Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*

DOI: 10.12957/cadmat.2023.67960
Recebido em 06 Jun. 2022 | Aceito em 04 Jul. 2022

SOBRE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HIPERGEOMÉTRICAS

ABOUT SOLUTIONS OF HYPERGEOMETRIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

JOÃO VÍTOR DE OLIVEIRA ALVES[a]
YOUNES NIKDELAN[b]

Resumo

A presente nota visa apresentar um estudo detalhado das equação diferenciais hipergeométricas de segunda ordem e suas soluções em torno de qualquer um de seus pontos singulares regulares $0, 1, \infty$ através do método de Frobenius.

Palavras-chave: Equação diferencial hipergeométrica, função hipergeométrica, método de Frobenius.

Abstract

The present manuscript aims to present a detailed study of solutions of the hypergeometric differential equations of second order around any of their singular regular points $0, 1, \infty$ through Frobenius method.

Keywords: Hypergeometric differential equation, hypergeometric function, Frobenius method.

MSC2010: 34-02, 34A25, 34B30.

[a]Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Brazil; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0456-2206 **E-mail:** joaovitorooalves@gmail.com

[b]Departamento de Análise Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Brazil; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2479-7697 **E-mail:** younes.nikdelan@ime.uerj.br

1 Introdução

Uma das equações diferenciais importantes, não apenas em Matemática, mas também em Física e Engenharia, é a seguinte EDO:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{1.1}$$

a qual é conhecida como *equação diferencial hipergeométrica*, ou *equação diferencial hipergeométrica de Gauss*. Aqui os parâmetros α, β, γ são constantes quaisquer. Esta EDO foi primeiramente estudada por Euler [4] em 1769 e depois foi investigada de uma forma mais sistemática por Gauss, Kummer, Riemann, Papperitz, Schwarz, entre outros. É bem conhecido que a EDO hipergeométrica tem três pontos singulares regulares $0, 1$ e ∞, outras EDOs lineares de segunda ordem com no máximo três pontos singulares regulares podem ser transformadas, através de uma mudança das variáveis apropriadas, em uma EDO hipergeométrica, por exemplo EDOs de Bessel, Legendre e Chebyshev. As soluções das EDOs hipergeométricas podem ser escritas em termos de uma classe importante e interessante de funções especiais chamadas de *funções hipergeométricas (de Gauss)* ${}_2F_1$ (veja Definição 3.1), as quais foram estudadas sistematicamente primeiro por Gauss [5], embora tenham aparecido antes nos trabalhos de Wallis [6] e Euler. Outras funções especiais, como exponencial, logarítmica, trigonométrica, Bessel, Airy e etc., podem ser escritas em termos de funções hipergeométricas ou seus limites.

Equações diferenciais hipergeométricas e funções hipergeométricas, e suas generalizações, conhecidas como equações *diferenciais hipergeométricas generalizadas* e *funções hipergeométricas generalizadas*, ainda são linhas de pesquisa ativas na Matemática e na Física Teórica. O objetivo principal do presente trabalho é apresentar um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial hipergeométrica (3.18) em torno de todos os seus pontos singulares regulares para todas as escolhas dos parâmetros α, β, γ através do método de Frobenius. Para a elaboração desta nota os autores foram beneficiados pela página de web [7].

A organização da presente nota é da seguinte forma. Na Seção 2 é explicado brevemente como obter as soluções de um EDO linear de segunda ordem em torno de seus pontos singulares regulares através do método de Frobenius. A Seção 3 é dedicada à apresentação das equações diferenciais hipergeométricas, seus pontos singulares regulares, seus expoentes e as funções hipergeométricas. Um conjunto fundamental de soluções de equações diferenciais hipergeométricas em torno de pontos singulares regulares $0, 1$ e ∞ é encontrado respectivamente nas Seções 4, 5 e 6.

2 Método de Frobenius

O método de frobenius é utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias por meio de séries de potência em torno de pontos singulares regulares. As referências utilizadas nessa seção são [3] e [2].

Para explicar brevemente este método, considere a seguinte EDO:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{2.2}$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto singular e $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ são funções analíticas em x_0. Sabemos que x_0 é um ponto singular regular da EDO se as duas funções $\hat{p}(x) := (x - x_0)\dfrac{Q(X)}{P(x)}$ e $\hat{q}(x) := (x - x_0)^2 \dfrac{R(x)}{P(x)}$ são analíticas em x_0. A seguir, para simplicidade, supomos que $x_0 = 0$ (para caso geral veja Observação 2.3). Assim a EDO (2.2) é equivalente a seguinte EDO:

$$x^2y'' + \hat{p}(x)xy' + \hat{q}(x)y = 0, \tag{2.3}$$

e como $\hat{p}(x)$ e $\hat{q}(x)$ são analíticas em $x_0 = 0$, possuem as seguintes expanções em série de Taylor:

$$\hat{p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \& \quad \hat{q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\,. \tag{2.4}$$

de raios de convergências ρ_1 e ρ_2, respectivamente. Se supormos que P,Q e R são polinômios, então x_0 é um ponto singular regular da EDO (2.2) se e somente se os limites:

$$p_0 := \lim_{x\to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q_0 := \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

existem e são finitos.

No método de Frobenius supõe-se que uma solução da EDO (2.3) é da forma:

$$\phi(x, r) := x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^n, \quad x > 0, \tag{2.5}$$

e observa-se que, para variáveis indeterminadas $a_0 \neq 0$ e r, a série $\phi(x, r)$ satisfaz a EDO (2.3) se

$$\lambda(r) := r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{2.6}$$

e $a_n(r)$ satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$\lambda(r+n)a_n(r) = -\sum_{j=0}^{n-1}\big[(j+r)p_{n-j} + q_{n-j}\big]a_j(r), \quad n \geq 1\,, \tag{2.7}$$

desde que $\lambda(r+n) \neq 0,\ n \geq 1$. A equação $\lambda(r) = 0$ é chamada de *equação indicial* da EDO (2.3) e suas raízes chamam-se *expoentes* na singularidade $x_0 = 0$.

No seguinte teorema resumimos o método de Frobenius, no qual $\rho :=\ \min\{\rho_1, \rho_2\}$. Para mais detalhes o leitor pode consultar as Seções 4,5,6 do Cap. 4 da referência [3].

Teorema 2.1 (**Método de Frobenius**). *Sejam r_1 e r_2 duas raízes da equação indicial* (2.6)*, tal que $r_1 \geq r_2$ se forem reais. Então uma solução da EDO* (2.2) *é da forma:*

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.8}$$

para $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, onde $a_0 \neq 0$ e os coeficientes a_n's são constantes que podem ser determinadas pela substituição de $y_1(x)$ na EDO (2.2)*. A segunda solução $y_2(x)$, que será linearmente independente de y_1, terá uma das seguintes formas:*

1. *Se $r_1 \neq r_2$ e $(r_1 - r_2) \notin \mathbb{N}$, então $y_2(x)$ é:*

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{2.9}$$

onde $b_0 \neq 0$, $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, $b_n \neq 0$ e os b_n's são coeficientes constantes que podem ser determinados pela substituição de $y_2(x)$ na EDO (2.2)*.*

2. *Se $r_1 = r_2$, então:*

$$y_2(x) = y_1(x)\ \ln|x| + |x|^{r_1}\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \tag{2.10}$$

para $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, onde os coeficientes c_n são constantes que podem ser determinados pela substituição de $y_2(x)$ na EDO (2.2)*.*

3. *Se $r_1 \neq r_2$ e $(r_1 - r_2) \in \mathbb{N}$, então $y_2(x)$ é:*

$$y_2(x) = a\ y_1(x)\ \ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \tag{2.11}$$

onde $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, $d_0 \neq 0$, e d_n's e a são constantes que podem ser determinadas pela substituição de $y_2(x)$ na EDO (2.2). Anote que a constante a pode ser 0.

Observação 2.1. No item 2 do Teorema 2.1, quando $r_1 = r_2$, a soluçao $y_2(x)$ dada em (2.10) segue do fato que se $y_1(x) = \phi(x, r_1)$ é uma solução da EDO (2.2), então $y_2(x) = \frac{\partial \phi(x,r)}{\partial r}|_{r=r_1}$ também é uma solução da EDO, onde $\phi(x, r)$ é dada por (2.5). De fato pode-se ver que:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dr}(r_1)x^n . \tag{2.12}$$

Observação 2.2. Se no item 3 de Teorema 2.1 denotamos $m := r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$, então surge o problema que em (2.7) para $n = m$ temos $\lambda(r_2 + m) = \lambda(r_1) = 0$. Para evitar este problema, definimos:

$$\psi(x, r) := x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r)x^n, \quad \text{com} \quad A_0 = r - r_2 , \tag{2.13}$$

onde para $n \geq 1$ os coeficientes A_n são dados por (2.7), i.e.:

$$\lambda(r + n)A_n(r) = -\sum_{j=0}^{n-1} \big[(j + r)p_{n-j} + q_{n-j}\big]A_j(r), \quad n \geq 1 . \tag{2.14}$$

De fato, observa-se que

$$A_n(r) = (r - r_2)a_n(r), \quad 1 \leq n \leq m - 1, \quad \text{e} \quad A_m(r) = \lim_{r \to r_2}(r - r_2)a_m(r) , \tag{2.15}$$

e

$$L\big(\psi\big)(x, r) = (r - r_2)\lambda(r)x^r, \tag{2.16}$$

onde $L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \hat{p}(x)x\frac{d}{dx} + \hat{q}(x)$. Logo, $\psi(x, r_2)$ é uma solução da EDO (2.3), porém como $A_0(r_2) = A_1(r_2) \ldots = A_{m-1}(r_2) = 0$, podemos ver que $\psi(x, r_2) = A_m(r_2)y_1 = A_m(r_2)\phi(x, r_1)$. A partir de (2.16) temos $\frac{\partial}{\partial r}\big[L\big(\psi\big)(x, r)\big]|_{r=r_2} = L\big(\frac{\partial \psi}{\partial r}\big)(x, r_2) = 0$, ou seja, $\frac{\partial \psi}{\partial r}(x, r_2)$ é uma solução da EDO (2.3). De fato, observa-se que:

$$y_2(x) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(x, r_2) = A_m(r_2)\, y_1(x)\, \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dA_n}{dr}(r_2)x^n , \tag{2.17}$$

é uma solução linearmente independente de y_1.

Observação 2.3. Se $x_0 \neq 0$, utilizando a mudança de variáveis $t = x_0 - x$ é possível constatar que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dy}{dt}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, e transformamos a EDO (2.2) à EDO:

$$P(t - x_0)\frac{d^2y}{dt^2}(t) - Q(t - x_0)\frac{dy}{dt}(t) + R(t - x_0)y(t) = 0,$$

cujo ponto singular regular é $t = 0$. Também, quando mais conveniente é possível aplicar a mudança $t = x - x_0$, para qual obtemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$

3 A equação hipergeométrica

A equação *hipergeométrica* é da forma:

$$x\big(1 - x\big)y''(x) + \big[\gamma - (1 + \alpha + \beta)x\big]y'(x) - \alpha\beta y(x) = 0, \tag{3.18}$$

onde α, β e γ são constantes. Observamos que $P(x) = x(1 - x)$; $Q(x) = \gamma - (1 + \alpha + \beta)x$ e $R(x) = -\alpha\beta$. Como $P(0) = P(1) = 0$, podemos ver que $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ e $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ não são analíticas em $x_0 = 0, 1$ e portanto $x_0 = 0, 1$ são pontos singulares. A existência dos seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - 0)Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\gamma - (1 + \alpha + \beta)x)}{x(1 - x)} = \gamma, \tag{3.19}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - 0)^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - 0)^2(-\alpha\beta)}{x(1 - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\alpha\beta)}{x(1 - x)} = 0, \tag{3.20}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(\gamma - (1 + \alpha + \beta)x)}{x(x - 1)} = 1 + \alpha + \beta - \gamma, \tag{3.21}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)^2(-\alpha\beta)}{x(1 - x)} = 0, \tag{3.22}$$

implicam que $x_0 = 0, 1$ são pontos singulares regulares. Para mostramos que $x_0 = \infty$ é também um ponto singular regular da EDO (3.18) é feita a mudança de variável $w = x^{-1}$, dessa forma temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = -w^2 \cdot \frac{dy}{dw},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\bigg(- w^2 \cdot \frac{dy}{dw}\bigg) = \frac{d}{dw}\bigg(- w^2 \cdot \frac{dy}{dw}\bigg) \cdot \frac{dw}{dx} = 2w^3\frac{dy}{dw} + w^4\frac{d^2y}{dw^2}.$$

Assim, a EDO (3.18) toma a seguinte nova forma:

$$\big(w^3 - w^2\big)\frac{d^2y}{dw^2}(w) + \big[(2 - \gamma)w^2 + (\alpha + \beta - 1)w\big]\frac{dy}{dw}(w) - \alpha\beta y(w) = 0\,. \tag{3.23}$$

Neste caso temos $P(w) = w^3 - w^2$; $R(w) = (2-\gamma)w^2 + (\alpha+\beta-1)w$; $Q(w) = -\alpha\beta$, e como $P(0) = 0$, obtemos que $w_0 = 0$ é um ponto singular da EDO (3.23). Observamos que:

$$\lim_{w\to 0} \frac{(w-0)R(w)}{P(w)} = 1-\alpha-\beta\,, \quad \lim_{w\to 0} \frac{(w-0)^2 Q(w)}{P(w)} = \alpha\beta, \tag{3.24}$$

os quais implicam que $w_0 = 0$ é um ponto singular regular da EDO (3.23) e consequentemente $x_0 = \infty$ é um ponto singular regular da EDO (3.18).

Portanto a equação hipergeométrica (3.18) possui três pontos singulares regulares $x_0 = 0, 1, \infty$. A seguir iremos encontrar os expoentes dessas singularidades.

$\boldsymbol{x_0 = 0.}$ Os limites (3.19) e (3.20), implicam respectivamente em $p_0 = \gamma$ e $q_0 = 0$, logo a equação indicial a partir de (2.6) será $r(r-1) + \gamma r = 0$. Com isso, os expoentes da singularidade $x_0 = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 1-\gamma$.

$\boldsymbol{x_0 = 1.}$ Analogamente, a partir dos limites (3.21) e (3.22), encontramos $r_1 = 0$ e $r_2 = \gamma - \alpha - \beta$.

$\boldsymbol{x_0 = \infty.}$ Neste caso basta encontrar os expoentes da singularidade $w_0 = 0$ da EDO (3.23). Usando (3.24) encontramos $r_1 = \alpha$ e $r_2 = \beta$.

Definição 3.1. Sejam a, b, c três números complexos tal que $c \notin \mathbb{Z}_{<0}$. A *função hipergeométrica*, que é também conhecida como *função hipergeométrica de Gauss*, para os parâmetros a, b, c em variável x, com $|x| < 1$, define-se da seguinte forma:

$${}_2F_1(a, b; c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{3.25}$$

onde, para qualquer número complexo α e inteiro não-negativo n, a notação $(\alpha)_n$ refere-se ao *simbolo de Pochhammer* definido da seguinte forma:

$$(\alpha)_n := \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1), & n > 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Note que $(1)_n = n!$ e se $\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ com $n > -\alpha$, então $(\alpha)_n = 0$. Por isso em (3.25) o parâmetro c não pode ser inteiro não-positivo. Além disso, se a ou b for um número inteiro não-positivo, então ${}_2F_1(a, b; c; x)$ vai ser um polinômio em x, e consequentemente vai ser uma função inteira. A seguir observaremos que para certas escolhas dos parâmetros a, b, c a função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; x)$ apresentará uma solução da equação diferencial hipergeométrica (3.18).

Nas seguintes seções vamos apresentar um conjunto fundamental $\{y_1, y_2\}$ de soluções da EDO hipergeométrica (3.18) em torno de seus pontos singulares regulares, ou seja, a solução geral da EDO hipergeométrica será da forma:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

onde C_1, C_2 são constantes quaisquer.

4 Soluções em torno de $x_0 = 0$

Supomos que uma solução da EDO (3.18) em torno de $x_0 = 0$ assume a forma:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\,, \text{com } a_0 \neq 0,\ x > 0, \tag{4.27}$$

onde r é um expoente de $x_0 = 0$ e encontraremos uma relação recorrência para os coeficientes a_n. Substituindo y, $y' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}$ e $y'' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$ na EDO (3.18) temos:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}\\ &+ \gamma\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} - (1+\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.\end{aligned}$$

Depois de simplificar esta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}a_0\big(r(r-1)+\gamma r\big)x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}\\ + \gamma(n+r)a_n - (1+\alpha+\beta)(n+r-1)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-1}\big]x^{n+r-1} = 0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Portanto y dada por (4.27) é uma solução da EDO (3.18) se o coeficiente de x^{n+r-1} na (4.28), para todo $n \geq 0$, é zero. Note que para o coeficiente de x^{r-1} temos $r(r-1) + \gamma r = 0$, a qual é a equação indicial em $x_0 = 0$. Igualando o coeficiente de x^{n+r-1} com zero, para $n \geq 1$, e isolando a_n chegamos em:

$$a_n = \frac{(n+r-1)(n+r-2) + (1+\alpha+\beta)(n+r-1) + \alpha\beta}{(n+r)(n+r-1) + \gamma(n+r)} a_{n-1},$$

de qual concluimos a seguinte relação recorrência:

$$a_n = \frac{(r+n+\alpha-1)(n+r+\beta-1)}{(n+r)(n+r+\gamma-1)} a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1. \tag{4.29}$$

Com isso, simplificamos a relação recorrência colocando os termos de a_n em função de a_0 em vez de a_{n-1}:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(r+n+\alpha-1)(n+r+\beta-1)}{(n+r)(n+r+\gamma-1)}\, a_{n-1} \\ &= \frac{(r+n+\alpha-1)(n+r+\beta-1)}{(n+r)(n+r+\gamma-1)} \frac{(r+n+\alpha-2)(n+r+\beta-2)}{(n+r-1)(n+r+\gamma-2)}\, a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{(r+\alpha)(r+\alpha+1)\dots(r+\alpha+n-1)\cdot(r+\beta)(r+\beta+1)\dots(r+\beta+n-1)}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)\cdot(r+\gamma)(r+\gamma+1)\dots(r+\gamma+n-1)}\, a_0\,. \end{aligned}$$

Utilizando o simbolo de Pochhammer obtemos:

$$a_n = \frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_n}\, a_0, \quad \forall n \geq 0, \tag{4.30}$$

logo, a solução assumida (4.27) toma a forma:

$$y = a_0 x^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_n}\, x^n, \tag{4.31}$$

na qual supomos que $(r+1)_n(r+\gamma)_n \neq 0$, para todos $n \geq 0$. Devido ao Teorema 2.1 nas seguintes subseções consideremos os 3 casos possíveis.

4.1 Caso $\gamma \notin \mathbb{Z}$

Se $\text{Re}(1-\gamma) < 0$, temos $r_1 = 0$ e $r_2 = 1-\gamma$, caso contrário consideramos $r_1 = 1-\gamma$ e $r_2 = 0$. Portanto neste caso $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ e o denominador de $a_n,\ n \geq 1$, é não nulo e usamos o Teorema 2.1, item 1. Se supomos $r_1 = 0$ e $r_2 = 1-\gamma$, utilizando (2.8), (2.9) e (4.31) obtemos:

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{4.32}$$

$$y_2(x) = a_0 |x|^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(2-\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{4.33}$$

ou seja, utilizando a notação de funções hipergeométricas dada em (3.25) e considerando $a_0 = 1$ temos:

$$y_1(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x), \tag{4.34}$$
$$y_2(x) = |x|^{1-\gamma}\, {}_2F_1(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma; 2 - \gamma; x). \tag{4.35}$$

Se $r_1 = 1 - \gamma$ e $r_2 = 0$, então para encontrar y_1 e y_2 basta alterar o papel de y_1 e y_2 encontrada acima.

4.2 Caso $\gamma = 1$

Neste caso $1 - \gamma = 0$ e consequentemente $r_1 = r_2 = 0$, logo devemos utilizar o item 2 do Teorema 2.1. Pela (2.8) a primeira solução y_1 coincede com (4.34), ou seja:

$$y_1(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)\,.$$

Para encontrar uma segunda solução linearmente independente de y_1, pela (2.12) dada na Observação 2.1, precisamos encontrar $\frac{da_n}{dr}(r)|_{r=0}$, onde a_n é estabelecido em (4.30). Assim, para $\gamma = 1$ temos:

$$a_n(r) = \frac{(r+\alpha)_n (r+\beta)_n}{(r+1)_n^2}\, a_0\,, \quad n \geq 1\,. \tag{4.36}$$

Para calcular a derivada de a_n, primeiro aplicaremos ln e teremos (consideramos que a constante $a_0 > 0$):

$$\begin{aligned}\ln(a_n) &= \ln(r+\alpha)_n + \ln(r+\beta)_n - 2\ln(r+1)_n + \ln(a_0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(r+\alpha+k) + \ln(r+\beta+k) - 2\ln(r+1+k)\big) + \ln(a_0).\end{aligned}$$

Derivando ambos os lados desta igualdade em relação à r obtemos:

$$\frac{da_n}{dr}(r) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r+\alpha+k} + \frac{1}{r+\beta+k} - \frac{2}{r+1+k} \right)$$

e daí utilizando (4.36) para $r = 0$ temos:

$$\frac{da_n}{dr}(0) = a_0 \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(n!)^2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\beta+k} \right) - 2H_n \right].$$

onde $H_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ é a n-ésima soma parcial da série harmônica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$.

Utilizando (2.12) e (4.32) encontramos:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2} \left\{ \ln|x| + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\beta+k} \right) - 2H_n \right\} x^n , \tag{4.37}$$

na qual supomos que $a_0 = 1$ e que $\sum\limits_{k=0}^{-1} * = 0$.

4.3 Caso $\gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$

Nesta subseção dependendo se $1-\gamma > 0$ ou $1-\gamma < 0$, teremos soluções diferentes. Logo estudemos as soluções nos seguintes dois casos:

1) $\boldsymbol{\gamma \leq 0}$. Neste cenário $1-\gamma \geq 1$, portanto $r_1 = 1-\gamma$ e $r_2 = 0$. Logo, pelas (2.8) e (4.31), a primeira solução para $a_0 = 1$ é da seguinte forma:

$$y_1(x) = |x|^{1-\gamma} \, {}_2F_1(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma; 2-\gamma; x). \tag{4.38}$$

Como $m := r_1 - r_2 = 1-\gamma \in \mathbb{Z}_{>0}$, para encontrar uma segunda solução linearmente independente da y_1 devemos usar o item 3 do Teorema 2.1. Pela Observação 2.2 sabemos $y_2(x) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(x,r)|_{r=r_2}$, onde:

$$\psi(x,r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r) x^n, \text{ com } A_0 = a_0 r, \quad x > 0. \tag{4.39}$$

Nota-se que a_0 é qualquer constante não nula e os coeficientes $A_n(r)$ satisfazem a relação recorrência (4.30), onde substituimos a_n por A_n e a_0 por $A_0 = a_0 r$. Assim, fazendo as devidas substituições obtemos,

$$A_n(r) = \begin{cases} \dfrac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_n} r a_0, & 0 \leq n < 1-\gamma, \\[2ex] \dfrac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_{-\gamma}(r+1)_{\gamma+n-1}} a_0, & n \geq 1-\gamma. \end{cases} \tag{4.40}$$

Devido a (2.17), para determinar y_2 basta calcular $A_m(r_2) = A_{1-\gamma}(0)$ e $\dfrac{dA_n}{dr}(0)$. Utilizando (4.40) obtemos:

$$A_{1-\gamma}(0) = \frac{(\alpha)_{1-\gamma}(\beta)_{1-\gamma}}{(1-\gamma)!(\gamma)_{-\gamma}} a_0 \, . \tag{4.41}$$

Para calcular $\dfrac{dA_n}{dr}(0)$, se $0 \leq n < 1-\gamma$, então:

$$\frac{dA_n}{dr}(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_n}\right) ra_0 + \frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_n}a_0,$$

$$\Rightarrow \frac{dA_n}{dr}(0) = \frac{a_0}{n!}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}, \quad \text{se } 0 \leq n < 1-\gamma. \tag{4.42}$$

Por outro, se $n \geq 1-\gamma$, então para encontrarmos $\dfrac{dA_n}{dr}(r)$ utilizamos o mesmo método utilizado para encontrar $\dfrac{da_n}{dr}(r)$ no caso $\gamma = 1$, isto é:

$$\begin{aligned}\ln A_n(r) = &\sum_{j=0}^{n-1}\ln(r+\alpha+j) + \sum_{j=0}^{n-1}\ln(r+\beta+j) - \sum_{j=0}^{-\gamma-1}\ln(r+\gamma+j)\\ &- \sum_{j=0}^{n-1}\ln(r+1+j) - \sum_{j=0}^{\gamma+n-2}\ln(r+1+j) + \ln(a_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{dA_n}{dr}(r) = A_n(r)\Bigg[&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{r+\alpha+j} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{r+\beta+j} - \sum_{j=0}^{-\gamma-1}\frac{1}{r+\gamma+j}\\ &- \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{r+1+j} - \sum_{j=0}^{\gamma+n-2}\frac{1}{r+1+j}\Bigg].\end{aligned}$$

Portanto para $n \geq 1-\gamma$:

$$\begin{aligned}\frac{dA_n}{dr}(0) = a_0\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_{-\gamma}(\gamma+n-1)!}\Bigg[&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+j} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\beta+j}\\ &+ H_{-\gamma} - H_n - H_{\gamma+n-1}\Bigg].\end{aligned} \tag{4.43}$$

Em posse de (4.41), (4.42) e (4.43), fazendo as devidas substituições na (2.17) e considerando $a_0 = 1$ observamos que:

$$\begin{aligned}y_2(x) = &|x|^{1-\gamma}\frac{(\alpha)_{1-\gamma}(\beta)_{1-\gamma}}{(1-\gamma)!(\gamma)_{-\gamma}}\ln|x|\,{}_2F_1(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma; 2-\gamma; x)\\ &+ \sum_{n=0}^{-\gamma}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{(\gamma)_{-\gamma}}\sum_{n=1-\gamma}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma+n-1)!}\Bigg\{\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+j}\\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\beta+j} + H_{-\gamma} - H_n - H_{\gamma+n-1}\Bigg\}\frac{x^n}{n!}.\end{aligned} \tag{4.44}$$

2) $\boldsymbol{\gamma \geq 2}$. Desde que $1-\gamma < 0$, temos $r_1 = 0$ e $r_2 = 1-\gamma$. Logo, pela (2.8) primeira solução $y_1(x)$ é dada por (4.34), ou seja:

$$y_1(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)\,.$$

Como $m := r_1 - r_2 = \gamma - 1 \in \mathbb{Z}_{>0}$, de forma análoga ao caso anterior utilizamos o item 3 de Teorema 2.1 e Observação 2.2 para encontrar uma segunda solução. Portanto, consideremos:

$$\psi(x, r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r) x^n, \text{ com } A_0 = a_0(r + \gamma - 1), \quad x > 0. \tag{4.45}$$

Utilizando (4.30) e fazendo as devidas substiuições, observamos que:

$$A_n(r) = \begin{cases} \dfrac{(r+\alpha)_n (r+\beta)_n}{(r+1)_n (r+\gamma)_n} (r+\gamma-1) a_0, & 0 \leq n < \gamma - 1, \\ \\ \dfrac{(r+\alpha)_n (r+\beta)_n}{(r+1)_{\gamma-2} (r+\gamma)_{n-\gamma+1} (r+\gamma)_n} a_0, & n \geq \gamma - 1. \end{cases} \tag{4.46}$$

De maneira semelhante ao cenário anterior, utilizando (4.46) observamos que:

$$A_m(r_2) = A_{\gamma-1}(1-\gamma) = \frac{(\alpha+1-\gamma)_{\gamma-1} (\beta+1-\gamma)_{\gamma-1}}{(\gamma-1)! (2-\gamma)_{\gamma-2}} a_0, \tag{4.47}$$

se $0 \leq n < \gamma - 1$, então:

$$\frac{dA_n}{dr}(r_2) = \frac{dA_n}{dr}(1-\gamma) = \frac{a_0}{n!} \frac{(\alpha+1-\gamma)_n (\beta+1-\gamma)_n}{(2-\gamma)_n} \tag{4.48}$$

e para $n \geq \gamma - 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dr}(r) = A_n(r) \Bigg[& \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r+\alpha+j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r+\beta+j} \\ & - \sum_{j=0}^{\gamma-3} \frac{1}{r+1+j} - \sum_{j=0}^{n-\gamma} \frac{1}{r+\gamma+j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r+\gamma+j} \Bigg], \end{aligned}$$

a que implica:

$$\frac{dA_n}{dr}(1-\gamma) = a_0 \frac{(\alpha+1-\gamma)_n(\beta+1-\gamma)_n}{n!(n-\gamma+1)!(2-\gamma)_{\gamma-2}} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha+1-\gamma+j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\beta+1-\gamma+j} + H_{\gamma-2} - H_{n-\gamma} - H_n \right]. \quad (4.49)$$

Portanto, juntando (4.47), (4.48) e (4.49) na equação (2.17), considerando $a_0 = 1$ temos:

$$\begin{aligned} y_2(x) =& \frac{(\alpha+1-\gamma)_{\gamma-1}(\beta+1-\gamma)_{\gamma-1}}{(\gamma-1)!(2-\gamma)_{\gamma-2}} \ln|x| \, {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) \\ &+ |x|^{\gamma-1} \sum_{n=1}^{\gamma-2} \frac{(\alpha+1-\gamma)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(2-\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &+ \frac{|x|^{\gamma-1}}{(2-\gamma)_{\gamma-2}} \sum_{n=\gamma-1}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(n-\gamma+1)!} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha+1-\gamma+j} \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\beta+1-\gamma+j} + H_{\gamma-2} - H_{n-\gamma} - H_n \right\} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Observação 4.1. Se em (4.39) e (4.45) considerarmos uma manipulação diferente para A_0, então podemos encontrar soluções diferentes. Para encontrar soluções diferentes pode ver [1, §15.5].

5 Soluções em torno de $x_0 = 1$

Pela Observação 2.3, para encontrar as soluções da EDO (3.18) em torno de $x_0 = 1$ basta encontrar as soluções da seguinte EDO em torno de $t_0 = 0$:

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \big[\alpha+\beta-\gamma+1-(1+\alpha+\beta)t\big]\frac{dy}{dt}(t) - \alpha\beta y(t) = 0\,, \quad (5.50)$$

a qual segue da EDO (3.18) depois de aplicar a mudança de variáveis $t = 1-x$.

Observe que a EDO (5.50) é uma equação hipergeométrica com parâmetros α, β e $\hat{\gamma} := \alpha+\beta-\gamma+1$ e para encontrar suas soluções em torno de $t_0 = 0$ basta usar os resultados obtidos em Seção 4. Como os expoentes da singularidade $t_0 = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 1-\hat{\gamma} = \gamma-\alpha-\beta$, os quais coincidem com os encontrados no final de Seção 3 para $x_0 = 1$, dependendo se $\hat{\gamma} \notin \mathbb{Z}, \hat{\gamma} = 1$ ou $\hat{\gamma} \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$ utilizamos respectivamente as soluções obtidas nas Subseções 4.1, 4.2 ou 4.3 para encontrar as mesmas em torno de $t_0 = 0$. Depois, desfazemos a mudança $t = 1-x$ e assim encontramos as soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da EDO (3.18) em torno de $x_0 = 1$. Por exemplo, se $\hat{\gamma} \notin \mathbb{Z}$, então pelas (4.34) e (4.35) temos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - x), \\ y_2(x) &= |1 - x|^{\gamma - \alpha - \beta} \, {}_2F_1(\gamma - \beta, \gamma - \alpha; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x) \,. \end{aligned}$$

Note que pelo Teorema 2.1 as soluções neste caso vão ser analíticas em $0 < |x - 1| < 1$.

6 soluções em torno de $x_0 = \infty$

Como apresentado anteriormente na Seção 3 para trabalharmos com o ponto singular regular $x_0 = \infty$ fazemos a mudança de variável $w = x^{-1}$ na EDO (3.18) e estudamos as soluções da EDO (3.23) obtida em torno de $w_0 = 0$. Na mesma seção vemos que os expoentes da singularidade nesse caso são $r_1 = \alpha$ e $r_2 = \beta$. Para encontrar as soluções utilizando o método de Frobenius em torno de $w_0 = 0$ supomos que uma solução assume a forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n+r} \text{ , com } a_0 \neq 0, \tag{6.51}$$

onde r é um expoente e a_n's são constantes. Depois de substituir essa solução na EDO (3.23) e simplificar, observamos que (6.51) é uma solução da EDO se a seguinte relação é satisfeita:

$$\begin{aligned} a_0(\alpha - r)(r - \beta)w^r + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ &\big[(n + r - 1)(n + r - 2) + (2 - \gamma)(n + r - 1)\big] a_{n-1} \\ &+ \big[- (n + r)(n + r - 1) + (\alpha + \beta - 1)(n + r) - \alpha\beta\big] a_n \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $(\alpha - r)(r - \beta) = 0$ é a equação indicial e é verdadeira para o expoente r (note que supomos $a_0 \neq 0$). Portanto, para que a equação acima seja verdadeira precisamos que para todos $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\big[(n + r - 1)(n + r - 2) + (2 - \gamma)(n + r - 1)\big] a_{n-1} \\ &\qquad - \big[(n + r)(n + r - 1) - (\alpha + \beta - 1)(n + r) - \alpha\beta\big] a_n = 0 \,. \end{aligned}$$

De qual concluimos a seguinte relação recorrência:

$$a_n = \frac{(n+r-1)(n+r-\gamma)}{(n+r-\alpha)(n+r-\beta)} a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1\,, \tag{6.52}$$

desde que o denominador seja não nulo.

Então, análogo ao que vimos para encontrar (4.30), podemos observar que (6.51) é uma solução da EDO (3.23) se:

$$a_n = \frac{(r)_n (r+1-\gamma)_n}{(r+1-\alpha)_n (r+1-\beta)_n} a_0, \quad \forall n \geq 0, \tag{6.53}$$

onde $a_0 \neq 0$ é uma constante e consideramos o denominador não nulo.

Assim, a solução (6.51) assume a forma

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r)_n (r+1-\gamma)_n}{(r+1-\alpha)_n (r+1-\beta)_n} w^{n+r}. \tag{6.54}$$

Utilizando o Teorema 2.1, nas seguintes subseções encontramos as soluções linearmente independentes $y_1(w)$ e $y_2(w)$ da EDO (3.23) para os casos diferentes da diferença entre os expoentes $r_1 - r_2 = \alpha - \beta$ em torno de $w_0 = 0$. A partir Disso, para encontrar as soluções linearmente independentes da EDO (3.18) em torno de $x_0 = \infty$ basta desfazer a mudança $w = x^{-1}$ nas soluções $y_1(w)$ e $y_2(w)$. Note que pelo Teorema 2.1 as soluções neste caso vão ser analíticas em $0 < |w| < 1$, ou seja em $|x| > 1$.

6.1 Caso $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, como para qualquer $n \geq 1$ o denominador de a_n dado por (6.53) é não nulo, a partir do Teorema 2.1 item 1 e da relação (6.54), encontramos $y_1(w)$ e $y_2(w)$ da seguinte forma:

$$y_1(w) = |w|^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\alpha+1-\gamma)_n}{(1)_n (\alpha+1-\beta)_n} w^n = |w|^{\alpha}\, {}_2F_1(\alpha, \alpha+1-\gamma; \alpha+1-\beta; w), \tag{6.55}$$

$$y_2(w) = |w|^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\beta+1-\gamma)_n}{(\beta+1-\alpha)_n (1)_n} w^n = |w|^{\beta}\, {}_2F_1(\beta, \beta+1-\gamma; \beta+1-\alpha; w), \tag{6.56}$$

onde consideramos $a_0 = 1$. Se desfeita a mudança $w = x^{-1}$, então:

$$y_1(x) = |x|^{-\alpha}\, {}_2F_1(\alpha, \alpha+1-\gamma; \alpha+1-\beta; \frac{1}{x}),$$
$$y_2(x) = |x|^{-\beta}\, {}_2F_1(\beta, \beta+1-\gamma; \beta+1-\alpha; \frac{1}{x}).$$

6.2 Caso $\alpha - \beta = 0$

Pelo Teorema 2.1 a primeira solução coincide com (6.55), ou seja:

$$y_1(w) = |w|^\alpha \,{}_2F_1(\alpha, \alpha + 1 - \gamma; 1; w).$$

Como $r_1 = r_2$, para encontrar a segunda solução utilizamos o item 2 do Teorema 2.1. Para este fim, pela Observação 2.1, precisamos calcular $\frac{da_n}{dr}(r)$, onde a_n, pela (6.53), toma a seguinte forma:

$$a_n = \frac{(r)_n(r + 1 - \gamma)_n}{(r + 1 - \alpha)_n^2}. \tag{6.57}$$

De maneira semelhante à feita na subseção 4.2 encontramos:

$$\frac{da_n}{dr}(r) = \frac{(r)_n(r + 1 - \gamma)_n}{(r + 1 - \alpha)_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r + k} + \frac{1}{r + 1 - \gamma + k} - \frac{2}{r + 1 - \alpha + k} \right).$$

Portanto, supondo $a_0 = 1$, pela (2.12) obtemos:

$$y_2(w) = |w|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\alpha + 1 - \gamma)_n}{(n!)^2} \Bigg\{ \ln|w| + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha + k} + \frac{1}{\alpha + 1 - \gamma + k} \right) - 2H_n \Bigg\} w^n.$$

6.3 Caso $\alpha - \beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Neste caso temos $\alpha - \beta > 0$ ou $\alpha - \beta < 0$ que estudamos a seguir.

1) $\boldsymbol{\alpha - \beta > 0}$. Neste item $\alpha > \beta$, logo temos $r_1 = \alpha$ e $r_2 = \beta$. Pelo Teorema 2.1 a primeira solução é da seguinte forma:

$$y_1(w) = |w|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\alpha + 1 - \gamma)_n}{(1)_n(\alpha + 1 - \beta)_n} w^n = |w|^\alpha \,{}_2F_1(\alpha, \alpha + 1 - \gamma; \alpha + 1 - \beta; w).$$

Como $m := r_1 - r_2 = \alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$, para encontrar y_2 precisamos usar o item 3 de Teorema 2.1 e Observação 2.2, e vamos seguir os mesmos passos do item 1 de Subseção 4.3. Dessa forma, temos:

$$\psi(w, r) = w^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r) w^n, \text{ com } A_0 = a_0(r - \beta), \tag{6.58}$$

onde a_0 é uma constante não-nula e os coeficientes A_n's satisfazem a relação recorrência (6.53) depois de substituir a_n por A_n e a_0 por $A_0 = a_0(r-\beta)$. Portanto encontramos:

$$A_n(r) = \begin{cases} \dfrac{(r)_n(r+1-\gamma)_n}{(r+1-\alpha)_n(r+1-\beta)_n}(r-\beta)a_0, & 0 \leq n < \alpha-\beta, \\ \\ \dfrac{(r)_n(r+1-\gamma)_n}{(r+1-\alpha)_{\alpha-\beta-1}(r-\beta+1)_{\beta-\alpha+n}(r+1-\beta)_n}a_0, & n \geq \alpha-\beta, \end{cases}$$

e,

$$A_m(\beta) = A_{\alpha-\beta}(\beta) = \frac{(\beta)_{\alpha-\beta}(\beta+1-\gamma)_{\alpha-\beta}}{(\beta+1-\alpha)_{\alpha-\beta-1}(\alpha-\beta)!}a_0. \tag{6.59}$$

Análogamente ao visto na Subseção 4.3, podemos observar que se $0 \leq n < \alpha-\beta$, então:

$$\frac{dA_n}{dr}(\beta) = \frac{(\beta)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(\beta+1-\alpha)_n}\frac{a_0}{n!}, \tag{6.60}$$

e caso $n \geq \alpha-\beta$, então:

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dr}(\beta) = a_0\frac{(\beta)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(\beta+1-\alpha)_{\alpha-\beta-1}(\beta-\alpha+n)!n!}\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\beta+k}+\frac{1}{\beta+1-\gamma+k}\right) \\ + H_{\alpha-\beta-1} - H_{\beta-\alpha+n} - H_n\Bigg]. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Portanto, devido a (2.17), considerando $a_0 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_2(w) =& |w|^\alpha \frac{(\beta)_{\alpha-\beta}(\beta+1-\gamma)_{\alpha-\beta}}{(\beta+1-\alpha)_{\alpha-\beta-1}(\alpha-\beta)!}\ln|w|\ {}_2F_1(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta;w) \\ &+ |w|^\beta\sum_{n=0}^{\alpha-\beta-1}\frac{(\beta)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(\beta+1-\alpha)_n}\frac{w^n}{n!} \\ &+ |w|^\beta\sum_{n=\alpha-\beta}^{\infty}\frac{(\beta)_n(\beta+1-\gamma)_n}{(\beta+1-\alpha)_{\alpha-\beta-1}(\beta-\alpha+n)!}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\beta+k} \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\beta+1-\gamma+k} + H_{\alpha-\beta-1} - H_{\beta-\alpha+n} - H_n\Bigg\}\frac{w^n}{n!}. \end{aligned}$$

2) $\boldsymbol{\alpha-\beta<0}$. Como a EDO (3.23) e a relação recorrência (6.53) são simétricas em relação aos parâmetros α e β, as soluções y_1 e y_2 nesse caso são as mesmas encontradas no item 1 com diferença que devemos trocar o lugar de α e β, ou seja:

$$y_1(w) = |w|^\beta\ {}_2F_1(\beta,\beta+1-\gamma;\beta+1-\alpha;w),$$

$$
\begin{aligned}
y_2(w) =&|w|^{\beta}\frac{(\alpha)_{\beta-\alpha}(\alpha+1-\gamma)_{\beta-\alpha}}{(\alpha+1-\beta)_{\beta-\alpha-1}(\beta-\alpha)!}\ln|w|\;{}_2F_1(\beta,\beta+1-\gamma;\beta+1-\alpha;w)\\
&+|w|^{\alpha}\sum_{n=0}^{\beta-\alpha-1}\frac{(\alpha)_n(\alpha+1-\gamma)_n}{(\alpha+1-\beta)_n}\frac{w^n}{n!}\\
&+|w|^{\alpha}\sum_{n=\beta-\alpha}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+1-\gamma)_n}{(\alpha+1-\beta)_{\beta-\alpha-1}(\alpha-\beta+n)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+k}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+1-\gamma+k}+H_{\beta-\alpha-1}-H_{\alpha-\beta+n}-H_n\right\}\frac{w^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Agradecimentos

O primeiro autor contou com o apoio financeiro do Programa Institucional de Bolsas de iniciação Ciêntifica(PIBIC) da UERJ e agradece pela oportunidade de crescimento intelectual ciêntifico no âmbito acadêmico.

Referências

[1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.: **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**, 1964, National Bureau of Standard Applied Mathematics Series 55, Tenth Printing, December 1972.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.: **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno: tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[3] CODDINGTON E. A.:**An Introduction to Ordinary Differential Equations**. Dver Publications, INC. New York, 1961.

[4] EULER, L.: **Institutiones Calculi Integralis**. vol. 1 of Opera Omnia Series, 1769.

[5] GAUSS, C. F.: **Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam**, vol. 3, Werke, 1813.

[6] WALLIS, J.: **Arithmetica Infinitorum**, 1655.

[7] **Frobenius solution to the hypergeometric equation**, Wikipedia, Wikimedia Foundation, Acesso em: 06 Junho 2022, https://en.wikipedia.org/wiki/Frobenius_solution_to_the_hypergeometric_equation.