Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2022.71036
Recebido em 31 Out. 2022 | Aceito em 07 Jul. 2023

UMA ABORDAGEM SOBRE OS PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

AN APPROACH TO THE NOTABLE POINT OF A TRIANGLE

SARAH MARTINS REZENDE[a]
DAIANE ALICE HENRIQUE AMENT[b]

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos alguns resultados importantes para a Geometria Euclidiana Plana, mais especificamente, sobre os pontos notáveis de um triângulo, a circunferência de nove pontos, a reta de Euler e o teorema de Ceva. Sobre os pontos notáveis de um triângulo, exibimos o que cada ponto abordado representa, onde está localizado e estudamos alguns resultados envolvendo cada um deles. Ou seja, o objetivo é analisar alguns teoremas e definições e, com isso, demonstrar alguns resultados já conhecidos de forma alternativa. Também é feita uma continuação do estudo a partir do último teorema citado, com o intuito de analisar as consequências do fato de as medianas e as bissetrizes serem cevianas. Ao final, conclui-se que, se as alturas de um triângulo são cevianas, então elas são concorrentes.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, circunferência de nove pontos, reta de Euler, cevianas.

Abstract

In this work, we will present some important results for Euclidean Plane Geometry, more specifically, on the notable points of a triangle, the nine-point circle, Euler line and Ceva's theorem. About the notable points of a triangle we show what each point represents, where it is located and we study some results involving any of them. That is, the objective is to analyze some theorems and definitions and, with that, demonstrate some results already known in an alternative way. A continuation of the study is also carried out from the last theorem mentioned, in order to analyze the consequences of the fact that the medians and bisectors are cevian. In the end, it is concluded that, if the heights of a triangle are cevian, then they are concurrent.

Keywords: Euclidean Geometry, nine-point circle, Euler line, cevians.

MSC2010: 51M04, 51M15

[a]Universidade Federal de Lavras, Lavras, Brasil; **E-mail:** sarah.mrezende@gmail.com
[b]Universidade Federal de Lavras, Lavras; Brasil; **E-mail:** daiane.ament@ufla.br

1 Introdução

Segmentos de reta com origem em um vértice de um triângulo aparecem bastante em exercícios e possuem uma grande quantidade de aplicações. A tais segmentos damos o nome de cevianas de um triângulo quando o segmento partir de um vértice de um triângulo e cortar o lado oposto a esse vértice. Cotidianamente, são estudadas três cevianas principais: a mediana, a bissetriz e a altura. Evidentemente, um triângulo possui sempre três medianas, cada uma saindo de um dos seus vértices e interceptando o ponto médio do lado oposto. Além disso, um triângulo possui três bissetrizes, cada uma saindo de um dos seus vértices e interceptando o lado oposto de forma a obter dois ângulos congruentes. Também podemos formar três alturas distintas e, não necessariamente, o pé da altura pertence ao lado oposto. Por isso, as medianas e as bissetrizes em qualquer triângulo são sempre cevianas, porém as alturas podem ou não ser cevianas.

Em um triângulo temos também três mediatrizes, onde a mediatriz de um lado do triângulo é a reta perpendicular ao lado e que contém seu ponto médio. Ao traçarmos as três mediatrizes, as três medianas, as três bissetrizes e as três alturas ao mesmo tempo, elas se encontram em pontos que chamamos de pontos notáveis de um triângulo. Estes pontos são chamados circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes), baricentro (ponto de encontro das medianas), incentro (ponto de encontro das bissetrizes) e ortocentro (ponto de encontro das alturas). A motivação pelo objeto de conhecimento "pontos notáveis de um triângulo" decorreu da análise do teorema do matemático Leonard Euler (1707 – 1783), denominado por Reta de Euler. Neste teorema, Euler nos possibilita realizar um estudo mais aprofundado sobre o triângulo e seus pontos notáveis, à medida que ele demonstra que, em triângulos quaisquer, os pontos notáveis, ortocentro, baricentro e circuncentro são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta. Desse modo, serão descritos e demonstrados alguns teoremas e proposições importantes para a conclusão das ideias citadas anteriormente, como a Reta de Euler, a Circunferência de Nove Pontos e o Teorema de Ceva.

A metodologia utilizada é a revisão bibliográfica com caráter descritivo e, para isso, foi utilizado as referências [1] e [2] para subsidiar as ideias e conceitos principais.

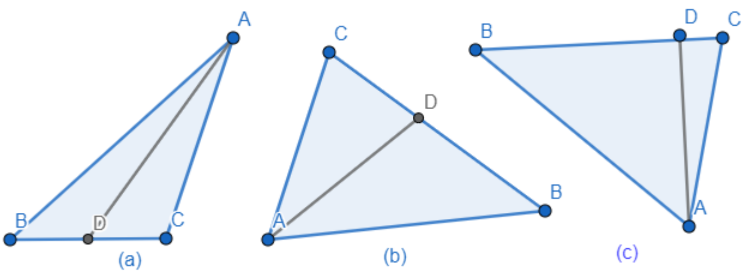
2 Pontos notáveis de um triângulo

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados já conhecidos da Geometria Euclidiana que servirão como base para as demonstrações que serão desenvolvidas nas seções seguintes.

Definição 2.1. *Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C. O segmento AD chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama-se bissetriz do ângulo* $\widehat{A}$ *se a semirreta* S_{AD} *divide o ângulo* $C\widehat{A}B$ *em dois ângulos congruentes, isto é, se* $C\widehat{A}D = D\widehat{A}B$*. O segmento AD chama-se altura do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular a reta que contém B e C.*

Na Figura 1, em (a) AD é mediana, em (b) AD é bissetriz e em (c) AD é altura.

Figura 1: Mediana, bissetriz e altura de um triângulo ABC.



Fonte: Autoral.

Queremos mostrar que, em um triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também a altura e a bissetriz. Para isto, precisamos dos seguintes resultados.

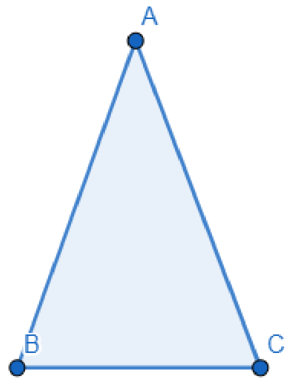
Axioma LAL de Congruência. *Dados dois triângulos ABC e EFG, se* $AB = EF$*,* $\widehat{A} = \widehat{E}$ *e* $AC = EG$*, então* $ABC = EFG$*.*

Proposição 2.2. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que AB = BC (Figura 2). Pretende-se provar que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Para isto, compare o triângulo ABC com ele mesmo, fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$A \leftrightarrow A,\ B \leftrightarrow C \text{ e } C \leftrightarrow B.$$

Figura 2: Triângulo isósceles



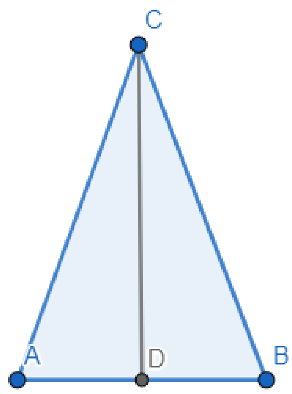
Fonte: Autoral.

Por hipótese, AB = AC e AC = AB. Como $\widehat{A} = \widehat{A}$, segue-se (pelo Axioma LAL de Congruência) que esta correspondência define uma congruência. Como consequência, tem-se $\widehat{B} = \widehat{C}$. □

Proposição 2.3. *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB (Figura 3). Seja CD sua mediana relativamente à base.

Figura 3: Triângulo ABC isósceles.



Fonte: Autoral.

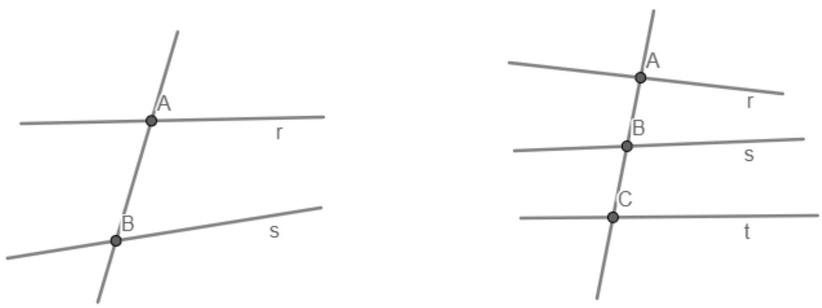
Deve-se provar que $A\widehat{C}D = B\widehat{C}D$ e que $A\widehat{D}C$ é um ângulo reto. Para isto, considere os triângulos ADC e BDC. Como AD = BD (já que CD é mediana), AC = BC (já que o triângulo é isósceles com base AB) e $\widehat{A} = \widehat{B}$ (pela Proposição 2.2), então, pelo Axioma LAL de Congruência, tem-se ADC = BDC. Segue-se daí que,

$A\widehat{C}D = B\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A = C\widehat{D}B$. A primeira congruência nos diz que CD é bissetriz do ângulo $A\widehat{C}B$. Como $A\widehat{D}B$ é um ângulo raso e $C\widehat{D}A + C\widehat{D}B = A\widehat{D}B$ então $C\widehat{D}A + C\widehat{D}B = 180°$. Como já sabemos que $C\widehat{D}A = C\widehat{D}B$, então concluímos que $C\widehat{D}A = C\widehat{D}B = 90°$. Portanto, CD é perpendicular a AB. Isto conclui a prova da proposição. □

Agora, queremos mostrar que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto. Para isto, precisamos da seguinte definição e de um teorema que apresentamos sem demonstração.

Definição 2.4. *Se uma transversal intersecciona duas retas r e s, respectivamente, nos pontos A e B, dizemos que r e s determinam o segmento AB sobre a transversal. Se uma transversal intersecciona três retas r, s e t nos pontos A, B e C, respectivamente, e se AB = BC, então dizemos que as três retas determinam segmentos congruentes sobre a transversal (Figura 4).*

Figura 4: Retas Transversais.



Fonte: Autoral.

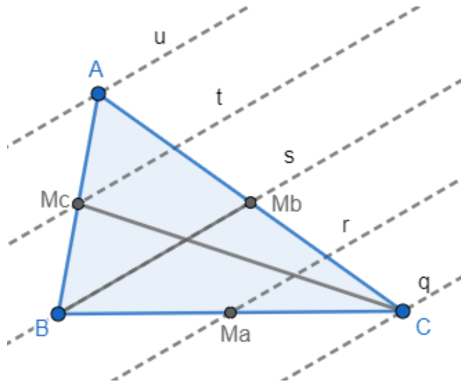
Teorema 2.5. *Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.*

Teorema 2.6. *As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Demonstração. Consideremos, em um triângulo ABC, os pontos M_a, M_b e M_c como pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Vamos demonstrar que existe um ponto P que está em AM_a, BM_b e CM_c e satisfaz que $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AM_a}, \overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BM_b}$ e $\overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CM_c}$.

Sejam r, s e t, com $s = \overleftrightarrow{BM_b}$, retas paralelas que dividem o lado AC em quatro segmentos congruentes. Consideremos as retas u e q, ambas paralelas a r, s e t, passando por A e C, respectivamente (Figura 5).

Figura 5: Retas paralelas a r, s e t.



Fonte: Autoral.

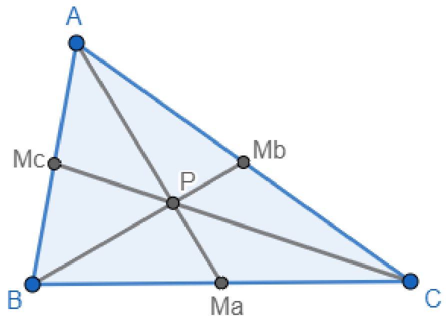
A reta t divide o segmento AB em dois segmentos congruentes (pelo Teorema 2.5) e, portanto, o ponto M_c está na reta t; além disso, as retas t, s, r e q dividem a mediana CM_c em três segmentos congruentes e, portanto, se P é o ponto de intersecção das medianas BM_b e CM_c, temos $\overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CM_c}$.

Do mesmo modo, com retas paralelas a $\overleftrightarrow{AM_a}$ mostramos que, se P' é a intersecção das medianas CM_c e AM_a, então $\overline{CP'} = \frac{2}{3}\overline{CM_c}$. Portanto, como P e P' estão sobre a mesma semirreta $\overrightarrow{CM_c}$, obtemos P = P' e, assim, as três medianas são concorrentes.

Como sabemos agora que as medianas AM_a e BM_b passam por P, podemos concluir de modo análogo que $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AM_a}$ e $\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BM_b}$. □

Definição 2.7. *O centroide ou baricentro de um triângulo é o ponto em que as medianas são concorrentes (Figura 6).*

Figura 6: O baricentro de um triângulo.



Fonte: Autoral.

Para mostrar que as alturas de um triângulo também são concorrentes em um ponto, apresentamos a definição de mediatriz e alguns resultados referentes a este conceito.

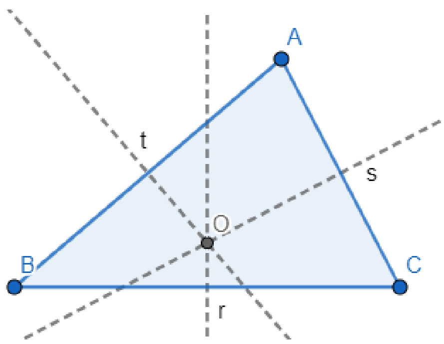
Definição 2.8. *A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.*

Teorema 2.9. *A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.*

Teorema 2.10. *As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um ponto equidistante dos três vértices do triângulo.*

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC (Figura 7).

Figura 7: Mediatrizes de um triângulo ABC.



Fonte: Autoral.

Sejam r, s e t as mediatrizes dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Se r e s fossem paralelas, então A, B e C seriam colineares. Se fossem coincidentes, pelo ponto C passariam duas retas perpendiculares a uma mesma reta, o que não pode ocorrer. Portanto, r e s interseccionam-se num ponto O.

Pelo Teorema 2.9, temos que OB = OC, pois O pertence a r, e OC = OA, pois O pertence a s. Portanto, temos OA = OB. Novamente pelo Teorema 2.9, temos que O pertence a t. Assim, O pertence às três mediatrizes e OA = OB = OC. □

Definição 2.11. *Um polígono é inscritível se tem os seus vértices pertencentes a uma circunferência. Neste caso, dizemos que o polígono está inscrito nessa circunferência, ou que tal circunferência é a circunferência circunscrita ao polígono.*

Um polígono é circunscritível se seus lados são tangentes a uma mesma circunferência. Neste caso, dizemos que o polígono está circunscrito à circunferência e tal circunferência é a circunferência inscrita no polígono.

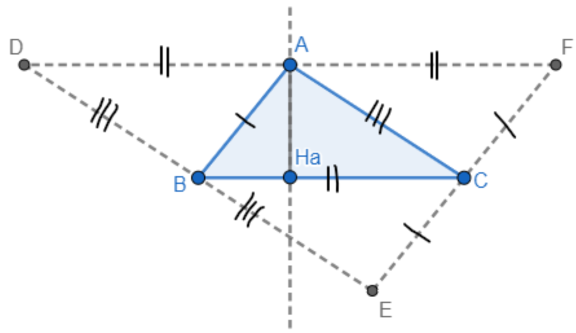
Definição 2.12. *O ponto de encontro das mediatrizes, que é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo, é chamado circuncentro desse triângulo.*

Agora, podemos mostrar que as alturas de um triângulo são concorrentes.

Teorema 2.13. *As três alturas de um triângulo são concorrentes.*

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC e a reta $\overleftrightarrow{AH_a}$ da altura correspondente ao lado BC do triângulo (Figura 8).

Figura 8: Mediatrizes e alturas concorrentes.



Fonte: Autoral.

Tracemos por cada vértice do triângulo ABC uma reta paralela ao lado oposto. Estas três retas determinam um triângulo DEF, como na Figura 8. Dessa construção, os quadriláteros BCFA e BCAD são paralelogramos e, portanto, BC = AF e BC = DA. Logo, A é o ponto médio de DF. Concluímos que, a altura $\overleftrightarrow{AH_a}$, no triângulo ABC é a mediatriz de DF. Analogamente, as outras duas alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos outros dois lados do triângulo DEF. Como as mediatrizes são concorrentes (pelo Teorema 2.10), temos que também as três alturas são concorrentes. □

Definição 2.14. *O ponto de encontro das três alturas de um triângulo é chamado ortocentro do triângulo.*

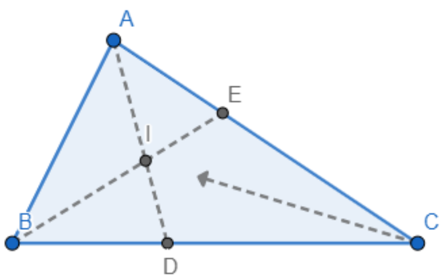
Queremos mostrar, também, que as bissetrizes de um triângulo são concorrentes e, para isto, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.15. *A bissetriz de um ângulo, exceto sua origem, é o conjunto dos pontos do interior do ângulo equidistantes dos lados do ângulo.*

Teorema 2.16. *As bissetrizes dos ângulos de um triângulo são concorrentes em um ponto equidistante dos três lados do triângulo.*

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC (Figura 9). Consideremos também o ponto I que é a intersecção das bissetrizes $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BE}$. Pelo Lema 2.15, o ponto I equidista de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ por estar na bissetriz de $\widehat{A}$ e equidista de $\overleftrightarrow{BA}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ por estar na bissetriz de $\widehat{B}$. Portanto, I equidista de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Figura 9: Bissetrizes de um triângulo ABC.



Fonte: Autoral.

Novamente, pelo lema anterior, temos que I pertence à bissetriz de $\widehat{C}$. Assim, temos que as três bissetrizes têm o ponto I em comum e I equidista de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. □

Agora, conseguimos finalizar esta seção com as definições abaixo. Elas fazem parte do estudo dos pontos notáveis de um triângulo e serão utilizadas nas seções seguintes.

Definição 2.17. *O ponto de encontro das bissetrizes, que é também o centro da circunferência inscrita a um triângulo, é chamado incentro do triângulo.*

Definição 2.18. *O baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro são chamados pontos notáveis de um triângulo.*

3 A Circunferência de Nove Pontos e a Reta de Euler

Vamos apresentar, nesta seção, a Circunferência de Nove Pontos e a Reta de Euler, dois resultados interessantes da Geometria Euclidiana e de grande importância para a Matemática.

Considerando um triângulo qualquer, os seguintes nove pontos são concíclicos: os três pés das alturas baixadas dos vértices do triângulo sobre os lados opostos, os três pontos médios dos lados e os três pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro.

Antes de apresentar o resultado sobre a Circunferência de Nove Pontos, apresentamos dois resultados que serão utilizados na demonstração.

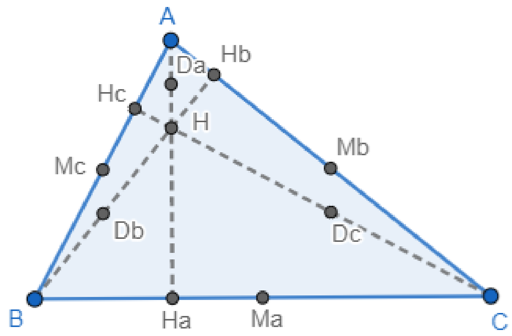
Proposição 3.1. *Um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.*

Teorema 3.2. *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Teorema 3.3. ***(A Circunferência de Nove Pontos)*** *A circunferência que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos a eles, passa também pelos pontos médios dos lados, assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ponto de intersecção das perpendiculares.*

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC. Sejam M_a, M_b e M_c os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Além disso, sejam H_a, H_b e H_c os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente, sendo H o ortocentro do triângulo. E, também, sejam D_a, D_b e D_c os pontos médios dos segmentos AH, BH e CH, respectivamente (Figura 10).

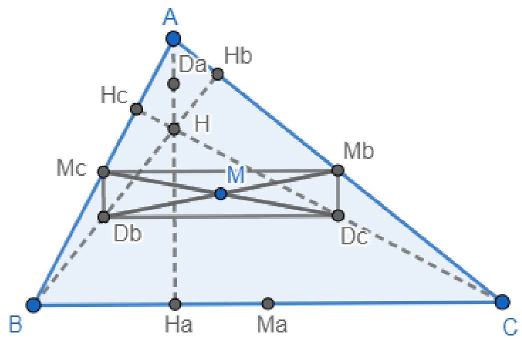
Figura 10: Pontos médios, alturas e ortocentro do triângulo ABC.



Fonte: Autoral.

Vamos mostrar que esses nove pontos estão em uma mesma circunferência. Para isso, é necessário mostrar que o quadrilátero $D_bD_cM_bM_c$ é um retângulo (Figura 11).

Figura 11: Quadrilátero retângulo dentro da circunferência.



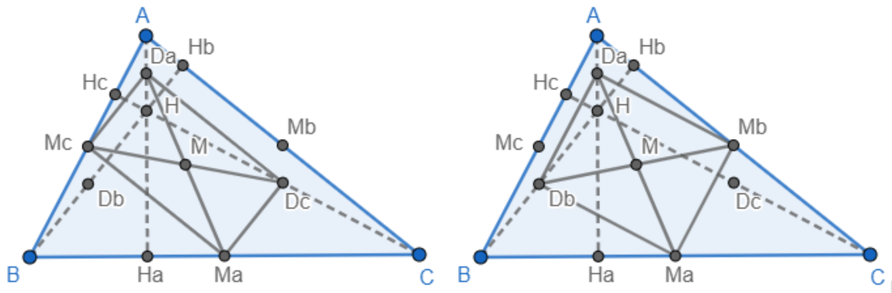
Fonte: Autoral.

De fato, como M_c e M_b são pontos médios dos lados AB e AC do triângulo ABC, resulta que o segmento M_bM_c é paralelo ao segmento BC e $\overline{M_bM_c} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ como já observado anteriormente no Teorema 3.2. Ainda, temos que D_b e D_c são pontos médios dos lados HB e HC do triângulo HBC. Logo, resultam o segmento D_bD_c paralelo ao segmento BC e $\overline{D_bD_c} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, também pelo Teorema 3.2. Por transitividade, obtemos $M_bM_c = D_bD_c$ e o segmento M_bM_c paralelo ao segmento D_bD_c e, portanto, $M_cD_bD_cM_b$ é um paralelogramo.

Agora, considere o triângulo ABH. Nele, temos o segmento M_cD_b paralelo ao segmento AH e, como AH é perpendicular ao BC que por sua vez é paralelo ao D_bD_c, temos, portanto, que o segmento M_cD_b perpendicular ao segmento D_bD_c. Assim, temos um paralelogramo que possui um ângulo reto, logo é um retângulo. Com isso, concluímos que os segmentos M_cD_c e M_bD_b, sendo diagonais de um retângulo, são congruentes e interseccionam-se em seu ponto médio M.

Da mesma forma, mostramos que $M_cM_aD_cD_a$ e $M_aM_bD_aD_b$ são retângulos (Figura 12).

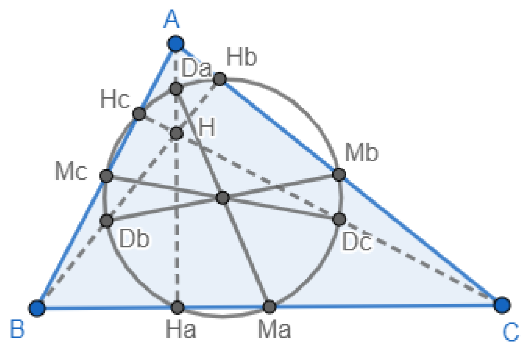
Figura 12: Outros dois quadriláteros.



Fonte: Autoral.

Logo, suas respectivas diagonais M_cD_c e M_aD_a e, M_aD_a e M_bD_b são congruentes. Portanto, as três diagonais M_aD_a, M_bD_b e M_cD_c são congruentes e interseccionam-se em M. Com isso, mostramos que seis dos nove pontos estão na circunferência de diâmetro M_cD_c, por exemplo. Falta mostrar que H_a, H_b e H_c também pertencem a essa circunferência. Porém, isso pode ser demonstrado a partir do fato de que $D_bH_bM_b$, $D_cH_cM_c$ e $D_aH_aM_a$ são triângulos retângulos, cujas hipotenusas são, respectivamente, os segmentos D_bM_b, D_cM_c e D_aM_a, todos diâmetros da circunferência determinada. Portanto, pela Proposição 3.1, temos que H_a, H_b e H_c pertencem à circunferência (Figura 13). □

Figura 13: Circunferência de nove pontos finalizada.



Fonte: Autoral.

O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo qualquer são colineares. A reta que passa pelos três pontos é conhecida por Reta de Euler. Antes de apresentar o resultado sobre a Reta de Euler, apresentamos dois teoremas que serão utilizados na demonstração.

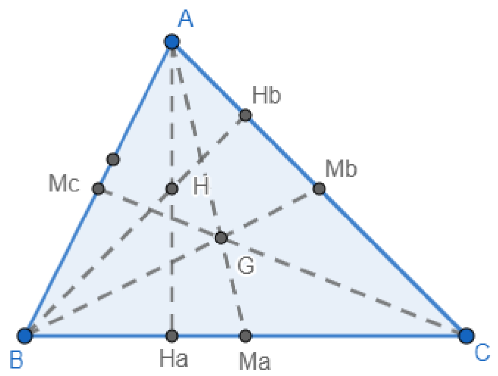
Teorema 3.4. ***(O Teorema de Semelhança L.L.L.)*** *Se dois triângulos ABC e DEF são tais que seus lados satisfazem a relação* $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, *então os triângulos são semelhantes.*

Teorema 3.5. ***(O Teorema de Semelhança L.A.L.)*** *Dados dois triângulos ABC e DEF, se* $\widehat{A} = \widehat{D}$ *e* $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ *, então os triângulos são semelhantes.*

Teorema 3.6. ***(A Reta de Euler)*** *O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo são colineares. Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro na razão 1/2.*

Demonstração. Consideremos, em um triângulo ABC, os pontos médios M_a, M_b e M_c, as alturas AH_a e BH_b, o ortocentro H e o baricentro G (Figura 14).

Figura 14: Pontos iniciais para a Reta de Euler.

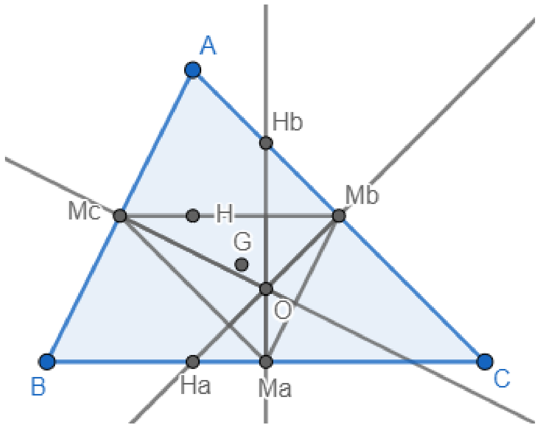


Fonte: Autoral.

Consideremos o triângulo $M_aM_bM_c$, formado pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC. Pelo Teorema 3.2, AC e M_aM_c são paralelos, logo a altura do triângulo $M_aM_bM_c$, relativa ao ponto M_b, é perpendicular ao AC. Portanto, a altura do triângulo $M_aM_bM_c$, relativa ao ponto M_b, coincide com a mediatriz do lado AC.

De forma análoga, temos que a altura do triângulo $M_aM_bM_c$, relativa ao ponto M_a, coincide com a mediatriz do lado BC e a altura do triângulo $M_aM_bM_c$, relativa ao ponto M_c, coincide com a mediatriz do lado AB. Portanto, o ortocentro O do triângulo $M_aM_bM_c$ coincide com o circuncentro do triângulo ABC (Figura 15).

Figura 15: Encontro do Ortocentro e do Circuncentro



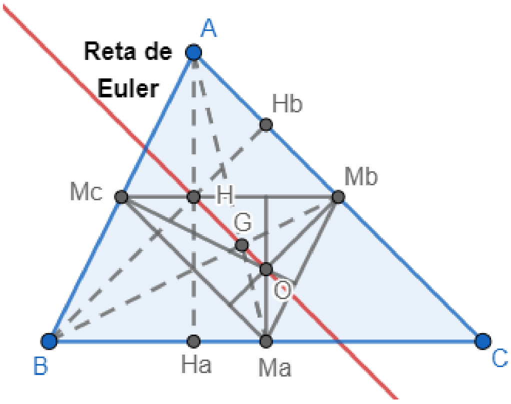
Fonte: Autoral.

Além disso, como consequência dos Teoremas 3.4 e 3.5, são semelhantes os triângulos $M_aM_bM_c$ e ABC com razão de semelhança 1/2. Dessa maneira, qualquer par de segmentos correspondentes nesses dois triângulos estão na mesma razão.

Como o quadrilátero $AM_cM_aM_b$ é um paralelogramo, suas diagonais AM_a e M_bM_c bisseccionam-se no ponto Q. Portanto, M_aQ é mediana do triângulo $M_aM_bM_c$ e está contida na mediana AM_a do triângulo ABC, o análogo ocorrendo com as outras duas medianas. Logo, os dois triângulos possuem o mesmo baricentro G.

Temos também $\overline{AH} = 2\overline{M_aO}$ pela semelhança dos triângulos $M_aM_bM_c$ e ABC; $\overline{AG} = 2\overline{M_aG}$, pelo Teorema 2.6 ; e $H\widehat{A}G = G\widehat{M_a}O$, pois as retas AH e OM_a são ambas perpendiculares ao lado BC. Portanto, os triângulos AGH e M_aGO são semelhantes, pelo Teorema LAL de Semelhança, com razão de semelhança 1/2, e daí $A\widehat{G}H = M_a\widehat{G}O$. Isso mostra que O, G e H são colineares e $\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{GH}$ (Figura 16). □

Figura 16: A reta de Euler.



Fonte: Autoral.

4 O Teorema de Ceva

Uma *ceviana* de um triângulo é um segmento que liga um vértice a um ponto do lado oposto. Assim, em um triângulo ABC, se X, Y e Z são pontos nos lados BC, AC e AB, respectivamente, os segmentos AX, BY e CZ são cevianas. Exemplos particulares de cevianas são as medianas e as bissetrizes de um triângulo. As alturas de um triângulo são cevianas quando interceptam o lado oposto do triângulo.

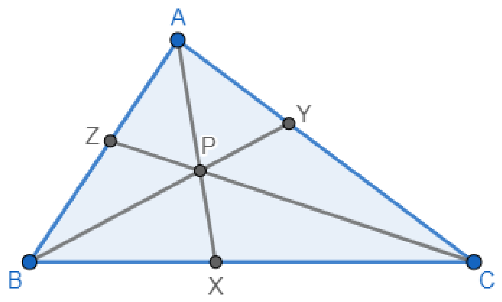
O termo ceviana vem do nome do matemático italiano Giovanni Ceva, que publicou em 1678 o Teorema 4.2, conhecido como Teorema de Ceva. Para a demonstração utilizaremos o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *A área de um triângulo é a metade do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente.*

Teorema 4.2. ***(O Teorema de Ceva)*** *Sejam AX, BY, CZ três cevianas de um triângulo ABC. As cevianas são concorrentes se, e somente se,* $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$

Demonstração. Suponha que as três cevianas são concorrentes e seja P o ponto de encontro das três cevianas (Figura 17). Denote por área(ABC) a área de um triângulo ABC. Observe que os triângulos BXP e CXP possuem a mesma altura h com respeito às bases BX e XC, respectivamente. E os triângulos ABX e ACX têm altura H com respeito às bases BX e CX, respectivamente.

Figura 17: Cevianas concorrentes.



Fonte: Autoral.

Assim, área$(ABX) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BX}$; área$(ACX) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{CX}$; área$(BXP) = \frac{1}{2}h \cdot \overline{BX}$ e área$(CXP) = \frac{1}{2}h \cdot \overline{CX}$. Isto implica que

$$\frac{\text{área}(ABP)}{\text{área}(ACP)} = \frac{\text{área}(ABX) - \text{área}(BXP)}{\text{área}(ACX) - \text{área}(CXP)} \tag{1}$$

$$\frac{\text{área}(ABP)}{\text{área}(ACP)} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BX} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BX}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{CX} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{CX}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}. \tag{2}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\text{área}(ABP)}{\text{área}(ACP)}. \tag{3}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\text{área}(BCP)}{\text{área}(ABP)} \tag{4}$$

e

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\text{área}(CAP)}{\text{área}(BCP)}. \tag{5}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\text{área}(ABP)}{\text{área}(ACP)} \frac{\text{área}(BCP)}{\text{área}(ABP)} \frac{\text{área}(ACP)}{\text{área}(BCP)} = 1. \tag{6}$$

Para provar a recíproca, seja P o ponto de interseção das cevianas AX e BY. Vamos mostrar que CZ passa por P. Seja CZ' uma ceviana que passa por P. Pelo que acabamos de demonstrar, temos $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = 1$.

Pela hipótese, obtemos $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$. Assim,

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} + 1 = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} + 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} + \frac{\overline{Z'B}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} + \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB}} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{AZ'} + \overline{Z'B}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ} + \overline{ZB}}{\overline{ZB}} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ZB}} \Longleftrightarrow \overline{Z'B} = \overline{ZB}$$

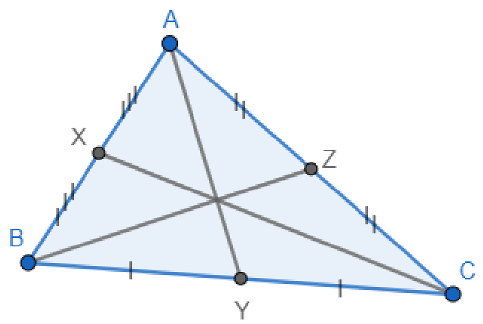
Isto implica que Z = Z'. □

Como as medianas e as bissetrizes já são cevianas e, se as alturas de um triângulo também forem cevianas, é possível obter os resultados da Seção 2 de outra forma utilizando o Teorema 4.2 (O Teorema de Ceva).

Corolário 4.3. *As medianas e as bissetrizes de um triângulo são cevianas, então elas são concorrentes. Além disso, se as alturas de um triângulo são cevianas, então elas também são concorrentes.*

Demonstração. Do Teorema 4.2, devemos mostrar que $\frac{\overline{BX}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZC}} = 1$. Desse modo, para provarmos que as medianas são concorrentes utilizando este resultado precisamos apenas nos atentar que, como X, Y e Z são os pontos médios de AB, BC e CA, respectivamente, temos que $\overline{BX} = \overline{XA}$, $\overline{CY} = \overline{YB}$ e $\overline{AZ} = \overline{ZC}$. Logo, temos $\frac{\overline{BX}}{\overline{XA}} = 1$, $\frac{\overline{CY}}{\overline{YB}} = 1$ e $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZC}} = 1$ e, portanto, as medianas são concorrentes (Figura 18).

Figura 18: Medianas concorrentes de um triângulo.



Fonte: Autoral.

Para as bissetrizes, vamos considerar um triângulo ABC e sejam $X \in AB$, $Y \in BC$ e $Z \in CA$ tais que CX, AY e BZ são as bissetrizes do triângulo. Pela Lei dos

Senos, temos:

$$\frac{\overline{BY}}{senB\widehat{A}Y} = \frac{\overline{AY}}{sen\widehat{B}} \tag{7}$$

e

$$\frac{\overline{YC}}{senY\widehat{A}C} = \frac{\overline{AY}}{sen\widehat{C}} \tag{8}$$

Assim,

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{senB\widehat{A}Y}{sen\widehat{B}} \cdot \frac{sen\widehat{C}}{senY\widehat{A}C} = \frac{sen\widehat{C}}{sen\widehat{B}} \tag{9}$$

Da mesma forma, obtemos:

$$\frac{\overline{AX}}{senA\widehat{C}X} = \frac{\overline{CX}}{sen\widehat{A}} \tag{10}$$

e

$$\frac{\overline{BX}}{senB\widehat{C}X} = \frac{\overline{CX}}{sen\widehat{B}} \tag{11}$$

E, também,

$$\frac{\overline{AZ}}{senA\widehat{B}Z} = \frac{\overline{BZ}}{sen\widehat{A}} \tag{12}$$

e

$$\frac{\overline{CZ}}{senC\widehat{B}Z} = \frac{\overline{BZ}}{sen\widehat{C}} \tag{13}$$

Logo,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{senA\widehat{C}X}{sen\widehat{A}} \cdot \frac{sen\widehat{B}}{senB\widehat{C}X} = \frac{sen\widehat{B}}{sen\widehat{A}} \tag{14}$$

e

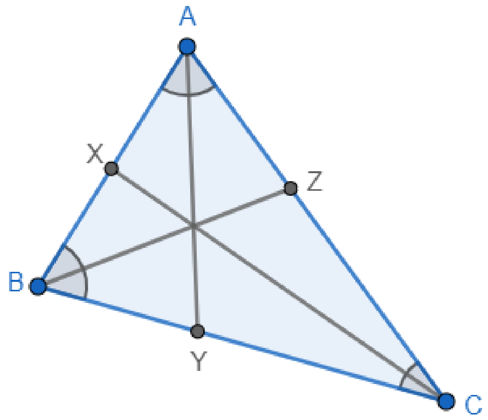
$$\frac{\overline{CZ}}{\overline{AZ}} = \frac{senC\widehat{B}Z}{sen\widehat{C}} \cdot \frac{sen\widehat{A}}{senA\widehat{B}Z} = \frac{sen\widehat{A}}{sen\widehat{C}} \tag{15}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{AZ}} = \frac{sen\widehat{B}}{sen\widehat{A}} \cdot \frac{sen\widehat{C}}{sen\widehat{B}} \cdot \frac{sen\widehat{A}}{sen\widehat{C}} = 1 \tag{16}$$

Desse modo, temos que, como as bissetrizes são cevianas, elas são também concorrentes (Figura 19).

Figura 19: Bissetrizes concorrentes de um triângulo.



Fonte: Autoral.

Agora, para as alturas, também consideremos um triângulo ABC e sejam $X \in AB$, $Y \in BC$ e $Z \in CA$ tais que CX, AY e BZ são as alturas do triângulo. Temos que,

$$\overline{CZ} = \overline{BC}cos\hat{C} \tag{17}$$

$$\overline{ZA} = \overline{AB}cos\hat{A} \tag{18}$$

$$\overline{YC} = \overline{AC}cos\hat{C} \tag{19}$$

$$\overline{BY} = \overline{AB}cos\hat{B} \tag{20}$$

$$\overline{AX} = \overline{AC}cos\hat{A} \tag{21}$$

$$\overline{XB} = \overline{BC}cos\hat{B} \tag{22}$$

Consequentemente, temos

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AC}cos\hat{A}}{\overline{BC}cos\hat{B}} \tag{23}$$

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{AB}cos\hat{B}}{\overline{AC}cos\hat{C}} \tag{24}$$

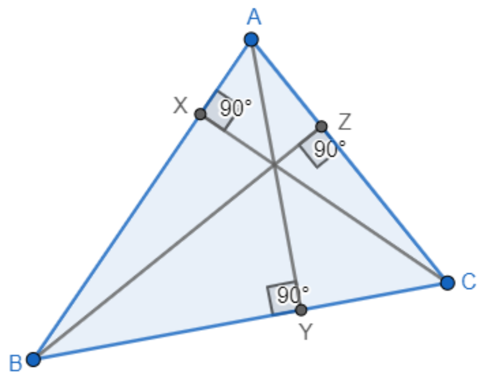
$$\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{BC}cos\hat{C}}{\overline{AB}cos\hat{A}} \tag{25}$$

Assim, temos que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{AC}cos\hat{A}}{\overline{BC}cos\hat{B}} \cdot \frac{\overline{AB}cos\hat{B}}{\overline{AC}cos\hat{C}} \cdot \frac{\overline{BC}cos\hat{C}}{\overline{AB}cos\hat{A}} = 1 \tag{26}$$

Portanto, conseguimos concluir, utilizando o Teorema de Ceva, que, se as alturas de um triângulo forem cevianas, elas são concorrentes (Figura 20). □

Figura 20: Alturas concorrentes de um triângulo.



Fonte: Autoral.

5 Conclusão

As demonstrações desenvolvidas nesse trabalho têm como intuito subsidiar e fomentar o estudo dos pontos notáveis de um triângulo. Foram apresentadas duas formas distintas de se mostrar a existência dos pontos notáveis de um triângulo, utilizando para isto diversos resultados importantes da geometria. Também foi fundamental um bom embasamento teórico em relação à semelhança e congruência de triângulos e um estudo de propriedades da Geometria Plana.

Com isso, podemos concluir que o estudo dos pontos notáveis é de suma importância para o entendimento de muitos resultados encontrados em problemas no dia a dia, além de se tornar uma ferramenta útil para o ensino e aprendizado da matemática e da geometria.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Lavras.

Referências

[1] BARBOSA, J. L. M.: **Geometria Euclidiana Plana**. 9ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 222 p. 2006. (Coleção do professor de matemática). ISBN 8585818026.

[2] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de: **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 260 p. 2008. ISBN 9788526807549.