Cadernos do IME - Série Matemática
DOI: 10.12957/cadmat.2023.68443
***e-ISSN:** 2236-2797 (online)*
Recebido em 21 Jun. 2022 | Aceito em 08 Ago. 2022

COMENTÁRIO SOBRE UMA QUESTÃO DE RAMANUJAN

COMMENTARY ON A QUESTION OF RAMANUJAN

DINAMÉRICO P. POMBO JR.[a]

Resumo

Nesta nota mostramos que a Questão 441 de Ramanujan permanece válida em um contexto bastante abrangente.

Palavras-chave: S. Ramanujan, equações diofantinas, anéis comutativos com unidade, ensino de Matemática.

Abstract

In this note it is shown that Question 441 of Ramanujan remains valid in a quite general context.

Keywords: S. Ramanujan, Diophantine equations, unitary commutative rings, Mathematics teaching.

MSC2010: 01A32, 13A70, 11D25.

1 Introdução

No período 1911-1919, Srinivasa Ramanujan (1887-1920) submeteu 58 questões ao Journal of the Indian Mathematical Society, cujo impacto foi discutido, exaustiva e profundamente, em [1]. A veracidade da Questão 441 de Ramanujan [5], [3, p. 201]

"Show that

$$(6a^2 - 4ab + 4b^2)^3 = (3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 + (4a^2 - 4ab + 6b^2)^3 + (5a^2 - 5ab - 3b^2)^3,$$

[a]Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, Brasil; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4809-8284 **E-mail:** dpombojr@gmail.com

and find other quadratic expressions satisfying similar relations."
foi confirmada em [4]. Nesta nota mostramos que, sob uma condição bastante geral,

$$\begin{aligned} x &= 3a^2 + 5ab - 5b^2, \\ y &= 4a^2 - 4ab + 6b^2, \\ z &= 5a^2 - 5ab - 3b^2, \\ t &= 6a^2 - 4ab + 4b^2 \end{aligned}$$

é solução da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3,$$

como Ramanujan já vislumbrara no caso em que a e b são números racionais arbitrários.

Sejam $\mathbb{Z}$ o anel dos números inteiros, R um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$ e lembremos que a aplicação

$$n \in \mathbb{Z} \longmapsto n.1 \in R$$

é um homomorfismo de anéis, onde $n.1 = 0 \in R$ se $n = 0$, $\;n.1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}$ se $n > 0$ e $n.1 = -((-n).1)$ se $n < 0$. Consequentemente, o subanel

$$\{n.1; n \in \mathbb{Z}\}$$

de R é isomorfo a $\mathbb{Z}$ (em qual caso diz-se que R possui característica zero) ou ao anel $\mathbb{Z}_m$ do inteiros módulo m, para algum inteiro $m > 1$ (em qual caso diz-se que R possui característica m) [2, Cap. XIII]. Por um abuso de notação, escreveremos "n" em lugar de "$n.1$".

2 O resultado

Nosso propósito é estabelecer o seguinte fato.

Proposição 2.1. *Seja R um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$, arbitrário. Então,* *para quaisquer* $a, b \in R$*,*

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$$
$$y = 4a^2 - 4ab + 6b^2,$$
$$z = 5a^2 - 5ab - 3b^2,$$
$$t = 6a^2 - 4ab + 4b^2$$

é solução da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3.$$

Por consequência, $\alpha = x$*,* $\beta = y$*,* $\gamma = -z$ *e* $\delta = t$ *é solução da equação* $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3 + \delta^3$*.*

Demonstração. Inicialmente, lembremos que

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

para quaisquer $u, v \in R$.

Escrevendo $t = u + v$, com $u = 6a^2 - 4ab$ e $v = 4b^2$, conclui-se que

$$t^3 = 216\,a^6 - 432\,a^5b + 720\,a^4b^2 - 640\,a^3b^3 + 480\,a^2b^4 - 192\,ab^5 + 64\,b^6.$$

E, escrevendo $y = u + v$, com $u = 4a^2 - 4ab$ e $v = 6b^2$, conclui-se que

$$y^3 = 64\,a^6 - 192\,a^5b + 480\,a^4b^2 - 640\,a^3b^3 + 720\,a^2b^4 - 432\,ab^5 + 216\,b^6.$$

Consequentemente,

$$t^3 - y^3 = 152\,a^6 - 240\,a^5b + 240\,a^4b^2 - 240\,a^2b^4 + 240\,ab^5 - 152\,b^6.$$

Da mesma forma, escrevendo $x = u + v$, com $u = 3a^2 + 5ab$ e $v = -5b^2$, vem

$$x^3 = 27\,a^6 + 135\,a^5b + 90\,a^4b^2 - 325\,a^3b^3 - 150\,a^2b^4 + 375\,ab^5 - 125\,b^6.$$

E, escrevendo $z = u + v$, com $u = 5a^2 - 5ab$ e $v = -3b^2$, vem

$$z^3 = 125\,a^6 - 375\,a^5b + 150\,a^4b^2 + 325\,a^3b^3 - 90\,a^2b^4 - 135\,ab^5 - 27\,b^6.$$

Portanto,

$$x^3 + z^3 = 152\,a^6 - 240\,a^5 b + 240\,a^4 b^2 - 240\,a^2 b^4 + 240\,ab^5 - 152\,b^6 = t^3 - y^3,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 2.1. *Sob as condições da Proposição 2.1, αx, αy, αz, αt é solução da equação $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ para todo $\alpha \in R$.*

Demonstração. Imediata a partir da Proposição 2.1. $\square$

Exemplo 2.1. (i) No caso em que R é o corpo $\mathbb{Z}_2$ dos inteiros módulo 2, cuja característica é 2, x, y, z e t adquirem a fisionomia $x = z = a^2 + ab + b^2$ e $y = t = 0$.

(ii) No caso em que R é o corpo $\mathbb{Z}_3$ dos inteiros módulo 3, cuja característica é 3, x, y, z e t adquirem a fisionomia $x = t = 2ab + b^2$, $y = a^2 + 2ab$ e $z = 2a^2 + ab$.

(iii) No caso em que R é o corpo $\mathbb{Z}_5$ dos inteiros módulo 5, cuja característica é 5, x, y, z e t adquirem a fisionomia $x = 3a^2$, $y = 4a^2 + ab + b^2$, $z = 2b^2$ e $t = a^2 + ab + 4b^2$.

(iv) No caso em que R é o anel $\mathbb{Z}_6$ dos inteiros módulo 6 (R não é um corpo, pois 6 não é primo), cuja característica é 6, x, y, z e t adquirem a fisionomia $x = 3a^2 + 5ab + b^2$, $y = 4a^2 + 2ab$, $z = 5a^2 + ab + 3b^2$ e $t = 2ab + 4b^2$.

Exemplo 2.2. No caso em que R é um anel comutativo com unidade, de característica zero, x, y, z e t permanecem com a fisionomia explicitada no enunciado da Proposição 2.1.

Exemplo 2.3. Seja R o anel comutativo com unidade das funções contínuas do intervalo $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, cujas operações de adição e multiplicação são dadas por $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ e $(fg)(s) = f(s)g(s)$ para todo $s \in [0, 1]$ ($f, g \in R$ quaisquer) e cujo elemento unidade é a função $s \in [0, 1] \longmapsto 1 \in \mathbb{R}$ (R não é um anel de integridade e possui característica zero). Então, pelo que observamos no exemplo acima, x, y, z e t permanecem com a fisionomia explicitada no enunciado da Proposição 2.1.

Referências

[1] BERNDT, B.C.; CHOI, Y.-S.; KANG, S.-Y.: **The problems submitted by Ramanujan to the Journal of the Indian Mathematical Society**. Contemp. Math., 236:15-56, 1999.

[2] BIRKHOFF, G.; MAC LANE, S.: **A Survey of Modern Algebra**. Eighth Printing, Macmillan, New York, 1971.

[3] HARDY, G. H.; WRIGHT, E.M.: **An Introduction to the Theory of Numbers**. Fifth Edition, Oxford University Press, 1979.

[4] NARAYANAN S.: **Solution to Problem 441** . J. Indian Math. Soc., 6:226-227, 1914.

[5] RAMANUJAN S.: **Question 441**. J. Indian Math. Soc., 5:39, 1913.