Cadernos do IME - Série Matemática
DOI: 10.12957/cadmat.2022.68605
***e-ISSN:** 2236-2797 (online)*
Recebido em 27 Jun. 2022 | Aceito em 04 Jul. 2022

GEORGE POLYA E ASPECTOS DA MATEMÁTICA INDUTIVA

GEORGE POLYA AND ASPECTS OF INDUCTIVE MATHEMATICS

MARIANA C. PINTO[a] RENAN P. SOUZA[b]
PATRÍCIA N. SILVA[c]

Resumo

Para Polya, só é possível aprender matemática se reconhecermos sua dupla natureza. Ela é ao mesmo tempo uma ciência dedutiva e sistemática quando se apresenta em sua forma acabada e uma ciência indutiva e experimental, quando se encontra em desenvolvimento. Uma das motivações de Polya em suas obras é sistematizar o processo inventivo da matemática. A "matemática indutiva" está presente no desenvolver do saber matemático, afinal os primeiros passos na resolução de problemas normalmente não são cheios de certeza e baseados em grandes bases teóricas, mas sim surgem de uma certa "intuição" que não é organizada e descrita tão facilmente quanto uma demonstração robusta que possui começo, meio e fim em uma linha de raciocínio perfeita tipicamente presente na matemática da perspectiva Euclidiana. E a partir dessa distinção, surgem dois conceitos, o raciocínio dedutivo e o raciocínio plausível. Destacaremos neste trabalho alguns aspectos das regras de inferência do raciocínio plausível propostas por Polya. Além destas regras, Polya entende que ao tentarmos solucionar um problema, devemos buscar uma variação daquele mesmo problema. E ele descreve três processos para realizar essa tarefa, sendo eles a Analogia, a Generalização e a Particularização. Essas variações que criamos a partir de um único problema podem nos levar a importantes elementos auxiliares ou a problemas correlatos mais simples que poderão interferir diretamente na forma como enxergamos o problema original. Para ilustrar esses processos, discutiremos em detalhe dois exemplos propostos por Polya.

Palavras-chave: Resolução de problemas, matemática indutiva, raciocínio dedutivo, raciocínio plausível.

[a]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil; ORCID:0000-0001-6004-5778 **E-mail:** marianac.pinto97@gmail.com

[b]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil; ORCID: 0000-0003-4263-6077 **E-mail:** renan.prrs@gmail.com

[c]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil; ORCID: 0000-0002-1852-7746 **E-mail:** nunes@ime.uerj.br

Abstract

For Polya, it is only possible to learn mathematics if we recognize its dual nature. It is both a deductive and systematic science when it is in its finished form and an inductive and experimental science when it is in development. One of Polya's motivations in his works is to systematize the inventive process of mathematics. The "inductive mathematics" is present in the development of mathematical knowledge, after all the first steps in problem solving are usually not full of certainty and based on great theoretical bases, but rather arise from a certain "intuition" that is not organized and described as easily as a robust demonstration that has a beginning, middle and end in a perfect line of reasoning typically present in mathematics from the Euclidean perspective. And from this distinction, we have two concepts, deductive reasoning and plausible reasoning. We will highlight in this work some aspects of the inference rules of plausible reasoning proposed by Polya. In addition to these rules, Polya understands that when we try to solve a problem, we should look for a variation of that same problem. And he describes three processes to accomplish this task, which are Analogy, Generalization and Particularization. These variations that we create from a single problem can lead us to important auxiliary elements or to simpler related problems that can directly interfere with the way we see the original problem. To illustrate these processes, we will discuss in detail two examples proposed by Polya.

Keywords: Problem solving, inductive mathematics, reasoning deductive, reasoning plausible.

MSC2010: 97D50, 97E50

1 Introdução

George Polya possui grande reconhecimento pelo seu método de solucionar problemas. E a partir do estudo desses métodos, ele percebeu um novo aspecto da Matemática. Novo, não por seu teor, mas por não ser conhecido ou vivenciado no ambiente escolar e na sociedade. Segundo Polya, a Matemática tem dois aspectos: é a rigorosa ciência de Euclides, mas é também uma outra coisa:

> A Matemática, apresentada da maneira euclidiana, revela-se uma ciência dedutiva, sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência. Mas o segundo aspecto é novo sob um certo ponto de vista: a Matemática in *statu nascendi*, no processo de ser inventada, jamais foi apresentada exatamente desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público. (POLYA, 1954, p. VI)

Firmamos assim o contraste entre a matemática da perspectiva Euclidiana e a matemática experimental. Enquanto uma descreve a exatidão dos teoremas e demonstrações, a outra é o caminho nebuloso que atravessamos para enfim alcançarmos a solução de um problema. E a partir dessa distinção, surgem dois conceitos, o raciocínio dedutivo e o raciocínio plausível.

2 Raciocínio dedutivo e raciocínio plausível e suas regras de inferência

A partir do reconhecimento da importância do pensamento plausível, Polya tenta descrever e dar um tratamento "científico" aos processos que acontecem entre o momento que o indivíduo tem o primeiro contato com um problema e sua resolução acabada. Para tanto, ele se concentrará em tentar descrever a estrutura geral de ataque de problemas, que é seu trabalho de maior conhecimento do público, sendo ele as quatro fases para resolver um problema. Mas além disso, Polya também foca em tipificar operações mentais associadas aos processos de descoberta e investigação presentes durante a resolução de um problema, mergulhando em um universo com menos exatidão e mais abstração, já que nosso pensamento não é algo tão linear quanto a matemática formal.

Ele valoriza o "raciocínio heurístico, que é provisório e apenas plausível". Ele o entende como peça-chave na descoberta da solução, mas faz o alerta que nunca podemos tomá-lo por uma demonstração. Heurística era o nome de um certo ramo de estudo pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia. Sua definição clássica não possui muita exatidão. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. E Polya traz de volta esse conceito, mas com uma visão um pouco diferente, definindo assim a Heurística moderna, que busca compreender o processo de solucionar problemas.

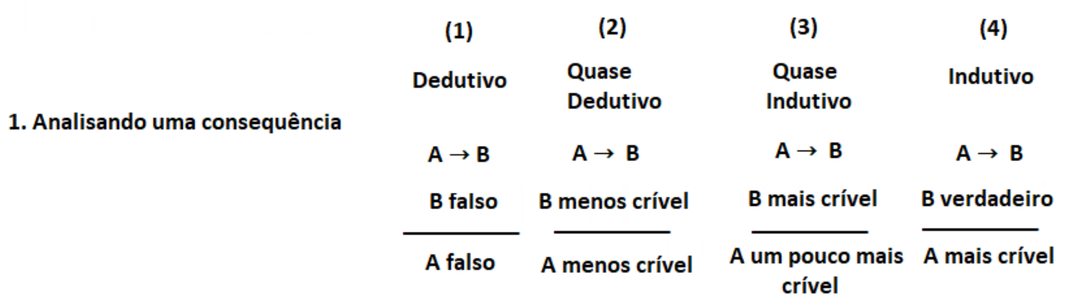
De acordo com Polya,

> o raciocínio dedutivo é seguro, sem controvérsia e final. O raciocínio plausível é perigoso, controverso e provisório. O raciocínio dedutivo possui padrões rígidos, codificados e suportados pela lógica (lógica formal ou dedutiva). E apesar da matemática ser considerada uma ciência dedutiva, este é apenas um de seus aspectos. (POLYA, 1954, p. 8, tradução nossa)

O produto final na matemática aparece como puramente dedutivo, consistindo apenas em provas. O resultado do trabalho criativo do matemático é um raciocínio demonstrativo, uma prova; mas a prova é descoberta por raciocínio plausível, por investigação ou experimentação. Se o aprendizado da matemática reflete em algum grau a invenção da matemática, deve haver um lugar para investigação ou experimentação, para inferência plausível.

Com o objetivo de tornar o processo de raciocínio mais compreensível, Polya tentou fazer um paralelo entre as regras dedutivas da lógica clássica com as "regras" que ele julga presentes no raciocínio plausível. A seguir um exemplo de esquema presente no livro "Patterns of Plausive Inference" que demonstra justamente esse paralelo citado a cima. Observe que Polya tenta descrever de forma linear, como ocorre com o método dedutivo, a forma como enxergamos certas situações com o raciocínio plausível.

Figura 1: Modus Tollens e inferências plausíveis



Fonte: Adaptado de POLYA (1968) p. 26.

O exemplo acima demonstra formas de analisarmos uma consequência. Na coluna (1), está apresentada regra de inferência clássica conhecida como *modus tollens*. Em (1), sabemos que A implica em B e que B é falso. A partir dessas informações, por meio da lógica clássica, temos garantia de que A é falso, pois se A fosse verdadeiro, B também seria verdadeiro, mas sabemos que B é falso, logo A é falso. Mas o que podemos aprender sobre A se não tivermos certeza sobre B? Em (2) observamos o caso em que o fato de B ser falso não é declarado, mas apenas um resultado de um raciocínio plausível, chamamos então de "menos crível". Como B é consequência de A e é "menos crível" diante de nosso julgamento, A passa a perder credibilidade da mesma forma. Nesse caso, o raciocínio dedutivo ainda apresenta certa influência, já que B falso influencia diretamente em A e estamos "tendendo" para o fato de B ser falso. E vemos uma certa gradação de certeza nos casos (3) e (4) em que B mais crível não influencia diretamente em A segundo as regras da lógica clássica, nos afastando do raciocínio dedutivo completamente. Mas o fato de B ser "mais crível" fortalece nossa confiança sobre a validade de A. Enquanto B verdadeiro aumenta mais ainda nossa credibilidade em A, mesmo que não haja nenhuma garantia lógica. Lembrando que estamos lidando com o pensamento plausível. Assim, Polya tenta esquematizar o pensamento plausível de modo abstrato fazendo um paralelo com o processo lógico.

Polya faz uma extensiva exploração de regras de inferência clássica e introduz diferentes padrões de inferência plausível com gradações tais como ilustradas na Figura 1. Esses padrões de inferência palusíveis não são conscientemente aplicados, mas ele os reconhece como presentes e efetivos no processo de resolução de problemas. Ele entende que ao dominá-los somos capazes de fazer inferências mais qualificadas e potencializar nossa capacidade de resolver problemas.

3 Variação de um problema

Nos distanciando um pouco dos complexos processos mentais estudados na Heurística, vejamos então a parte prática de George Polya. Afinal, o objetivo do estudo do pensamento plausível é justamente adquirirmos e conseguirmos passar adiante a capacidade de resolução de problemas. E Polya tentou descrever cada processo prático que um indivíduo deve realizar ao resolver um problema matemático, Polya (1978) entende que ao tentarmos solucionar um problema, devemos buscar uma variação daquele mesmo problema. E ele descreve três processos para realizar essa tarefa, sendo eles a Analogia, a Generalização e a Particularização. Essas variações que criamos a partir de um único problema pode nos levar a importantes elementos auxiliares ou a problemas correlatos mais simples que poderão interferir diretamente na forma como enxergamos o problema original.

A seguir breves definições de cada um dos processos citados acima.

> Generalização é a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito. (POLYA, 1954, p. 82)

> Analogia é uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes. (POLYA, 1978, p. 29)

> Particularização é a passagem da consideração de um dado conjunto de elementos para a consideração de um conjunto menor, ou para a de apenas um dos elementos contidos no conjunto dado. A particularização revela-se muitas vezes, útil na resolução de problemas. (POLYA, 1978, p. 108)

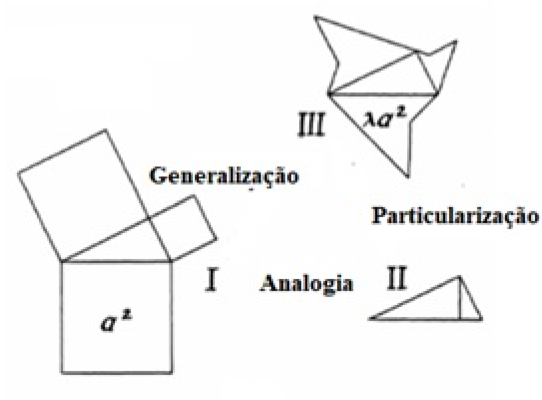
Como veremos adiante não há um único modelo de Resolução de Problemas. Tomemos de exemplo (POLYA, 1954) a prova discutida por ele do teorema mais conhecido da geometria elementar, o teorema de Pitágoras.

Consideramos um triângulo retângulo com lados de medida a, b e c, sendo a, a medida da hipotenusa. Queremos mostrar que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Esta expressão permite uma interpretação em termos de igualdade de áreas e sugere construírmos quadrados sobre os três lados do nosso triângulo retângulo. E assim chegamos à parte I presente na Figura 2, que é bastante usual quando se estuda o Teorema de Pitágoras.

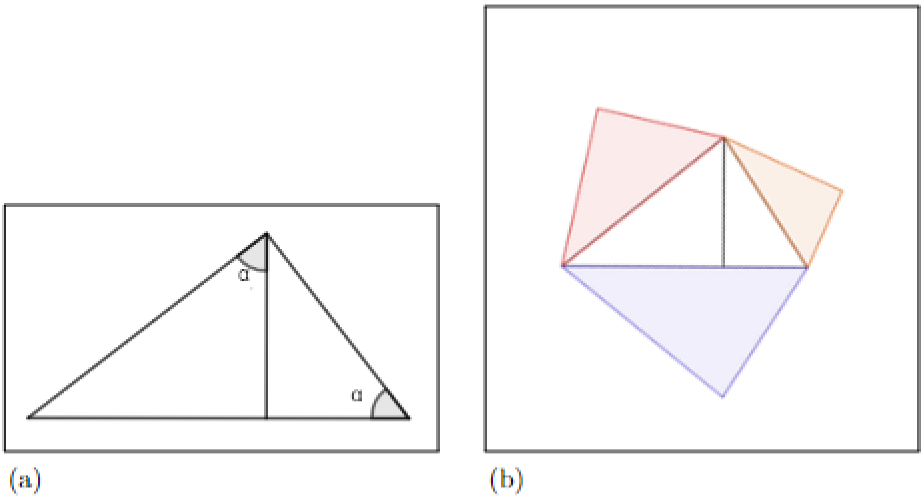
Figura 2: Teorema de Pitágoras como igualdade de áreas



Fonte: Adaptado de POLYA, 1954, p. 16

Um caso análogo à (I) é o caso (II), onde ao invés de quadrados, traçamos triângulos semelhantes entre si ao espelharmos cada triângulo da seguinte forma: no triângulo (II) traçamos a altura em relação a hipotenusa (Figura 3(a)). Assim temos que os dois novos triângulos formados são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original, como mostramos na Figura 3(a), a partir do ângulo α. E então, analogamente a (I), espelhamos cada triângulo ao seu lado correspondente do triângulo retângulo original, como mostramos na Figura 3(b). E é imediato que a soma das áreas dos triângulos correspondentes aos catetos é igual à área do triângulo correspondente à hipotenusa.

Figura 3: Prova Teorema de Pitágoras



Legenda: (a) Semelhança dos triângulos. (b) Replicando os triângulos.
Fonte: Os autores, 2021

Porém, tal analogia não nos garante a prova do Teorema de Pitágoras, pois isso não nos mostra que funciona com as áreas de quadrados semelhantes ou com qualquer outro polígono, mas apenas com os triângulos considerados. Continuamos nossa investigação então e partimos para a generalização em (III), buscando provar a seguinte proposição:

Se três polígonos semelhantes são descritos em três lados de um triângulo retângulo, o descrito na hipotenusa é igual em área à soma dos outros dois.

Caso provemos a proposição acima, os casos (I) e (II) serão casos particulares de (III), concluindo a prova de (I) que buscamos. Foquemos então em (III). A figura (III) é construída de tal forma que os polígonos construídos a partir dos lados do triângulo retângulo sejam semelhantes. Provemos então que a soma das áreas dos polígonos descritos nos catetos é igual a área da hipotenusa.

Sejam A_a a área do polígono descrito no lado a, A_b em b e por fim, A_c em c. Seja γ, tal que $A_a = \gamma a^2$. Como os polígonos são semelhantes, existem constantes k_1, k_2 tais que $b = a \cdot k_1$ e $k_1^2 = \frac{A_b}{A_a}$ e $c = a \cdot k_2$ e $k_2^2 = \frac{A_c}{A_a}$. Donde $A_b = k_1^2 \cdot A_a = k_1^2 \cdot \gamma a^2 = \gamma b^2$ e, analogamente, $A_c = \gamma c^2$.

Note que provar a validade da relação entre as áreas na situação generalizada (III) corresponde a verificar que:

$$\gamma a^2 = \gamma b^2 + \gamma c^2. \tag{1}$$

A igualdade acima ainda não está provada, porém se ela for verdade para algum

γ não nulo, ela vale para todo γ. Voltamos então para o caso análogo (II), onde sabemos por construção que a proposição é válida com os triângulos considerados. Da mesma forma que fizemos com (III), podemos deteminar μ tal que a igualdade de áreas do caso (II) se escreve como $\mu a^2 = \mu b^2 + \mu c^2$. Logo, (1) é válida para qualquer γ, inclusive $\gamma = 1$, que é o caso dos quadrados que desejamos provar, provando assim o Teorema de Pitágoras.

Com o exemplo anterior, podemos aprender o uso de operações mentais fundamentais como generalização, particularização e a percepção de analogias. Talvez não haja descoberta, nem na matemática elementar nem na avançada, que pudesse dispensar essas operações, especialmente a analogia.

A analogia parece perpassar todas as descobertas, podemos verificar isso com um exemplo que não é tão elementar, mas que é de interesse histórico também apresentado por Polya (1954). Jacques Bernoulli, matemático suíço (1654-1705), contemporâneo de Newton e Leibniz, descobriu a soma de várias séries infinitas, mas não conseguiu encontrar a soma dos recíprocos dos quadrados,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots \tag{2}$$

“Se alguém conseguir”, escreveu Bernoulli, “encontrar o que até agora resistiu aos nossos esforços e nos comunicar, ficaremos muito gratos a ele.” O problema chamou a atenção de outro matemático suíço, Leonhard Euler (1707-1783), nascido em Basileia, assim como Jacques. Ele encontrou várias expressões para a soma desejada (integrais definidas, outras séries), nenhuma das quais o satisfez. Ele usou uma dessas expressões para calcular a soma numericamente com precisão de sete casas (1,644934). No entanto, este é apenas um valor aproximado e seu objetivo era encontrar o valor exato. E ele o descobriu eventualmente. A analogia o levou a uma conjectura extremamente ousada.

1. Começamos revisando alguns fatos algébricos elementares essenciais para a descoberta de Euler. Se a equação de grau n

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{3}$$

tem n raízes distintas

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

polinômio no lado esquerdo de (3) pode ser representado como um produto de

n fatores lineares,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n) \tag{4}$$

Ao comparar os termos com a mesma potência de x em ambos os lados dessa identidade, derivamos as relações bem conhecidas entre as raízes e os coeficientes de uma equação, a mais simples das quais é

$$a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n);$$

encontramos isso comparando em (4) os coeficientes dos termos com x^{n-1}.

Existe outra maneira de apresentar a decomposição em fatores lineares. Se nenhuma das raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é igual a 0, ou (que é o mesmo) se forem todas diferentes de 0, temos também

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_0 \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

e,

$$a_1 = -a_0 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

Há ainda outra variante. Suponha que a equação seja de grau $2n$, e tenha a forma

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0 \tag{5}$$

e $2n$ raízes distintas

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \ldots, \beta_n, -\beta_n.$$

Então,

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n} = b_0 \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right) \tag{6}$$

e

$$b_1 = b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\beta_n^2}\right). \tag{7}$$

2. Euler considera a equação

$$\operatorname{sen} x = 0$$

ou

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots = 0 \tag{8}$$

O lado esquerdo tem uma infinidade de termos, é de "grau infinito". Portanto, não é de admirar, diz Euler, que haja uma infinidade de raízes

$$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$$

Euler descarta a raiz 0. Ele divide o lado esquerdo da equação por x, o fator linear correspondente à raiz 0, e obtém assim a equação

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 0$$

com as raízes

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$$

Já vimos uma situação análoga antes, em (5), quando discutimos a última variante da decomposição em fatores lineares. Euler conclui, por analogia a (6), que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

e como em (7), conclui que

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots.$$

Isto é,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Euler sabia muito bem que sua conclusão era ousada. "O método era novo e nunca foi usado para tal propósito", escreveu ele dez anos depois. Ele mesmo viu algumas objeções e muitas destas foram levantadas por seus amigos matemáticos quando se recuperaram de sua primeira surpresa e admiração.

   No entanto, Euler tinha suas razões para confiar em sua descoberta. Em primeiro lugar, o valor numérico aproximado para a soma das séries que ele calculara antes, era coerente com o agora obtido $\frac{\pi^2}{6}$. Comparando outros coeficientes em sua expressão "fatorada" para $\operatorname{sen} x$, ele encontrou a soma de outras séries notáveis, como a dos recíprocos das quartas potências,

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. Euler continuou duvidando. Ele continuou com suas investigações numéricas a partir da expansão em (8) e das relações entre seus coeficientes e as raízes através da analogia com a fatoração de polinômios,examinou mais séries e mais casas decimais e encontrou concordância em todos os casos examinados. Ele também tentou outras abordagens e, finalmente, conseguiu verificar não apenas numericamente, mas exatamente, o valor $\pi^2/6$ para a série de Jacques Bernoulli. Ele encontrou uma nova prova. Esta prova, embora oculta e engenhosa, baseou-se em considerações mais usuais e foi aceita como completamente rigorosa. Assim, a consequência mais conspícua da descoberta de Euler foi satisfatoriamente verificada. Esses argumentos, ao que parece, convenceram Euler de que seu resultado estava correto.

4 Conclusão

Existem diversas formas de enxergar um problema e Polya estudou tanto o processo subjetivo por trás da resolução de problemas, como também a parte prática desse universo. Esse lado de Polya é pouco conhecido, em que ele se aprofunda mais ainda em variações de problemas e nos processos mentais que ocorrem na solução dos mesmos. O exemplo citado de Pitágoras mostra como podemos ascender por generalização de um caso especial para uma situação mais geral, e redescender, portanto, por particularização para um caso análogo. Mostra também o fato, tão comum na matemática, de que o caso geral pode ser logicamente equivalente a um caso especial. O exemplo mostra, de maneira ingênua e sugestiva, como generalização, especialização e analogia são naturalmente combinadas no esforço de alcançar a solução desejada. Ao extrapolar para séries um resultado conhecido para fatoração de polinômios, Euler ilustra a potência da heurística e generalização. Não de deixando limitar pelo desconhecimento da prova rigorosa de seus procedimentos, ele explora livremente suas consequências e posterga a formalização. Só a persegue depois que esta fase livre e investigativa mostrou a potência dos resultados que podiam ser alcançados através da analogia.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da Faperj através dos processos E-26/010.101140/2018 e E-26/210.177/2022, e a Capes através do Programa de Residência Pedagógica.

Referências

[1] POLYA, G.: **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 1995.

[2] POLYA, G.: **Mathematics and Plausible Reasoning: Vol. I Induction and analogy in mathematics**. Princeton, 1954.

[3] POLYA, G.: **Mathematics and Plausible Reasoning: Vol. II Patterns of Plausible inference**. Princeton, 1968.