Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2023.72642
Recebido em 20 Jan. 2023 | Aceito em 28 Set. 2023

O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA VIA CÁLCULO DIFERENCIAL

THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM VIA DIFFERENTIAL CALCULUS

ALDROVANDO L. ARAÚJO[a]   JOSÉ J. PEDROSA[b]

Resumo

Neste trabalho propomos uma solução alternativa para o problema da braquistócrona usando apenas ferramentas e argumentos de Cálculo Diferencial e Integral e de Física Básica, evitando totalmente a equação de Euler-Lagrange e a Teoria dos Funcionais como usualmente é apresentado o problema. Esta abordagem poderia ser introduzida para alunos de um curso de cálculo diferencial como aplicação de técnicas de optimização dentro do conjunto de aplicações clássicas da derivada e integral.

Palavras-chave: Braquistócrona, cálculo diferencial, ciclóide.

Abstract

In this article we propose an alternative solution for the brachistochrone problem, where we use only elementary arguments and tools from Differential and Integral Calculus and Elementary Physics, avoiding completely the Theory of Functionals and Euler-Lagrange Equation as customarily presented. This solution could be introduced to students of an ordinary Differential and Integral Calculus course as an application of Optimization Techniques.

Keywords: Brachistochrone, differential calculus, cycloid.

MSC2010: 97I40

[a]Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5308-113X **E-mail:** luis.azeredo@ufsc.br

[b]Instituto de Matemática e Estatística - IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3661-750X **E-mail:** zejulio@ime.uerj.br

1 Introdução

O problema que propomos resolver consiste em encontrar a equação diferencial da braquistócrona ou curva de tempo mínimo usando apenas argumentos de cálculo diferencial aplicado a um problema de Mecânica Clássica. O problema da braquistócrona é um dos problemas mais famosos do século 17, usado para desafiar matemáticos da época (como Newton) e foi uma das principais motivações para o surgimento do Cálculo das Variações (veja [6],[5] ou [10]). Pode ser definido do seguinte modo: dados dois pontos A e B no plano, encontrar a trajetória ao longo da qual um objeto desliza, sem atrito, sob ação da gravidade, no menor tempo possível de A a B, supondo que ele começa em A no repouso e termina em B. Este problema é obviamente um problema de otimização, e aqui deveremos tratá-lo como um problema de otimização de um curso de cálculo diferencial e integral. Uma revisão bibliográfica mostra que este problema sempre é apresentado de dois pontos de vista ou via Cálculo da Variações e a equação de Euler-Lagrange (por exemplo, veja [9]) ou através do Princípio de Fermat como na visão de Bernoulli ([4]). Queremos apresentar uma terceira maneira de resolvê-lo, que usa apenas argumentos de um curso de cálculo diferencial e integral, podendo assim ser apresentado em um curso destes como aplicação da derivada e da integral. Antes de apresentar as condições do problema, gostaríamos de exibir, usando diferenciais e hipóteses físicas como se obtém a expressão do tempo de descida do objeto para cada trajetória possível. Este tempo de descida se expressa através de uma integral que envolve a função cujo gráfico descreve a trajetória do objeto, a saber $y(x)$. Dado que o problema assume que não existe atrito, a lei da conservação da energia mecânica implica que a soma das energias potencial e cinética se mantém constante ao longo do movimento. Isto é

$$K + U = \text{const},$$

onde K denota a energia cinética do corpo e U a sua energia potencial. Para um objeto próximo à superfície da terra a energia potencial pode ser aproximada, assumindo que a energia potencial na superfície da Terra é zero, pela expressão

$$U = mgh,$$

onde h denota a altura que o objeto se encontra relativamente à superfície da Terra. Um bela prova desta simplificação se encontra em [8]. Da lei de conservação, considerando os pontos em um sistema de coordenadas cartesiano $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, com $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$, a direção positiva do eixo Y apontando para baixo, com o solo na coordenada $y = H$ e g a aceleração da gravidade temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(H - y) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(H - y_0)$$

$v_0 = 0$ e $y_0 = 0$ acarreta:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}mv^2 + mgH - mgy = mgH,\\
&\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0,\\
&v = \sqrt{2gy} \qquad \text{e}\\
&v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}.
\end{aligned}$$

Assim o tempo necessário para percorrer a trajetória completa será

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}\\
&= \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}.
\end{aligned}$$

A integral T, no Cálculo Variacional, é chamada de funcional e nosso problema se resume a encontrar uma função $y(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_1]$, satisfazendo as condições

$$y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1$$

que minimiza o funcional T. Para encontrar a função que produz o menor valor de T, observe primeiro que a propriedade minimizante é uma propriedade local, a saber: se $y(x)$ minimiza o functional T no intervalo $[x_0, x_1]$, então para qualquer subintervalo $[c, d] \subset [x_0, x_1]$ a restrição $y_{|[c,d]}(x)$ de y ao intervalo, minimiza

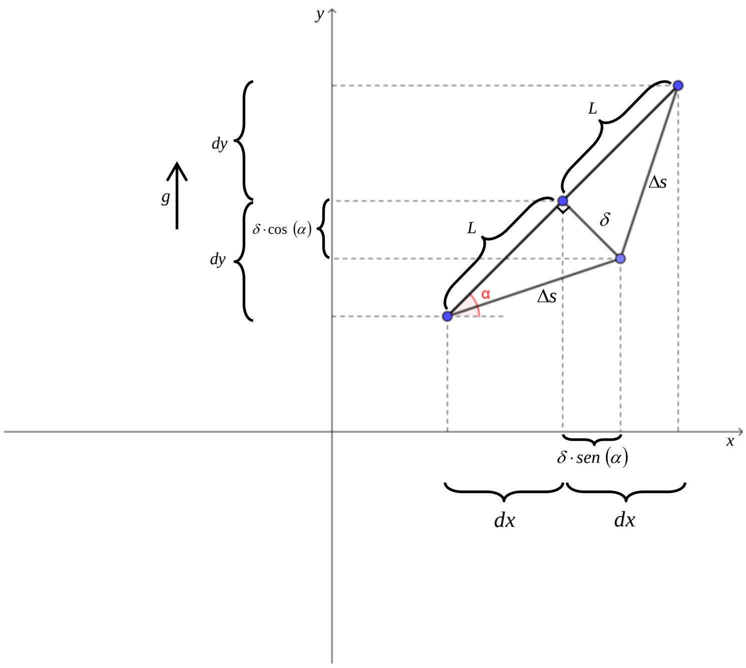
$$T_{c,d} = \int_c^d \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}},$$

subjeito às condições de contorno

$$y_{|[c,d]}(c) = y(c), \quad y_{|[c,d]}(d) = y(d).$$

Observe que o funcional está definido por uma integral e portanto precisamos que o integrando seja de fato integrável e como continuidade implica integrabilidade e diferenciabilidade implica continuidade (ver [1]), então é natural assumir a existência de y'' para termos continuidade do funcional. A segunda ideia fundamental é que devemos considerar, dado que a propriedade é estritamente local, apenas funções em um intervalo pequeno, formadas por dois segmentos de reta, como na figura 2.

Figura 1: Modelo das Funções



2 Argumento Principal

Vamos utilizar as seguintes aproximações:

$$\sqrt{x+dx} \cong \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x+dx} \cong \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}dx \tag{2}$$

que seguem da conhecida fórmula do cálculo diferencial

$$f(x+dx) \cong f(x) + f'(x)dx.$$

O teorema de Pitágoras implica que $\Delta s = \sqrt{L^2+\delta^2}$ e aplicando (1) com $x = L^2$ e $dx = \delta^2$ temos:

$$\Delta s = \sqrt{L^2+\delta^2} \cong L + \frac{1}{2L}\delta^2. \tag{3}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&v^2 - v_0^2 = 2gh \\
&(v - v_0)(v + v_0) = 2gh
\end{aligned}
$$

dy pequeno $\Rightarrow \frac{v+v_0}{2} \cong v_0$, e assim

$$
\begin{aligned}
&(v - v_0)(v + v_0) \cong (v - v_0)2v_0 \cong 2gdh \Rightarrow \\
&v - v_0 \cong \frac{gdh}{v_0} \\
&dv \cong \frac{gdh}{v_0}.
\end{aligned}
$$

Como $dh = \delta \cos \alpha$ segue que

$$dv \cong \frac{gdy}{v_0} = \frac{g\delta \cos \alpha}{v_0} \tag{4}$$

Estamos prontos para estimar o tempo de descida, somando o tempo de descida de cada pedaçinho de nossa trajetória.

$$
\begin{aligned}
T =& \frac{\Delta s}{v_0} + \frac{\Delta s}{v_0 + dv} \\
=& \Delta s \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0 + dv} \right)
\end{aligned}
$$

e aplicando (2) obtemos

$$T = \Delta s \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0} - \frac{dv}{v_0^2} \right)$$

e usando (3) e (4) finalmente obtemos

$$T = \left(L + \frac{\delta^2}{2L} \right) \left(\frac{2}{v_0} - \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{g\delta \cos \alpha}{v_0} \right). \tag{5}$$

Tendo obtido a expressão de T em função de δ, como queremos minimizar T, vamos derivar T relativamente a δ para obtermos os valores críticos de δ. Diferenciando T relativamente a δ

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\delta} =& \frac{\delta}{L}\left(\frac{2}{v_0} - \frac{g\delta\cos\alpha}{v_0^3}\right) + \left(L + \frac{\delta^2}{2L}\right)\left(-\frac{g\cos\alpha}{v_0^3}\right)\\ =& \frac{2\delta}{v_0 L} - \frac{g\delta^2\cos\alpha}{Lv_0^3} - \frac{Lg\cos\alpha}{v_0^3} - \frac{g\delta^2\cos\alpha}{2Lv_0^3}\\ =& \frac{2\delta}{v_0 L} - 3\frac{g\delta^2\cos\alpha}{2Lv_0^3} - \frac{Lg\cos\alpha}{v_0^3},\end{aligned}$$

e desconsiderando o segundo termo, uma vez que ele é muito pequeno, tem-se

$$\frac{dT}{d\delta} = \frac{2\delta}{v_0 L} - \frac{Lg\cos\alpha}{v_0^3}.$$

Fazendo $\frac{dT}{d\delta}$ igual a zero, obtemos

$$\frac{2\delta}{v_0 L} - \frac{Lg\cos\alpha}{v_0^3} = 0.$$

Usando que $v_0^2 = 2gy$, chegamos a equação

$$\frac{2\delta}{L} = \frac{L\cos\alpha}{2y}. \tag{6}$$

Passemos, agora, a estimar a segunda derivada y''. Para tal, observe que

$$\begin{aligned}y_1' =& \frac{dy + \delta\cos\alpha}{dx - \delta \text{ sen } \alpha}\\ y_2' =& \frac{dy - \delta\cos\alpha}{dx + \delta \text{ sen } \alpha}\end{aligned}$$

e, assim,

$$y'' = \frac{y_2' - y_1'}{dx} = \frac{-2\delta(dy\,\text{sen}\,\alpha + dx\cos\alpha)}{dx(dx^2 - (\delta\,\text{sen}\,\alpha)^2)}.$$

Como $\delta^2\,\text{sen}^2\alpha$ é muito pequeno, podemos reduzir a equação à

$$\begin{aligned}y'' =& -\frac{2\delta}{(dx)^2}\left(\frac{dy}{dx}\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha\right)\\ =& -\frac{2\delta\cos\alpha}{(dx)^2}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right).\end{aligned}$$

Dado que $\frac{dy}{dx} = y'$ e $\tan\alpha = y'$, podemos escrever

$$y'' = -\frac{2\delta\cos\alpha}{(dx)^2}\left(y'^2 + 1\right).$$

Além disso, como $dx = L\cos\alpha$, temos que

$$y'' = -\frac{2\delta}{L^2\cos\alpha}\left(y'^2 + 1\right).$$

Finalmente, usando (6), obtemos

$$y'' = -\frac{1}{2y}\left(y'^2 + 1\right), \tag{7}$$

que é exatamente a equação da ciclóide. De fato, esta equação se obtém quando calculamos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

para o problema da braquistócrona, cujo funcional já vimos ser

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}},$$

e a função que define o funcional, que estamos denotando por F, é

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Vamos verificar isto agora.

$$\begin{aligned}
F(x, y, y') &= \frac{(1 + y'^2)^{1/2}}{y^{1/2}}. \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= 0. \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{(1 + y'^2)^{1/2}}{2y^{3/2}}. \\
\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}\, y^{1/2}}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = -\frac{y'}{2(1+y'^2)^{1/2}y^{3/2}}.$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}y^{1/2}}.$$

Assim

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}$$

F não depende de x, logo $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = 0$.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(1+y'^2)^{1/2}}{2y^{3/2}} + \frac{y'^2}{2(1+y'^2)^{1/2}y^{3/2}} - \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}y^{1/2}} \\
&= \frac{-(1+y'^2)^2 + (1+y'^2)y'^2 - 2yy''}{2(1+y'^2)^{3/2}y^{3/2}} \\
&= \frac{-1-2y'^2-y'^4+y'^2+y'^4-2yy''}{2(1+y'^2)^{3/2}y^{3/2}} \\
&= \frac{-1-y'^2-2yy''}{2(1+y'^2)^{3/2}y^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

corresponde à

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0,$$

isto é:

$$y'' = -\frac{1}{2y}\left(y'^2 + 1\right).$$

Na literatura (veja [2],[3], [7] ou [9]), a equação da ciclóide é apresentada na forma

$$y(1+y'^2) = c.$$

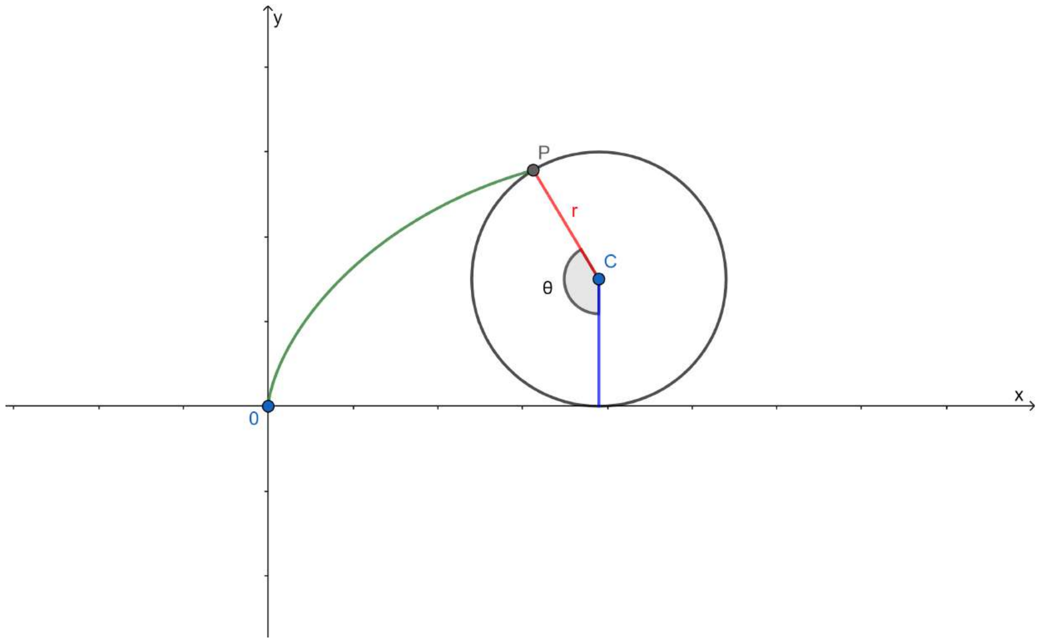
Derivando esta equação em relação a x, obtemos

$$y'(1+y'^2) + 2yy'y'' = 0$$

e dividindo por y', chegamos a

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0.$$

Figura 2: Biclóide



Finalmente isolando y'', temos

$$y'' = -\frac{1}{2y}\left(y'^2 + 1\right)$$

chegando, novamente, à equação diferencial (7) que deduzimos para o problema da braquistócrona.

Nos cursos de cálculo a ciclóide é apresentada como a curva descrita por um ponto sobre a borda de um círculo de raio r que rola sobre uma reta sem deslizar. Através desta definição geométrica se obtém a parametrização clássica da ciclóide, a saber

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = r(1 - \cos\theta)$$

O seguinte argumento encontrado na literatura mostra como obter esta parametrização resolvendo a equação diferencial da braquistócrona,

$$y(1 + y'^2) = c.$$

Vamos apresentá-lo aqui para deixar completa esta abordagem da braquistócrona.

$$y(1+y'^2)=c.$$

isolando $y'=\frac{dy}{dx}$ obtemos

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c-y}{y}}$$

e fazemos a seguinte substituição

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \sqrt{\frac{y}{c-y}}\\ \operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{y}{c-y}\\ y(1+\operatorname{tg}^2\alpha) &= c\operatorname{tg}^2\alpha\end{aligned}$$

simplificando temos

$$y=c\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Usando a fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, chegamos a expressão

$$y=\frac{c}{2}(1-\cos 2\alpha) \tag{8}$$

Derivando a expressão $y=c\operatorname{sen}^2\alpha$ obtemos

$$\frac{dy}{d\alpha}=2c\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha. \tag{9}$$

Como

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c-y}{y}},$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\\ \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\alpha}\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\alpha} =& \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{2c\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}} = \\ =& 2c\,\mathrm{sen}^2\alpha\end{aligned}$$

e usando que $\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,

$$\frac{dx}{d\alpha} = c(1 - \cos 2\alpha,)$$

que integrando finalmente obtemos

$$x = \frac{c}{2}(2\alpha - \mathrm{sen}\,2\alpha) + A.$$

Como o ponto sobre o círculo inicia em $(0, 0)$, temos y=0 e x=0 e portanto $A = 0$, logo

$$x = \frac{c}{2}(2\alpha - \mathrm{sen}\,2\alpha). \tag{10}$$

Fazendo $r = \frac{c}{2}$ e $\theta = 2\alpha$ nas equações 8 e 10 chegamos a parametrização da ciclóide requerida,

$$\begin{aligned} x &= r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta) \\ y &= r(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

3 Justicativas das simplificações.

Para um leitor mais rigoroso, as simplificações que fizemos na expressão $\frac{dT}{d\delta}$ antes de a igualarmos a zero visando obter o δ crítico, podem ter levantado inúmeras dúvidas quanto à correção de nosso procedimento. No sentido de eliminarmos estas dúvidas, vamos apresentar argumentos mais formais que justificam as simplificações feitas no decorrer de nossa apresentação. Resolvemos colocá-las em uma seção separada, para não modificarmos o tipo de abordagem mais intuitiva, que consideramos mais adequado à compreensão dos alunos dos cursos de física ou engenharia. Assim, retornando ao cálculo de $\frac{dT}{d\delta}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\delta} =&\frac{2\delta}{v_0 L} - 3\frac{g\delta^2\cos\alpha}{2Lv_0^3} - \frac{Lg\cos\alpha}{v_0^3}\\ =&\frac{4\delta v_0^2 - 3g\delta^2\cos\alpha - 2L^2 g\cos\alpha}{2Lv_0^3}\end{aligned}$$

Usando que $v_0^2 = 2gy$, obtemos

$$\frac{dT}{d\delta} =g\frac{8\delta y - 3\delta^2\cos\alpha - 2L^2\cos\alpha}{2Lv_0^3}.$$

Fazendo $\frac{dT}{d\delta}$ igual a zero, tem-se

$$\frac{dT}{d\delta} = 0 \iff 3\delta^2\cos\alpha - 8y\delta + 2\cos\alpha L^2 = 0$$

$$3\delta^2\cos\alpha - 8y\delta + 2L^2\cos\alpha = 0 \tag{11}$$

Resolvendo a equação acima para δ, chegamos à equação

$$\delta_c = \frac{8y - \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}}{6\cos\alpha}. \tag{12}$$

Lema 1. *Se δ_c denota o δ crítico, temos que*

$$\lim_{L\to 0}\frac{\delta_c}{L} = 0.$$

Prova.

$$\begin{aligned}\frac{\delta_c}{L} =&\frac{8y - \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}}{6L\cos\alpha}\\ =&\frac{8y - \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}}{6L\cos\alpha}\left(\frac{8y + \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}}{8y + \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}}\right)\\ =&\frac{24L^2\cos\alpha}{6L\cos\alpha\left(8y + \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}\right)}\\ =&\frac{24L\cos\alpha}{6\cos\alpha\left(8y + \sqrt{64y^2 - 24L^2\cos^2\alpha}\right)} \to 0\end{aligned}$$

quando $L \to 0$, provando o lema.

Lema 2. *Se $y(x)$ denota a função minimizante entre as funções formadas por dois* *segmentos como na figura 2, então $y(x)$ satisfaz a seguinte equação,*

$$\frac{y_2' - y_1'}{dx} = -\frac{2}{(4y - \frac{3}{2}\delta_c \cos\alpha)\left(1 - \frac{\delta_c^2}{L^2}(y')^2\right)}\left((y')^2 + 1\right).$$

Prova. Dos cálculos anteriores,

$$\begin{aligned}\frac{y_2' - y_1'}{dx} =& \frac{y_2' - y_1'}{dx} = \frac{-2\delta_c(dy\sin\alpha + dx\cos\alpha)}{dx(dx^2 - (\delta_c \sin\alpha)^2)} \\ =& -2\delta\frac{(\frac{dy}{dx}\sin\alpha + \cos\alpha)}{dx^2 - (\delta_c\sin\alpha)^2} \\ =& -\frac{2\delta_c\cos\alpha}{dx^2 - \delta_c^2\sin^2\alpha}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right).\end{aligned}$$

Além disso, $dx = L\cos\alpha$, implica que

$$\begin{aligned}\frac{y_2' - y_1'}{dx} =& -\frac{2\delta_c\cos\alpha}{L^2\cos^2\alpha - \delta_c^2\sin^2\alpha}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right) \\ =& -\frac{2\delta_c\cos\alpha}{L^2\cos^2\alpha\left(1 - \frac{\delta_c^2}{L^2}\tan^2\alpha\right)}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right) \\ =& -\frac{2\delta_c}{L^2\cos\alpha\left(1 - \frac{\delta_c^2}{L^2}\tan^2\alpha\right)}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right).\end{aligned}$$

Usando 11 chegamos a

$$\frac{y_2' - y_1'}{dx} = -\frac{2\delta}{(4y\delta - \frac{3}{2}\delta^2\cos\alpha)\left(1 - \frac{\delta^2}{L^2}\tan^2\alpha\right)}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right).$$

Simplificando δ_c, obtemos

$$\frac{y_2' - y_1'}{dx} = -\frac{2}{(4y - \frac{3}{2}\delta_c\cos\alpha)\left(1 - \frac{\delta_c^2}{L^2}\tan^2\alpha\right)}\left(\frac{dy}{dx}\tan\alpha + 1\right), \tag{13}$$

que é a equação que queríamos.

Corolário. *A função minimizante que produz o menor tempo de descida entre as funções duas vezes diferenciáveis satisfaz a equação diferencial:*

$$y'' = -\frac{1}{2y}\left(y'^2 + 1\right).$$

Prova. É suficiente fazermos $dx \to 0$ (e portanto $L \to 0$) na equação 13, a saber

$$\frac{y_2' - y_1'}{dx} = -\frac{2}{\left(4y - \frac{3}{2}\delta_c \cos\alpha\right)\left(1 - \frac{\delta_c^2}{L^2}(y')^2\right)}\left((y')^2 + 1\right)$$

e observar que quando $dx \to 0$,

$$\begin{aligned} \delta_c &\to 0 \\ \tan\alpha &\to y' \\ \frac{\delta_c}{L} &\to 0 && \text{lema 1} \\ \frac{dy}{dx} &\to y'(x) \end{aligned}$$

e que

$$\frac{y_2' - y_1'}{dx} \to y''(x)$$

para obtermos

$$y'' = -\frac{1}{2y}\left(y'^2 + 1\right).$$

4 Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma solução completamente elementar do problema de encontrar a equação diferencial da braquistócrona, ou curva de tempo mínimo. Por elementar queremos dizer que utilizamos apenas ideias e ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral e conceitos de Mecânica Clássica básica, evitando o Cálculo Variacional. Desta maneira, se torna possível mencionar este problema clássico do Cálculo Variacional nos cursos de cálculo ou física iniciais. Finalmente foi possível ilustrar um pouco a extraordinária ferramenta que é o cálculo diferencial e integral no sentido de modelar problemas complexos do mundo real de uma forma a ser acessível aos alunos dos anos inciais dos curso de física e engenharia.

Referências

[1] APOSTOL, T. M.: **Calculus.** Vol. 2. John Wiley & Sons, Inc. New York, 2nd ed, 1988.

[2] BENSON, D. C.: **An Elementary Solution of the Brachistochrone Problem**. Amer. Math. Monthly, 76:890-894, 1969.

[3] BOUTE, R. T.: **The Brachistochrone Problem Solved Geometrically: A Very Elementary Approach**. Mathematics Magazine, 85(3):193-199, 2012.

[4] ERLICHSON, H.: **Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time**. Eur. J. Phys. 20:299-304, 1999.

[5] FOX, C.: **An Introduction to the Calculus of Variations**. New York: Dover Publications, 1987.

[6] GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V.: **Calculus of Variations**. New York: Dover Publications, 2000.

[7] GÓMEZ-AÍZA, S.; GÓMEZ, R. W.; MARQUINA, V.: **A simplified approach to the brachistochrone problem**. European Journal of Physics,. 27(5):1091-1096, 2006.

[8] McLAUGHLIN, M.: **Gravitational Potential Energy**. https://web.physics.utah.edu/~michaelm/2210F2010/MT4/gravitational_potential.pdf.(Acesso em 22 Ago. 2023)

[9] NISHIYAMA, Y.: **The brachistochrone curve: The problem of quickest descent**. Applied Mathematics, 82:409-419, 2013.

[10] SAGAN, H.: **Introduction to the Calculus of Variations**. New York: Dover Publications, 1992.