o estado de IC do processo ocorre quando $s_i^2 \in \{(0; k\hat{\sigma}_0^2) = (0; \widehat{LSC})\}$, em que $(0; \widehat{LSC})$ é a estimativa de LSC. Assume-se que $(X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$, $i = 1, 2, \dots, m$, são amostras independentes da variável $X_{i,j} \sim Normal(\mu_0; \sigma_0)$. A estimativa de σ_0 é obtida por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2 \quad (2)$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (3)$$

Na Fase II, amostras de tamanho n são extraídas, e s_i^2 são calculadas de $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$. O erro tipo I é $\alpha = Pr(\bar{X} \notin (0, \widehat{LSC}))$ ou $\alpha = 1 - Pr(s_i^2 \in (0, \widehat{LSC}))$. Sendo que probabilidade do erro tipo I depende da estimativa da variancia e, por conseguinte, dos limites de controle, $Pr(\alpha | \hat{\sigma}_0^2)$. Para um processo que está OOC, $\sigma_1 = \delta \sigma_0$, para $\delta > 1$, e a estimativa do limite de controle será obtida por $\widehat{LSC}_{s^2} = k\hat{\sigma}_0^2$.

Para o estado de controle IC, pode-se escrever a seguinte Expressão 4:

$$Pr(s_i^2 \leq \widehat{LSC}) = Pr\left(\frac{s_i^2(n-1)}{\sigma_1^2} \leq \frac{\widehat{LSC}(n-1)}{\sigma_1^2}\right) \quad (4)$$

Desenvolve-se essa Expressão 5 seguindo os passos a seguir:

$$Pr\left(\frac{s_i^2(n-1)}{\sigma_1^2} \leq \frac{k\hat{\sigma}_0^2(n-1)}{\sigma_1^2}\right) = Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{k\hat{\sigma}_0^2(n-1)}{\sigma_1^2}\right) \quad (5)$$

Em que $X_{n-1}^2 = \frac{s_i^2(n-1)}{\sigma_1^2}$ é o valor da distribuição de probabilidade do Qui-quadrado. Como $\sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2$ e $U = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$, pode-se escrever a Expressão 6:

$$Pr(s_i^2 \leq LSC) = Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{kU(n-1)}{\delta^2}\right) \quad (6)$$

Sendo o erro tipo I $\alpha = 1 - Pr(s_i^2 \in (0, \widehat{LSC}))$ quando $\delta = 1$. Assim $\alpha = 1 - Pr(X^2 \leq kU(n-1))$, resultando na Expressão 7

$$\alpha = 1 - F_{X^2}(kU(n-1)) \quad (7)$$

O erro tipo II é $\beta = Pr\left(s_i^2 \in (0, \widehat{LSC})\right)$ quando $\delta > 1$. Assim, tem-se a

Expressão 8:

$$\beta = Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{kU(n-1)}{\delta^2}\right) = F_{X^2}\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{kU(n-1)}{\delta^2}\right) \quad (8)$$

A função de distribuição de probabilidade de U é $f(u) = m(n-1) f_{X^2}(m(n-1)u)$. A incondicional ARL é dada pela Expressão 9:

$$ARL = \int_0^\infty \frac{1}{1-\beta} f(u) du \quad (9)$$

Resultando na Expressão 10, a seguir:

$$ARL(m, n, \delta) = \int_0^\infty \frac{1}{1-F_{X^2}\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{kU(n-1)}{\delta^2}\right)} m(n-1) f_{X^2}(m(n-1)u) du \quad (10)$$

Em que f_{X^2} é a função densidade de probabilidade da Distribuição Qui-quadrado com $m(n-1)$ graus de liberdade.

4. Desempenho da carta de controle S^2 considerando a significância prática e σ_0 estimado

Suponha que $(X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$ são variáveis aleatórias, $i = 1, 2, \dots, m$, de uma amostra independente tomadas na Fase I, com σ_0 desconhecido, em que i representa o número do subgrupo e Δ é a mudança admissível em σ_0 . Quando o processo está em estado de controle (IC), para $\sigma_1 = (\delta + \Delta)\sigma_0$, tem-se $\delta = 1$ e $\Delta \geq 0$.

Então, quando processo está OOC, tem-se que $\delta > 1$. Assim, $H_0: \sigma_1 \leq (\sigma_0 + \Delta\sigma_0)$ (IC), e $H_1: \sigma_1 > (\sigma_0 + \Delta\sigma_0)$ (OOC). Em IC quando o desvio padrão é conhecido, tem-se a seguinte relação, ilustrada na Equação 11:

$$s_i^2 \in \{(0; K(\sigma_0^2 + \Delta^2\sigma_0^2)) = (0; LSC)\} \quad (11)$$

Em que LSC é o Limite Superior de Controle e K é uma constante. Para σ_0 não conhecido IC ocorre quando $s_i^2 \in \{(0; K(\hat{\sigma}_0^2 + \Delta^2\sigma_0^2)) = (0; \widehat{LSC})\}$.

Na Fase II, amostras de tamanho n são tomadas, e s_i^2 é calculado de $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$. O erro tipo I é $\alpha = Pr\left(\bar{X} \notin (0, \widehat{LSC})\right)$ ou $\alpha = 1 - Pr\left(s_i^2 \in (0, \widehat{LSC})\right)$. Para um processo que está OOC, $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, para $\delta > 1$, e a estimativa do limite de controle será $\widehat{LSC} = K(\hat{\sigma}_0^2 + \Delta^2\sigma_0^2)$.

Para o estado de controle IC, pode-se escrever a Expressão 12:

$$Pr(s_i^2 \leq \widehat{LSC}) = Pr\left(\frac{s_i^2(n-1)}{\sigma_1^2} \leq \frac{\widehat{LSC}(n-1)}{\sigma_1^2}\right) \quad (12)$$

Desenvolvendo essa expressão, obtem-se a Expressão 13:

$$Pr\left(\frac{s_i^2(n-1)}{\sigma_1^2} \leq \frac{K(\hat{\sigma}_0^2 + \Delta^2 \sigma_0^2) \cdot (n-1)}{\sigma_1^2}\right) = Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{K(\hat{\sigma}_0^2 + \Delta^2 \sigma_0^2) \cdot (n-1)}{\sigma_1^2}\right) \quad (13)$$

Como $\sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2$, a Equação 13 é descrita pela Expressão 14:

$$Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{K(\hat{\sigma}_0^2 + \Delta^2 \sigma_0^2) \cdot (n-1)}{\delta^2 \sigma_0^2}\right) = Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{K\hat{\sigma}_0^2(n-1) + K\Delta^2 \sigma_0^2(n-1)}{\delta^2 \sigma_0^2}\right) \quad (14)$$

Se $U = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$, tem-se a seguinte Expressão 15:

$$Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{K\hat{\sigma}_0^2(n-1)}{\delta^2 \sigma_0^2} + \frac{K\sigma_0^2(n-1)}{\delta^2 \sigma_0^2}\right) = Pr\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{KU(n-1)}{\delta^2} + \frac{K\Delta^2(n-1)}{\delta^2}\right) \quad (15)$$

O erro tipo I será então $\alpha = 1 - Pr(s_i^2 \in (0, \widehat{LSC}))$, quando $\delta = 1$. Assim, $\alpha = 1 - Pr[X^2 \leq KU(n-1) + K\Delta^2(n-1)]$. E, o erro tipo II é $\beta = Pr(s_i^2 \in (0, \widehat{LSC}))$ quando $\delta > 1$. Portanto, foi obtida a seguinte Expressão 16 para o erro tipo II:

$$\beta = \left(X_{n-1}^2 \leq \frac{KU(n-1)}{\delta^2} + \frac{K\Delta^2(n-1)}{\delta^2}\right) = F_{X^2}\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{KU(n-1) + K\Delta^2(n-1)}{\delta^2}\right) \quad (16)$$

A incondicional ARL é uma função $p(\Delta, U, m, n, \delta)$ e obtida pela Expressão 17:

$$ARL(\Delta, m, n, \delta) = \int_0^\infty \frac{1}{1 - p(\Delta, U, m, n, \delta)} m(n-1) f_{X^2}(m(n-1)u) du \quad (17)$$

Esta é similar a Expressão 18:

$$ARL(\Delta, m, n, \delta) = \int_0^\infty \frac{1}{1 - F_{X^2}\left(X_{n-1}^2 \leq \frac{KU(n-1) + K\Delta^2(n-1)}{\delta^2}\right)} m(n-1) f_{X^2}(m(n-1)du) \quad (18)$$

5. Análise numérica

a. Métodos numéricos

A análise do desempenho das cartas de variância com parâmetro estimado e considerando a significância prática foi realizado por meio do *Software Maple*, versão 13. A solução numérica da função matemática do ARL é dada pela Expressão 18. Esta

expressão foi obtida pela construção do programa conforme o Quadro 2 mostrado a seguir.

Quadro 2 – Construção do programa

```

RR2 :=proc(m, n, δ, K, Δ); local i, fu, v, p1, Beta, F, L, S, fv, ARL,
pn2, pn, u; p1 := CDF( ChiSquare(n - 1),
( (n - 1) K · u + Δ2 · (n - 1) · K
δ2
, numeric ); fu := m · (n - 1)
· PDF( ChiSquare(m · (n - 1)), m · (n - 1) · u, numeric ); ARL
:= evalf( int( fu
1 - p1
, u = 0 .. ∞, numeric, digits = 5 ));
print(ARL); end proc
    
```

Em que m é o número de amostras retiradas na Fase I de tamanho n ; K é uma constante; Δ representa a significância prática e δ é o desvio da variância populacional. Fixou-se $K = 3$, $\delta = \{0; 1,15; 1,30; 1,50; 1,75\}$, $\Delta = \{0; 0,50\}$ e variou-se m, n . A seção a seguir apresenta os resultados obtidos por métodos numéricos.

b. Resultados numéricos

A Tabela 1 mostra o desempenho das cartas de controle S^2 considerando que a variância seja desconhecida e estimada na Fase I da implantação da carta de controle. É também considerado que haja uma significância prática denominada de Δ com implicações econômicas sobre o processo.

Tabela 1 - Desempenho da carta de controle com significância prática e parâmetro estimado para $\Delta = 0,50$, $m = 20$ e $\delta = [1,05; 1,10; 1,15; 1,20; 1,25; 1,30; 1,35]$

m	n	$\Delta = 0,50$								
		δ								
		Desempenho	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
20	3	ARL	54,61	36,790	26,230	19,590	15,190	12,160	10,000	8,410
		Pa(Ho)	0,982	0,973	0,962	0,949	0,934	0,918	0,900	0,881
		1-Pa(Ho)	0,018	0,027	0,038	0,051	0,066	0,082	0,100	0,119
	5	ARL	316,36	158,350	87,830	53,560	34,900	24,110	17,490	13,210
		Pa(Ho)	0,997	0,994	0,989	0,981	0,971	0,959	0,943	0,924
		1-Pa(Ho)	0,003	0,006	0,011	0,019	0,029	0,041	0,057	0,076
	9	ARL	9903	426,670	205,420	187,670	171,760	89,740	51,400	32,600
		Pa(Ho)	0,9999	0,998	0,995	0,995	0,994	0,989	0,981	0,969
		1-Pa(Ho)	0,0001	0,002	0,005	0,005	0,006	0,011	0,019	0,031

Observa-se na Tabela 1 que a probabilidade de aceitar H_0 , diminuiu conforme o desvio δ na variância aumenta. Por outro lado, a probabilidade de rejeitar H_0 aumenta. Se aumentar $n = 3$ para $n = 5$ e $n = 9$, a probabilidade de aceitar H_0 aumenta. Se considerar que para $1 + \Delta > \delta$ é uma situação aceitável do ponto de vista econômico, deseja-se então que a carta de controle tenha a maior probabilidade de não rejeitar H_0 . Para essa mesma configuração da Tabela 1, $m = 20$ e $n = (3, 5, 9)$, porém $\Delta = 0$, os valores obtidos para *Average Run Length* foram: $ARL = (25,8; 84,2; 809,7)$. Esses seriam os resultados de um gráfico de controle tradicional para a variância. Observe que os resultados mostrados na Tabela 1 considerando a significância prática é mais vantajosa.

A Tabela 2 mostra o comportamento da carta de controle de S^2 quando $\Delta < \delta$. Quando o processo está na condição de $1 + \Delta < \delta$, é desejável que a probabilidade de não rejeitar H_0 seja a menor possível, em contrapartida, que ARL seja pequeno, e a probabilidade de rejeitar H_0 seja a maior possível ($1 - Pa(H_0)$).

Quando se compara as Tabelas 1 e 2 observa-se que a probabilidade de rejeitar H_0 aumenta, e essa condição melhora a medida que a amostra n é aumentada. Em uma condição de significância prática, o aumento do tamanho da amostra possibilita melhorar a capacidade da carta de controle discriminar a condição de um processo aceitável de uma condição inaceitável. De modo mais específico, observe que para $\delta > 1,50$, o $ARL < 5,55$, como pode ser observado na Tabela 2, para $m=20$ e $n=3$.

Tabela 2 - Desempenho da carta de controle com significância prática e parâmetro estimado para $\Delta = 0,50$, $m = 20$ e $\delta = [1,50; 1,55; 1,60; 1,65; 1,70; 1,75; 1,80]$

m	n	$\Delta = 0,50$							
		δ							
		Desempenho	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80
20	3	ARL	5,55	4,96	4,48	4,091	3,76	3,48	3,25
		Pa(H_0)	0,820	0,798	0,777	0,756	0,734	0,713	0,692
		1-Pa(H_0)	0,180	0,202	0,223	0,244	0,266	0,287	0,308
	5	ARL	6,860	5,790	4,980	4,280	3,890	3,300	3,000
		Pa(H_0)	0,854	0,827	0,799	0,766	0,743	0,697	0,667
		1-Pa(H_0)	0,146	0,173	0,201	0,234	0,257	0,303	0,333
	9	ARL	10,74	8,18	6,44	5,23	4,35	3,70	3,21
		Pa(H_0)	0,854	0,827	0,799	0,766	0,743	0,697	0,667
		1-Pa(H_0)	0,093	0,122	0,155	0,191	0,229	0,270	0,312

Figura 1 - Comparação do desempenho da carta de variância para n=3 e n=9

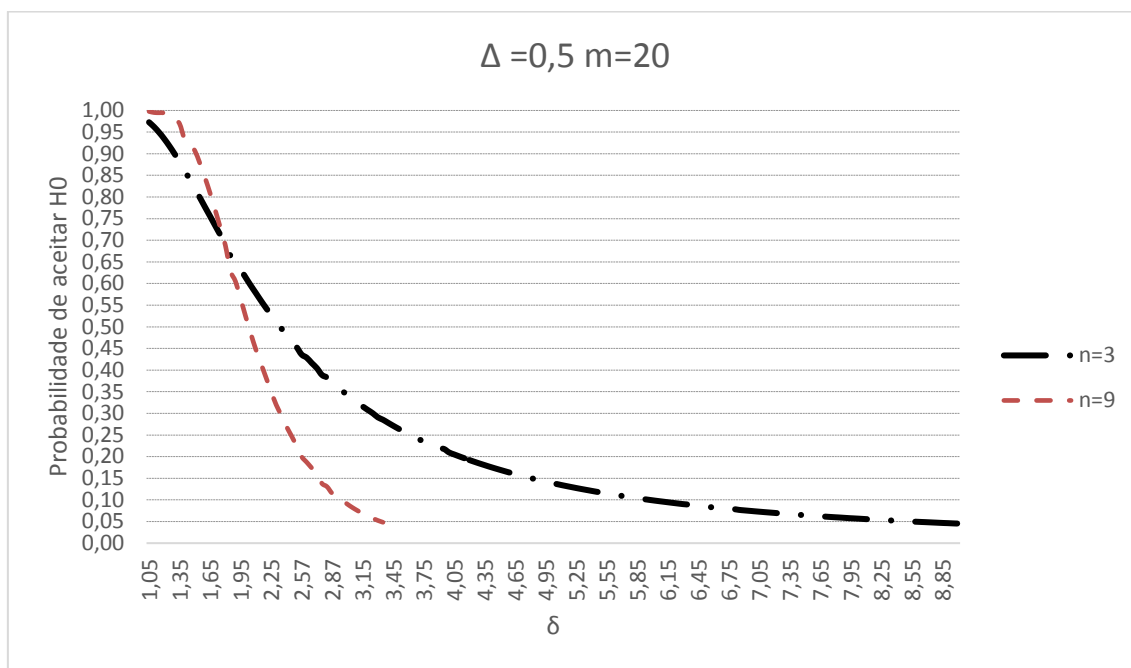


Tabela 3: Valores da constante K quando $\Delta = 0,5$ e $\delta = 1$.

m, n	K	ARL
m=20, n=3	3	54.61
	4	235.7
	4.3	371.1
m=20, n=5	3	316.3
	3.05	358.8
	3.06	367.9
m=20, n=9	2	122.9
	2.2	276.6
	2.27	370.07

Tradicionalmente os gráficos de controle são teoricamente projetados para um erro de falso positivo de 0,27%, quando em estado de controle. Para o gráfico da variância, considerando a significância prática, os valores de K são diferentes do valor tradicionalmente utilizado, de $K=3$, para um erro de falso positivo de 0,27%. Para um erro de 0,27%, o ARL seria 370,4. Desta forma, na Tabela 3 são ilustrados alguns valores do ARL para diferentes valores de K. Por exemplo, para $m=20$ e $n=5$, um valor recomendado seria $K=3,06$; e, para $m=20$ e $n=9$, recomenda-se $K=2,27$.

Um exemplo que contextualize a vantagem ao usar a significância prática é o processo de estampagem de materiais metálicos. Por exemplo, a conformação por estampagem do prato do freio a tambor de veículos leves. Essa peça tem várias

características crítica funcionais e de segurança do sistema de freio, tais como furos, raios e ângulos. Esse processo de fabricação tem pequena variabilidade instantânea, vou seja, o desvio padrão de pequenas amostras é muito pequeno, e quando comparada a capacidade de máquina em relação as especificações de engenharia, essa é muito alta, acima 1,68. Assim, cartas de controle tradicionais (conforme a abordagem proposta por Shewhart), são inadequadas para situações que ocorram pequenas mudanças na variância. Isso equivale dizer que do ponto de vista prático (custo benefício), não compensaria interromper o processo para atuar sobre causas especiais. Nesse caso, o uso de gráficos de controle com significância prática implica em uma solução gerencial que compatibilize o clássico *trade-off* entre qualidade de conformação e o custo de inspeção, por exemplo.

6. Conclusão

O objetivo do artigo foi analisar os efeitos da significância prática e da estimativa dos parâmetros em cartas de controle que monitorem a variância dos processos. Em termos conceituais, o propósito do uso de cartas de controle com significância prática é diminuir os custos de intervenções que do ponto de vista prático não são viáveis.

Nos casos em que o desvio padrão de processos de fabricação com características críticas funcionais da qualidade de produtos é aumentada em $(\delta - 1)$, e com uma magnitude inferior ao máximo tolerável, Δ , a probabilidade de aceitar H_0 aumenta com o incremento no tamanho da amostra, n . Por outro lado, quando $(\delta-1) > \Delta$, a probabilidade de aceitar H_0 reduz a medida que n aumenta. Assim, a modelagem desenvolvida neste artigo considerou o conceito de significância prática, possibilitando, dessa forma, dimensionar de modo mais econômico o processo de controle estatístico de processo, reduzindo o número e tamanho da amostra, m, n .

Esses resultados são observados nas Tabelas 1 e 2, indicando que o aumento do tamanho da amostra implica diretamente na melhoria da capacidade de discriminar uma situação desejável de outra não desejável do processo. Esse comportamento era esperado de forma intuitiva, mas por meio dos métodos números aplicados foi possível, calibrar de forma mais precisa o tamanho da amostra em função de Δ , ou seja, da significância prática.

A abordagem da significância para cartas de controle é semelhante ao da inspeção de amostras por amostragem de aceitação. A ideia é que o produto deva ser produzido a

partir de um processo com um determinável nível aceitável de variação de um dado parâmetro estatístico.

Poder-se-ia considerar que há tanto o risco do fabricante ou gestor interromper o processo sem uma justificativa econômica, quanto o consumidor receber um produto que não atenda os objetivos de qualidade total do produto.

Este artigo pode servir de apoio prático para gestores que busquem monitorar a variabilidade do processo. Para tanto é necessário admitir que os requisitos dos clientes envolvidos na análise estejam satisfeitos e que a mudança no desvio padrão (ou variância) seja menor que o pleiteado pelo cliente. Assim, foi proposto um procedimento para calcular os limites de controle que impliquem em melhores números de amostragem e tamanhos de amostra e que garantam o menor erro tipo I e II.

Recomenda-se que as empresas passem a utilizar o conceito de significância prática quando do planejamento do sistema de controle dos processos. Por outro lado, é necessário que a academia, de forma específica, os centros de formação em Engenharia Industrial e de Produção incorporem esta nova abordagem no conteúdo programático das disciplinas de engenharia da qualidade.

Referências

- AIAG/ASQC. Fundamental statistical process control reference manual. Troy, MI: AIAG. 1991.
- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations and Production Management**, v. 22, n.2, p. 241-264, 2002.
- BRAUN, W. J. Run length distributions for estimated attributes charts. **Metrika**, v. 50, p. 121-129, 1999.
- CASTAGLIOLA, P.; CELANO, G.; FICHERA, S. Comparison of the \bar{X} Chart and the t Chart when the Parameters are Estimated. **Quality Technology & Quantitative Management**, v. 10, p.1-16, 2013.
- CASTAGLIOLA, P.; MARAVELAKIS, P. A CUSUM Control Chart for Monitoring the Variance when Parameters are Estimated. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 141, n. 4, p. 1463-1478, 2011.
- CASTAGLIOLA, P.; VÄNNMAN, K. Average run length when monitoring capability indices using EWMA. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 24, p. 941-955, 2008.
- CASTAGLIOLA, P.; WU, S. Design of the c and np Charts when the Parameters are Estimated. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, v. 19, n. 2, 2012.
- CASTAGLIOLA, P.; WU, S.; KHOO, M.B.C.; CHAKRABORTI, S. Synthetic Phase II Shewhart-type Attributes Control Charts when Process Parameters are Estimated. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 30, n. 3, p. 315-335, 2014.

CHAO, M. T.; CHENG, S. W. Semicircle control chart for variables data. **Quality Engineering**, v.8, p. 441-446, 1996.

CHEN, G. The mean and standard deviation of the run length distribution of \bar{X} charts when control limits are estimated. **Statistica Sinica**, v. 7, p. 789-798, 1997.

CHEN, G.; CHENG, S. W. Max Chart: Combining X-BAR chart and S CHART. **Statistica Sinica**, v. 8, p. 263-271, 1998.

COSTA, A. F. B. Join \bar{X} and R charts with variable parameters. **IIE Transactions**, v.30, p. 505-514, 1998.

JENSEN, W.A., JONES-FARMER, L.A., CHAM P, C.W., WOODALL, W.H. Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review, **Journal of Quality Technology**, v. 38, p. 349–364, 2006.

JURAN, J.M. **A qualidade desde o projeto**. São Paulo: Thomson, 1992.

MAGALHAES, M. S.; EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B. Economic design of a $V_p \bar{X}$ chart. **International Journal Production Economics**, v. 74, p. 191-200, 2001.

MARAVELAKIS, P.; CASTAGLIOLA, P. An EWMA Chart for Monitoring the Process Standard Deviation when Parameters are Estimated. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 53, n. 7, p. 2653-2664, 2009.

MARAVELAKIS, P.E. Measurement Error Effect on the CUSUM Control Chart, **Journal of Applied Statistics**, 2011.

MONTGOMERY, D.C. **Introduction to statistical quality control**. New York: John Wiley & Sons. 2009.

WOODALL, W.H. The statistical design of quality control charts. **Journal of the Royal Statistical Society**, v.34, p. 155-160, 1985. Series D (The Statistician)

ZHANG, Y.; CASTAGLIOLA, P. Impact of the Process Parameters Estimation on the VSI X^- Chart. **In: International Conference on Reliability and Quality in Design, 17. Proceedings....**p.354-358, ISBN: 978-0-9763486-7-2, Vancouver, BC, Canada, August 2011.

PERFORMANCE ANALYSIS OF VARIANCE CONTROL CHARTS WITH ESTIMATED PARAMETER CONSIDERING THE PRACTICE SIGNIFICANCE

Abstract

The goal of this study is to analyze the effects of the practical significance and the parameters estimation in control charts to monitor the variance of processes. Numerical solutions were determined by performing modeling and simulation methods using the Maple Software environment. Experimental results showed that the obtained control charts using the practical significance detected less false positive signals compared to traditional charts. Another advantage refers to the higher discrimination of out-of-control states in processes when increasing the samples size.

Key-words: *Statistical Process Control, Practical significance, S^2 Control charts, Estimated parameter.*