EM CONSTRUÇÃO arquivos de epistemologia histórica e estudos de ciência

DOI: 10.12957/emconstrucao.2019.30447
www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/emconstrucao

Feynman e os Números Complexos

Feynman and the Complex Numbers

Raquel Anna Sapunaru

Professora de Filosofia da Ciência e afins, no Instituto de Ciência e Tecnologia da UFVJM

raquel.sapunaru@ict.ufvjm.edu.br

Leonardo Benevenuto Coelho

Formando em Engenharia Mecânica, no Instituto de Ciência e Tecnologia da UFVJM

leo_bcoelho@hotmail.com

Matheus Felipe Fernandes Oliveira

Formando em Engenharia Química, no Instituto de Ciência e Tecnologia da UFVJM

matheusfelipefernandes@hotmail.com

Recebido em: 18/09/2017
Aceito em: 14/08/2018

Resumo

O presente estudo tem como objetivo descrever de forma breve e elucidativa o funcionamento dos números complexos na perspectiva de Feynman. O autor demonstra claramente seu ponto de vista, fazendo um passo a passo dos fundamentos matemáticos básicos, até chegar aos números complexos. Conclui-se, portanto, que a escolha de Feynman ocorreu a partir de um estudo precedente de outros autores, que durante a história da matemática apresentaram suas visões sobre os números complexos, mesmo que ele tenha dado suas contribuições pessoais originais. A escolha do tema e do autor foi baseada na peculiar didática de Feynman. O estudo foi realizado através de bibliografias já existentes, pois o trabalho explica esta questão com base nas contribuições teóricas já existentes.

Palavras-chave: Feynman. Números complexos. História da Matemática.

Abstract

The present study aims to describe in a brief and elucidative way the operation of the complex numbers in Feynman's perspective. This author clearly demonstrates his point of view by taking a step-by-step basis from the basic mathematical foundations to the complex numbers. It is concluded, therefore, that Feynman's choice came from a previous study of other authors, who during the history of mathematics presented their views on the complex numbers, even if he gave his original personal contributions. The choice of theme and author was based on Feynman's peculiar didactic to deal with topics of difficult comprehension. The study was carried out through existing bibliographies, since the work explains this question based on the existing theoretical contributions.

Keywords: *Feynman. Complex Numbers. History of Mathematics.*

Introdução

De acordo com Silva, et al. (2008) é difícil saber precisamente quando surgiram as primeiras investigações utilizando raízes quadráticas de números negativos ($\sqrt{x}, x \in R, x<0$)). Porém, sua história é conhecida desde o ano de 665 d.C., por Brahmagupta. Naquela época, o conceito de número estava ligado ao conceito de quantidades e medidas; logo, não fazia qualquer sentido trabalhar com uma matemática que não pudesse fornecer soluções interpretáveis dentro de problemas do mundo sensível. Assim, grandes matemáticos ignoraram soluções matemáticas que levariam valores de raízes de números negativos.

Segundo Boyer (2010) e Eves (2004), o italiano Cardano publicou em 1545 o método de resolução de equações cúbicas de terceiro grau. Mesmo com algumas soluções de equações cúbicas já conhecidas, Cardano não conseguia manipular tais expressões para chegar aos mesmos resultados. Por isso, nota-se que a capacidade de compreender resultados obtidos para métodos desconhecidos fez com que a investigação, o desenvolvimento, a descoberta e a posterior aceitação dos conceitos e métodos envolvidos fossem exploradas.

Em 1572, o também italiano Bombelli publicou uma maneira de resolver expressões envolvendo raízes quadráticas de números negativos. Ele considerou essas raízes como um número e manipulou-a da mesma maneira que se faz com os números reais. Assim, a utilização dessas raízes mostra como os problemas reais motivaram o processo de construção e sistematização do Conjunto dos Números Complexos.

A busca por um método generalizado e eficaz para se chegar à solução de um problema matemático fez com que os números complexos ganhassem aceitação. Entre as várias personalidades que contribuíram para a sustentação dessa ideia na resolução de equações algébricas destacam-se Descartes e Leibniz. Em 1637, Descartes introduziu o termo "imaginário" para se referir a problemas envolvendo raiz quadrada de números negativos, visto que ele os considerava insolúveis. Já Leibniz, em 1670, classificou os números imaginários entre existentes e não existentes.

Nos séculos XVIII e XIX, a matemática sofreu um salto quantitativo e qualitativo. Isso ocorreu devido ao Iluminismo, período histórico de grande desenvolvimento matemático e de dissociação deste conhecimento da física. Neste cenário, ocorreu a concretização de ideias mais abstratas e entre elas encontra-se a consagração dos números imaginários.

Já no século XX, um dos grandes nomes da física, Richard Feynman, trabalhou de maneira mais didática com esses números em suas *Lições de Física*. Segundo Roditi (2005), Feynman foi um físico americano, lembrado como um dos mais célebres e reverenciado como o mais vanguardista dos cientistas do século XX. Ganhador do prêmio Nobel em 1965, Feynman era considerado um gênio da ciência já em 1935, quando ainda tinha 18 anos. Mais interessado na física quântica, desenvolveu vários estudos sobre esse tema e escreveu alguns artigos, tendo trabalhado com grandes cientistas como Albert Einstein, Wolfgang Pauli e John von Neumann. Em seu livro, *Lições de Física* (2008), Feynman, Leighton e Sands utilizam uma linguagem matemática acessível para despertar em seu leitor o interesse pela física e, em seguida, buscam o entendimento instantâneo do que foi escrito, de forma que, *a posteriori*, seu leitor consiga resolver problemas do cotidiano.

De forma menos didática e mais formal, o matemático russo N. Puskinov define os números complexos como "Um número complexo é a expressão $a + bi$ onde a e b são números reais [e] i é então chamado de unidade imaginária, definida pelas igualdades $i=\sqrt{(-1)}$ ou $i^2=-1$ é chamada de parte real, e *bi*, [de] parte imaginária do número complexo." (PISKUNOV, 1969, p.233). Assim trabalhando apenas com o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, não há solução, por exemplo, para a equação $x^2 + 1 = 0$. Para admitir uma solução para essa equação é necessário a existência de um número, que representamos pela letra *i*, tal que $i^2=-1$ ou, de outra forma, $i=\sqrt{(-1)}$. Não há nenhum número real tal que ele ao quadrado seja um número real negativo. Dessa forma, considera-se um conjunto que identificamos por C, o conjunto dos números complexos, tal que $\mathbb{R} \subset C$ e Deseja-se, nesse conjunto C, assim como ocorre para $\mathbb{R}$, que a soma de dois elementos do conjunto continue sendo um elemento do conjunto e o mesmo valendo para o produto. Define-se então: $C=\{a+bi | a \in R, e\ b \in R\}$; com as operações: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ e $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.[1]

1 Informação obtida por comunicação oral. Professor Douglas F. G. Santiago em 11 de setembro de 2017.

Posto isto, este artigo é objeto de um breve estudo que se propôs a entender e esclarecer alguns aspectos dos números complexos na visão de Feynman. Portanto, foi realizado um procedimento reflexivo e sistemático, no qual os dados foram obtidos por documentação indireta, isto é, pesquisa de uma bibliografia já existente, já que busca explicar um problema com base em contribuições teóricas publicadas em livros. Trata-se, então, de um artigo de compilação, lembrando que esse tipo de estudo consiste em reunir ordenadamente a bibliografia selecionada, combiná-la e dela extrair aquilo que faz-se interessante para o cumprimento do objetivo.

As ideias de Feynman

Para Feynman (2008), a matemática é uma ferramenta de extrema importância, pois grande parte das leis da física pode ser escrita com ela, particularmente a partir do conhecimento dos números inteiros, do que é o zero e do significado de aumentar um número por uma unidade.

Assim sendo, Feynman supõe um número "a" inteiro e a ele se acrescenta uma unidade "b". Tem-se então um número "$a + b$", definido como uma adição de números inteiros. E, ao considerar uma equação que começa com Ø, a ela se adiciona "a" e "b" sucessivas vezes. Dessa maneira, obtém-se como resultado a multiplicação por inteiros. Para ele, pode-se ter também uma sequência de multiplicações ao se iniciar com e multiplicar por e vezes sucessivas. Nesse caso, tem-se uma potência a^b. Então: $a+b=b+a$; $a+(b+c)=(a+b)=c$; $ab=ba$; $a(b+c)=ab+ac$; $(ab)c=a(bc)$; $(ab)^c=a^c b^c$; $a^b a^c=a^{(b+c)}$; $(a^b)^c= a^{(bc)}$; $a+0=a$; $a .1 = a$; $a^1=a$.

Feynman continua explicando que as operações inversas à adição, à multiplicação e à potenciação podem ser também obtidas, assumindo que a e c são informados e que deseja-se encontrar os valores de que satisfazem as equações $a + b = c, ab = c$ e $b^a = c$, faz-se $b=c-a$. Desse modo, obtém-se a subtração. Usando a mesma linha de raciocínio, a operação divisão dá-se quando $b=c/a$ e a raiz a-ésima de c será: b = a √c. Agora a potenciação apresenta outra propriedade chamada logaritmo, que seria $b = \log_a c$.[2] Em suma, tem-se que: (a) adição: $a+b=c$; (a') subtração: $b=c-a$; (b) multiplicação: $ab=c$; (b') Divisão: $b=c/a$; (c) Potência: $a^b=c$; (c') Raiz: ; (d) Potência: $b=\sqrt[a]{c}$; (d') Logaritmo: $b=\log_a c$.

Na sequência, o físico supõe uma equação $b=3-5$. De acordo com a definição de subtração dada anteriormente, faz-se necessário encontrar um número que somado a 5 resultaria em 3, sendo que ele não existe ao se levar em conta os números inteiros positivos. Para resolver essa equação é preciso utilizar abstração e generalização. É preciso notar que, para Feynman, em todas as estruturas algébricas, abstrai-se as definições originais da adição e da multiplicação, assumindo que elas estão em uma classe mais ampla de números. Assim, objetivando mostrar que $7-13=0-6$ é mister trabalhar com regras bem definidas. A partir daí, vê-se que todas as subtrações podem ser feitas através um novo conjunto de números: $0-1, 0-2, 0-3, \ldots, 0-6, \ldots, 0-n$ e assim por diante.

No caso das potências, Feynman deseja descobrir o que $a^{(7-13)}$ significa. Sabe-se apenas que $7-13$ é uma solução do problema $(7-13)+13 = 7$. Portanto, sabe-se que: $a^{(7-13)}\, a^{13}= a^7$. Dessa maneira, pela definição da divisão tem-se $a^{(7-13)} = a^{7/}\, a^{13}$, podendo ser reduzida a $1/a^6$.

Faça-se agora uma definição de $10^{\sqrt{2}}$. A princípio, Feynman afirma que a resposta é simples, caso haja uma aproximação da $\sqrt{2}$ até um determinado número de casas decimais. Neste caso, a potência será racional e pode-se tomar a raiz aproximada. No cálculo de raízes quadradas, raízes cúbicas e outras raízes existe um

2 Segundo Katz (2010), a ideia de logaritmo teve o início nas formas trigonométricas que transformavam a multiplicação em adição ou subtração. Assim, se alguém precisasse calcular os lados de um triângulo usando a lei dos senos seriam necessárias uma multiplicação e uma divisão; e como os valores tinham muitas casas decimais, os cálculos eram longos e suscetíveis a erros. Por essa razão, os astrônomos do século XVI perceberam que seria mais simples se utilizassem adições e subtrações em vez de multiplicações e divisões. Com isso, começaram a usar fórmulas e uma tabela para determinar cossenos. A diferença entre eles era então o produto desejado, sem qualquer multiplicação. Na virada do século XVII, Napier e Bürgi tiveram a ideia de produzir uma tabela que permitiria que fossem multiplicados quaisquer números por meio de adições. Daí por diante, surgiram trabalhos mostrando a teoria por trás da construção das tabelas e como elas deviam ser utilizadas.

processo aritmético disponível no qual obtém-se uma casa decimal após a outra. Contudo, para o cálculo de potências irracionais e logarítmicas o problema inverso é tão grande que não existe um processo aritmético simples para esse cálculo. Portanto, para resolver $x=10^\wedge\sqrt{2}$ primeiramente há de se resolver $10^x=2$ ou $x=-\log_{10}2$. A ideia geral para esse cálculo é simples. Se 10^1,$10^{4/10}$,$10^{1/100}$,$10^{4/1000}$ etc. pudessem ser calculadas e ao multiplicá-las conjuntamente o resultado seria $10^{1,414}$ ou $10^{\sqrt{2}}$. Porém, em vez de calcular $10^{1/10}$ etc. o cálculo deveria ser $10^{1/2}$, $10^{1/4}$... Por essa razão, as tabelas de logaritmos são de grande utilidade prática, a menos do cálculo das raízes, já que com qualquer base: $\log_b(ac)= \log_b a+ \log_b c$.

No raciocínio de Feynman, restaria saber o valor da base *b*, mesmo que, de fato, não faria nenhuma diferença a base que é usada. Pode-se usar o mesmo princípio o tempo todo. Usa-se o logaritmo em qualquer base; acha-se o logaritmo em qualquer outra base, meramente pela mudança na escala. O exemplo de Feynman é claro: se a equação anterior é multiplicada por 61, ela é tão verdadeira quanto uma tabela de logaritmos com uma base *b* e se toda a tabela fosse multiplicada por 61, não faria qualquer diferença.

Portanto, pode-se resolver a equação $b^a= c$ para qualquer c a partir de uma determinada tabela. O problema é achar o logaritmo do mesmo número *c* em alguma outra base, como, por exemplo, na base *x*. O exemplo de Feynman é o seguinte: resolver $x^{a'} = c$. Primeiramente, $x = b^t$. O que definirá *t* é saber os valores de *x* e *b*. Tem-se, $t = log_b\, x$. Com isso, substitui-se *t* na equação e resolve-se para a'. *Daí,* $(b^t)^{a'} = b^{ta'}= c$. Em outras palavras, ta'é o logaritmo de *c* na base *b*. Assim, $a' = a/t$. Por isso, Feynman conclui que logaritmos na base *x* são simplesmente $1/t$, uma constante multiplicada pelos logaritmos na base *b*. Dessa maneira, qualquer tabela de logaritmo é equivalente a qualquer outra tabela de logaritmo ao multiplicá-la por uma constante e a constante é $1/log_b x$. Isto permite escolher uma base em particular e por conveniência utiliza-se a base *10*.

A partir da Tabela 1, vê-se o cálculo sucessivo das raízes quadradas de 10, por tentativa e erro.

Tabela 1 - Sucessivas raízes quadradas de potência dez

Potência s	1024 s	10^8	(/s
1	1024	10,00000	9,00
1/2	512	3,16228	4,32
1/4	256	1,77828	3,113
1/8	128	1,33352	2,668
1/16	64	1,15478	2,476
1/32	32	1,074607	2,3874
1/64	16	1,036633	2,3445
1/128	8	1,018152	2,3234
1/256	4	1,0090350	2,3130
1/512	2	1,0045073	2,3077
1/1024	1	1,0022511	2,3051
			↓
Δ / 1024	Δ	1+0,0022486 Δ	← 2,3025
(Δ→0)			

Fonte: Feynman, Leighton e Sands, 2008, pp. 22-1 – 22-6.

A pergunta agora é: De onde as tabelas de logaritmo realmente se originam? O processo é mostrado na Tabela 2 e os valores numéricos são mostrados na Tabela 1, colunas 2 e 3.

Tabela 2 - Cálculo de um logaritmo:

$$2 \div 1{,}77828 = 1{,}124682$$

$$1{,}124682 \div 1{,}074607 = 1{,}04659$$

$$2 = (1{,}77828)(1{,}074607)(1{,}036633)(1{,}090350)(1{,}000573)$$

$$= 10[1/1024(256+32+16+4+0{,}254] = 10[308{,}254/1024]$$

$$= 10^{0{,}30103} \qquad (573/2249 = 0{,}254)$$

$$\log_{10} 2 = 0{,}30103$$

Fonte: Feynman, Leighton e Sands, 2008, pp. 22-1 – 22-6.

O uso de tais tabelas é a maneira pela qual potências e logaritmos de números irracionais são calculados. Suponha-se uma solução especifica *de* $x^2 = -1$ sendo chamada de i. Como na definição de Puskinov, o quadrado de i é -1. Ao criar números pela adição sucessiva de *is* e também pela sua multiplicação, adicionando outros números e assim por diante, vê-se que todos os números podem ser escritos na forma $p + iq$, onde e são os chamados de números reais. O número é chamado de número unitário imaginário. Qualquer número real multiplicado por i é chamado de imaginário puro. O número mais geral, a, é da forma $p + iq$ e é chamado de número complexo. Ao se multiplicar dois números complexos $(r + is)(p + iq)$ e usando as regras, obtém-se

$$(r + is)(p + iq) = rp + r(iq) + (is)p + (is)(iq)$$
$$= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq)$$
$$= (rp - sq) + i(rq + sp)$$

já que $ii = i^2 = -1$. Pode-se dizer que todos os números que utilizam as regras da adição e da multiplicação possuem essa forma matemática, sendo que, ao se adicionar dois números complexos, $(p + iq) + (r + is)$, a resposta é $(p + r) + i(q + s)$. Tem-se agora o cálculo de a uma potência complexa, mas não somente a uma potência irracional, como também a uma potência $10^{(r+is)}$. Com isso tem-se:

$$10^{(r+is)} = 10^r \, 10^{is}$$

chama-se 10^{is} de $x+iy$. Assim, dado , acha-se x e y:

$$10^{is} = x + iy$$

então, o complexo conjugado da equação deve ser também verdade, tal que:

$$10^{-is} = x - iy$$

É possível deduzir também a partir da multiplicação desses dois números que:

$$10^{is} \, 10^{-is} = 10^0 = 1 = (x+iy)(x-iy) = x^2 \, y^2$$

Com a obtenção desses resultados, pode-se calcular todas as potencias imaginarias de , isto é calcular. Com isso, tem-se a seguinte tabela:

Tabela 3 - Quadrados sucessivos de $10^{i/1024}=1+0{,}0022486i$

Potência *is*	1024*s*	10^{is}
i/1024	1	1,00000+0,00225 *i**
i/512	2	1,00000+0,00450 *i*
i/256	4	0,99996+0,00900 *i*
i/128	8	0,99984+0,01800 *i*
i/64	16	0,99936+0,03599 *i*
i/32	32	0,99742+0,07193 *i*
i/16	64	0,98967+0,14349 *i*
i/8	128	0,95885+0,28402 *i*
i/4	256	0,83872+0,54467 *i*
i/2	512	0,40679+0,91365 *i*
i/1	1024	-0,66928+0,74332 *i*
		*Deveria ser 0,0022486 *i*

Fonte: Feynman, Leighton e Sands, 2008, pp. 22-1 – 22-6.

Feynman continua aprofundando-se nas potências de 10 até chegar a $10^{i/8}$. Vê-se aqui que *x* diminui, passa por zero, quase chega a a – 1 e depois retorna. O valor de *y* também está indo para frente e para trás. Na Figura , os pontos representam os números que aparecem na Tabela 4 e as linhas são simplesmente um desenho para auxiliar a visualização. Vê-se, portanto, que os números *x* e *y* oscilam. Os 10^{is} se repetem e sendo a Tabela 4 periódica, então sua quarta potência seria i^2 ao quadrado. Novamente, seria +1 e assim por diante, já que $10^{0,68i}$ é igual a *i*. Elevando a quarta potência, descobre-se que $10^{2,72i}$ é igual a +1.

Tabela 4 – Sucessivas potencias de $10^{i/8}$

p=potência.8*i*	$10^{i/8}$
0	1,00000+0,00000i
1	0,95882+0,28402i
2	0,83867+0,54465i
3	0,64944+0,76042i
4	0,40672+0,91356i
5	0,13050+0,99164i
6	-0,15647+0,98770i
7	-0,43055+0,90260i
8	-0,66917+0,74315i
9	-0,85268+0,52249i
10	-0,96596+0,25880i
11	-0,99969-0,02620i
12	-0,95104-0,30905i
14	-0,62928-0,77717i
16	-0,10447-0,99453i
18	+0,45454-0,89098i
20	+0,86648-0,49967i
22	+0,99884+0,05287i
24	+0,80890+0,58836i

Fonte: Feynman, Leighton e Sands, 2008, pp. 22-1 – 22-6.

As curvas representadas na Figura 1, se parecem com o seno e cosseno e devem ser chamadas, por enquanto, de seno algébrico e cosseno algébrico, na notação linguística de Feynman.

No entanto, em vez de usar a base 10, para o autor, deve-se colocar os valores na base natural, o que somente muda a escala horizontal. Então, atribui-se 2,3025s para t e escreve-se $10^{is}=e^{it}$, onde é um número real. Tem-se $e^{it}= x + iy$ e essa equação deve ser escrita como cosseno algébrico de t somada i vezes o seno algébrico de t. Assim:

$$e^{it}=\cos t + i \, sen \, t$$

Ao criarem-se duas novas funções algébricas, revelam-se duas funções que são naturais à geometria, estabelecendo-se uma ligação entre a álgebra e a geometria:

$$e^{i\theta}=\cos \theta + i \, \mathrm{sen} \, \theta$$

Desse modo, relaciona-se a geometria com a álgebra pela representação dos números complexos em um plano. A posição horizontal de um ponto é x, a posição vertical de um ponto é y como na Figura 2; e todo número complexo é representado por $x + iy$. Logo, se a distância radial a esse ponto é chamada de r e o ângulo é chamado de θ, a lei algébrica $x + iy$ é que é escrita na forma $re^{i\theta}$, onde as relações geométricas entre x,y,r e θ são mostradas.

Conclusão

Retomando o objetivo deste estudo, ou seja, compreender e aclarar alguns enfoques sobre os números complexos na ideia de Feynman, é importante ressaltar que a utilização de raízes quadráticas de números negativos já era conhecida há muitos séculos. Grandes matemáticos ignoraram soluções que se obtinham valores de raízes de números negativos, provavelmente por não verem nelas qualquer utilidade, já que o conceito de número estava ligado às quantidades e às medidas do mundo sensível. Assim, mesmo tendo algumas soluções de equações cúbicas conhecidas, Cardano não conseguia manipulá-las. Bombelli deu um passo à frente e considerou a raiz quadrática de um número negativo como um número. Descartes cunhou o termo 'imaginário', pois ele também não sabia o que fazer com essas raízes. No século XVIII, o Iluminismo fez com que a matemática desse um salto quantitativo e qualitativo a e a partir daí, ocorreu a consagração dos números imaginários.

Sendo o foco principal do presente artigo a perspectiva de Feynman, cabe aqui recordar que, para ele, grande parte das leis da física poderiam ser escritas na forma matemática, com o conhecimento dos números inteiros e suas regras de manipulação. Para Feynman, a utilização dos números complexos deveria decorrer a partir das definições das propriedades da adição, da multiplicação, da subtração, da divisão, da potenciação, da raiz e do logaritmo.

Acerca das operações de soma, multiplicação e potenciação, Feynman mostrou que valem as seguintes propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro, distributiva, produto de potência de mesma base, quocientes de potências de mesma base, potência de potência, potência de um produto. Já para encontrar as operações inversas à adição, à multiplicação e à potenciação, considerando que a e c são informados e que deseja-se encontrar os valores de b que sejam satisfeitos nas equações $a + b = c, ab = c$ e $b^a = c$, para subtração tem-se $b=c-a$, para divisão $b=c/a$ e a raiz a-ésima de c será: $b = a \sqrt{c}$. A potenciação apresenta outra propriedade chamada logaritmo, onde $b = log_a c$.

A partir dos conhecimentos prévios relacionados aos fundamentos matemáticos básicos, foram estudados os números complexos na perspectiva de Feynman. Dado que uma solução específica de $x^2= - 1$ foi chamada de i, o quadrado de i era igual $a - 1$. Ao inventar números pela adição sucessiva de is e também pela sua multiplicação, adicionando outros números e assim por diante, viu-se que todos os números poderiam ser escritos na forma $p + iq$, onde p e q foram chamados de números reais. O número i foi chamado de número unitário imaginário e qualquer número real multiplicado por *i* foi chamado de imaginário puro. O número mais geral, a, da forma $p + iq$, acabou conhecido como número complexo.

Por fim, a escolha de Feynman foi fruto de um estudo prévio[3] de outros autores que, ao longo da história da matemática, mostraram suas visões sobre os números complexos. Feynman demonstra claramente seu ponto de vista, fazendo um passo a passo, do mais fácil para o mais difícil de ser compreendido, impossível de ser ignorado por aqueles que desejam entender a dinâmica desses números.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* 6ª. ed. Campinas: UNICAMP, 2004.

FEYNMAN, R. P; LEIGHTON R. B.; SANDS, M. Álgebra. In: FEYNMAN, R. P; LEIGHTON R. B.; SANDS, M. *Lições de Física*: Lições de Física. Vol. I, Porto Alegre, 2008. Capítulo 22, p.22-1 – 22-6.

KATZ, V. J. *História da Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

PISKUNOV, N. *Differential and Integral Calculus*. Moscow: Mir Publishers, 1969.

SILVA, E. L.; SOUZA, A. R.; MARQUES, E. M. R. *Números e Funções Complexas:* representação e interpretação gráfica. São Paulo, 2008. p.11–14.

3 Não faz parte do escopo deste artigo mostrar esse estudo.