Cadernos do IME - Série Matemática
DOI: 10.12957/cadmat.2022.65257
***e-ISSN:** 2236-2797 (online)*
Recebido em 09 Fev. 2022 | Aceito em 01 Ago. 2022

AS MATRIZES GERADORAS E OS NÚMEROS HÍBRIDOS DE NARAYANA

THE GENERATING MATRICES AND THE HYBRID NUMBERS OF NARAYANA

MILENA C. DOS S. MANGUEIRA [a]
RENATA P. M. VIEIRA [b] FRANCISCO R. V. ALVES [c]
PAULA M. M. C. CATARINO [d]

Resumo

Neste trabalho serão investigadas as matrizes geradoras da sequência de Narayana de ordem 3×3 e algumas propriedades inerentes à essas matrizes. Contudo ao elevar a r-ésima potência dessas matrizes, algumas novas relações dessa sequência são estudadas, conhecendo por tanto os seus respectivos termos. Por fim, é introduzido um novo conjunto numérico, denominado de números híbridos de Narayana, estudando a sua fórmula de Binet, função geradora e matriz geradora.

Palavras-chave: Matriz geradora, números híbridos, sequência de Narayana.

Abstract

In this work, the generating matrices of the Narayana sequence of order 3×3 and some inherent properties of these matrices will be investigated. However, by raising the r-th power of these matrices, some new relations of this sequence are studied, thus knowing their respective terms. Finally, a new numerical set is introduced, called Narayana hybrid numbers, studying its Binet formula, generating function and generating matrix.

Keywords: Generating matrix, hybrid numbers, Narayana sequence.

MSC2010: 11B37, 11B39.

[a]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza-CE, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4446-155X **E-mail:** milenacarolina24@gmail.com

[b]Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1966-7097 **E-mail:** re.passosm@gmail.com

[c]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza-CE, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561 **E-mail:** fregis@ifec.edu.br

[d]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Porgutal; ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6917-5093 **E-mail:** pcatarino23@gmail.com

1 Introdução

A sequência de Narayana foi introduzida pelo matemático indiano Narayana no século 14, surgindo a partir da problemática do rebanho de vacas e bezerros, em que: uma vaca produz um bezerro a cada ano. A partir do quarto ano, cada bezerro produz um bezerro no início de cada ano. Quantos bezerros existem no total após 20 anos? [1]

Assim, a sua solução é de forma semelhante ao problema dos pares de coelhos da sequência de Fibonacci. Denominando o ano por r e N_r como um termo da sequência de Narayana, poderemos definir a sua recorrência como:

$$N_{r+3} = N_{r+2} + N_r, r \geqslant 0, \tag{1}$$

com $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$.

Assim, os primeiros termos da sequência de Narayana são descritos por: $0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28$ e também, podemos encontrar mais propriedades em torno desses números nos trabalhos [9, 10]. Quanto aos termos de índices negativos da sequência de Narayana, poderemos definir a seguinte recorrência:

$$N_{-r} = N_{3-r} - N_{2-r}, r \geqslant 1. \tag{2}$$

Sabe-se que a matriz geradora é uma importante propriedade matemática pois a partir dela é possível obter os termos de uma sequência linear e recorrente, sem necessitar conhecer os seus termos anteriores. Diante disso, neste trabalho, serão apresentados seis matrizes geradoras da sequência de Narayana e algumas propriedades inerentes à esse processo.

Por outro lado, tem-se o conjunto dos Números Híbridos apresentado por [4] onde ele estudou três sistemas numéricos juntos, sejam eles: os números complexos, hiperbólicos e duais combinados um com outro.

Definição 1.1. *Um número híbrido é definido como:*

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

E ainda, pode-se efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos, como: Dois números híbridos são iguais, se e somente se,cada um dos seus coeficientes forem iguais; a sua soma é obtida a partir da soma de cada um dos seus coeficientes, assim como sua subtração; e ainda, pode-se efetuar a multiplicação por escalar, onde o escalar será multipllicado por cada termo do número híbrido.

O produto híbrido é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e depois escrevendo os valores dos seguintes substituindo cada produto de unidades pelas igualdades $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$. Usando essas igualdades, podemos encontrar o produto de quaisquer duas unidades híbridas. Assim, pode-se apresentar a tabela da multiplicação de um número híbrido, como mostra a tabela 1.

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$1+h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Tabela 1: Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$.

A operação de multiplicação nos números híbridos não é comutativa, mas tem a propriedade de associatividade e o conjunto $\mathbb{K}$ dos números híbridos forma um anel não comutativo em relação à multiplicação. E ainda, temos o conjugado de um número híbrido $z = a+bi+c\varepsilon+dh$, denotado por $\overline{z}$, é definido como $\overline{z} = a-bi-c\varepsilon-dh$ e o número real $C(z) = z\overline{z} = \overline{z}z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$ é chamado de caráter do número híbrido, onde a raiz desse número real será a norma do número híbrido z, assim temos que: $\|z\| = \sqrt{|\ C(z)\ |}$.

Nas seções seguintes serão estudadas as seis matrizes geradoras dessa sequência, algumas propriedades e o seu processo de hibridização, baseados nos trabalhos de [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

2 As matrizes geradoras da Sequência de Narayana

Com base na recorrência da sequência de Narayana, podemos investigar a existência de outras matrizes geradoras, além da encontrada no trabalho de [5]. Onde, substituindo o valor de $k = 1$, temos a matriz geradora do teorema abaixo.

Teorema 2.1. *Para* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *tem-se que:* $Q^r = \begin{bmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{bmatrix}$, $r \geqslant 3$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, temos que:

Para $r = 3$, temos:

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_4 & N_2 & N_3 \\ N_3 & N_1 & N_2 \\ N_2 & N_0 & N_1 \end{bmatrix}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $r = k, k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$Q^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{bmatrix}$$

Agora, verificando que seja válido para $r = k + 1$, temos:

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k Q \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_{k+1} + N_{k-1} & N_k & N_{k+1} \\ N_k + N_{k-2} & N_{k-1} & N_k \\ N_{k-1} + N_{k-3} & N_{k-2} & N_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{k+2} & N_k & N_{k+1} \\ N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. *A matriz geradora da sequência de Narayana é dada por:*
Para $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *tem-se que:* $Q^r = \begin{bmatrix} N_{r+1} & N_r & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-2} & N_{r-3} \\ N_r & N_{r-1} & N_{r-2} \end{bmatrix}$, $r \geqslant 3$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, é validado este teorema.

□

Teorema 2.3. *Para* $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *tem-se que:* $Q^r = \begin{bmatrix} N_{r-2} & N_{r-1} & N_r \\ N_{r-3} & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_r & N_{r+1} \end{bmatrix}$, $r \geqslant 3$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, é provada a validade do teorema. $\square$

Teorema 2.4. *Para* $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*, tem-se que:* $Q^r = \begin{bmatrix} N_{r-2} & N_{r-1} & N_{r-3} \\ N_r & N_{r+1} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_r & N_{r-2} \end{bmatrix}$, $r \geqslant 3$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, é provada a validade deste teorema. $\square$

Teorema 2.5. *Para* $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, tem-se que:* $Q^r = \begin{bmatrix} N_{r-2} & N_{r-3} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-2} & N_r \\ N_r & N_{r-1} & N_{r+1} \end{bmatrix}$, $r \geqslant 3$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, é provada a validade deste teorema. $\square$

Teorema 2.6. *Para* $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, tem-se que:* $Q^r = \begin{bmatrix} N_{r-2} & N_r & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r+1} & N_r \\ N_{r-3} & N_{r-1} & N_{r-2} \end{bmatrix}$, $r \geqslant 3$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração anterior, é provada a validade deste teorema. $\square$

3 Algumas propriedades inerentes às matrizes geradoras

Fundamentado no trabalho de [6], podemos estabelecer algumas propriedades referentes às matrizes encontradas na seção anterior.

Propriedade 3.1. *Para qualquer inteiro* m, r, *com* $0 < m < r$, *temos:*

$$N_r = N_{m+1}N_{r-m} + N_{m-1}N_{r-m-1} + N_m N_{r-m-2}, \tag{3}$$

$$N_r = N_m N_{r-m+1} + N_{m-2}N_{r-m} + N_{m-1}N_{r-m-1} \tag{4}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.1 e algumas propriedades para expoente de matriz quadrada, temos:

$$Q^r = Q^m Q^{r-m}$$

$$\begin{bmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{m+1} & N_{m-1} & N_m \\ N_m & N_{m-2} & N_{m-1} \\ N_{m-1} & N_{m-3} & N_{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{r-m+1} & N_{r-m-1} & N_{r-m} \\ N_{r-m} & N_{r-m-2} & N_{r-m-1} \\ N_{r-m-1} & N_{r-m-3} & N_{r-m-2} \end{bmatrix}$$

Considerando os elementos à esquerda e à direita, temos:

$$N_r = N_{m+1}N_{r-m} + N_{m-1}N_{r-m-1} + N_m N_{r-m-2},$$
$$N_r = N_m N_{r-m+1} + N_{m-2}N_{r-m} + N_{m-1}N_{r-m-1}$$

Observação. Na equação (3), se $m = 3$, temos:

$$N_r = N_2 N_{r-1} + N_0 N_{r-2} + N_1 N_{r-3}$$
$$N_r = 1N_{r-1} + 0N_{r-2} + 1N_{r-3}$$
$$N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$$

□

Propriedade 3.2. *Para quaisquer inteiros* m, r, *com* $0 < m < r$, *temos:*

$$N_r = N_{m+1}N_{r-m} + N_m N_{r-m-2} + N_{m-1}N_{r-m-1}, \tag{5}$$
$$N_r = N_m N_{r-m+1} + N_{m-1}N_{r-m-1} + N_{m-2}N_{r-m} \tag{6}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.2 e algumas propriedades para expoente de matriz quadrada, podemos demonstrar esta propriedade. □

Propriedade 3.3. *Para quaisquer inteiros* m, r, *com* $0 < m < r$, *temos:*

$$N_r = N_{m-2}N_{r-m} + N_{m-1}N_{r-m-1} + N_m N_{r-m+1}, \tag{7}$$
$$N_r = N_{m-1}N_{r-m-1} + N_m N_{r-m-2} + N_{m+1}N_{r-m} \tag{8}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.3 e algumas propriedades para expoente de matriz quadrada, podemos demonstrar esta propriedade. □

Propriedade 3.4. *Para quaisquer inteiros m, r, com $0 < m < r$, temos:*

$$N_r = N_m N_{r-m-2} + N_{m+1} N_{r-m} + N_{m-1} N_{r-m-1}, \tag{9}$$

$$N_r = N_{m-1} N_{r-m-1} + N_m N_{r-m+1} + N_{m-2} N_{r-m} \tag{10}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.4 e algumas propriedades para expoente de matriz quadrada, podemos demonstrar esta propriedade. □

Propriedade 3.5. *Para quaisquer inteiros m, r, com $0 < m < r$, temos:*

$$N_r = N_{m-1} N_{r-m-1} + N_{m-2} N_{r-m} + N_m N_{r-m+1}, \tag{11}$$

$$N_r = N_m N_{r-m-2} + N_{m-1} N_{r-m-1} + N_{m+1} N_{r-m} \tag{12}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.5 e algumas propriedades para expoente de matriz quadrada, podemos demonstrar esta propriedade. □

Propriedade 3.6. *Para quaisquer inteiros m, r, com $0 < m < r$, temos:*

$$N_r = N_{m-2} N_{r-m} + N_m N_{r-m+1} + N_{m-1} N_{r-m-1}, \tag{13}$$

$$N_r = N_{m-1} N_{r-m-1} + N_{m+1} N_{r-m} + N_m N_{r-m-2} \tag{14}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.6 e algumas propriedades para expoente de matriz quadrada, podemos demonstrar esta propriedade. □

Na próxima seção será introduzido um novo conjunto numérico dos números híbridos da sequência de Narayana.

4 Os números híbridos de Narayana

Após definir os números híbridos de Narayana será apresentado alguns resultados obtidos a partir dessa definição.

Definição 4.1. *O número híbrido de Narayana, denominado por HN_r é definido como:*

$$HN_r = N_r + N_{r+1} i + N_{r+2} \varepsilon + N_{r+3} h.$$

Com as seguintes condições iniciais: $HN_0 = i + \varepsilon + h$ e $HN_1 = 1 + i + \varepsilon + 2h$ e $HN_2 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$.

Definição 4.2. *Similar a definição da Sequência Híbrida de Narayana, pode-se obter a recorrência para os termos negativos desta sequência, com* $r \geqslant 1$ *e* $r \in \mathbb{N}$*, tem-se:*

$$HN_{-r} = HN_{3-r} - HN_{2-r}$$

Com essa definição podemos concluir que $HN_{-r} = N_{-r} + N_{-r+1}i + N_{-r+2}\varepsilon + N_{-r+3}h$. Assim é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo da sequência híbrida de Narayana. Em particular obtemos $HN_{-1} = i - h, HN_{-2} = 1 - \varepsilon + h$ e $HN_{-3} = -i + \varepsilon + h$.

Lema 4.3. *A sequência de números híbridos* HN_r *satisfaz a relação de recorrência*

$$HN_r = HN_{r-1} + HN_{r-3}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
HN_{r-1} + HN_{r-3} &= (N_{r-1} + N_r i + N_{r+1}\varepsilon + N_{r+2}h) + (N_{r-3} + N_{r-2}i + N_{r-1}\varepsilon + N_r h) \\
&= (N_{r-1} + N_{r-3}) + (N_r + N_{r-2})i + (N_{r+1} + N_{r-1})\varepsilon + \\
&(N_{r+2} + N_r)h \\
&= N_r + N_{r+1}i + N_{r+2}\varepsilon + N_{r+3}h \\
&= HN_r
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4. *A matriz geradora híbrida de Narayana, para* $r \geqslant 3$*, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HN_{r+1} & HN_r & HN_{r-1} \\ HN_{r-1} & HN_{r-2} & HN_{r-3} \\ HN_r & HN_{r-1} & HN_{r-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução infinita, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} HN_1 + HN_{-1} & HN_1 & HN_0 \\ HN_{-1} + HN_{-3} & HN_{-1} & HN_{-2} \\ HN_0 + HN_{-2} & HN_0 & HN_{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} HN_2 & HN_1 & HN_0 \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \\ HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Supondo que seja válido para $r = k, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} HN_{k+1} & HN_k & HN_{k-1} \\ HN_{k-1} & HN_{k-2} & HN_{k-3} \\ HN_k & HN_{k-1} & HN_{k-2} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, demonstra-se que é válido para $r = k+1, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HN_{k+1} & HN_k & HN_{k-1} \\ HN_{k-1} & HN_{k-2} & HN_{k-3} \\ HN_k & HN_{k-1} & HN_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HN_{k+1} + HN_{k-1} & HN_{k+1} & HN_k \\ HN_{k-1} + HN_{k-3} & HN_{k-1} & HN_{k-2} \\ HN_k + HN_{k-2} & HN_k & HN_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HN_{k+2} & HN_{k+1} & HN_k \\ HN_k & HN_{k-1} & HN_{k-2} \\ HN_{k+1} & HN_k & HN_{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Pode-se obter algumas informações sobre os números híbridos de Narayana a partir da relação de recorrência, $HN_r = HN_{r-1} + HN_{r-3}$, podemos agora apresentar sua equação característica $x^3 - x^2 - 1 = 0$ a qual é uma equação de terceiro grau possuindo três raízes, uma solução real e duas complexas, sejam elas: $x_1 = 1.46557123187677$, $x_2 = -0.23278561593838 + 0.79255199251545i$ e $x_3 = -0.23278561593838 - 0.79255199251545i$.

Temos que o caráter do número híbrido de Narayana é dada como $C(HN_r) = N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - N_{r+3}^2$, e ainda, pode-se apresentar a norma de um número híbrido de Narayana.

Definição 4.5. *A norma de um número híbrido de Narayana é definido como:*

$$\|HN_r\|^2 = \mid N_{r+1}^2 - 2N_{r+2}(N_{r+1} + N_r) - N_{r+2}^2 \mid .$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|HN_r\| &= \sqrt{\mid C(HN_r) \mid}, \\
\|HN_r\|^2 &= \mid N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - N_{r+3}^2 \mid \\
&= \mid N_r^2 + N_{r+1}^2 - 2N_{r+1}N_{r+2} - N_{r+2}^2 - 2N_{r+2}N_r - N_r^2 \mid \\
&= \mid N_{r+1}^2 - 2N_{r+2}(N_{r+1} + N_r) - N_{r+2}^2 \mid
\end{aligned}$$

□

Além disso, o número híbrido de Narayana pode ser representado de forma matricial como uma matriz 2×2.

Definição 4.6. *Uma matriz do número híbrido de Narayana, com $r \in \mathbb{N}$, é definida como:*

$$\varphi_{HN_r} = \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_r + N_{r+1} \\ N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix}.$$

De fato, podemos observar:

$$\begin{aligned}
\varphi_{HN_r} &= N_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + N_{r+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + N_{r+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + N_{r+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_{r+1} - N_{r+2} + N_{r+3} \\ N_{r+2} - N_{r+1} + N_{r+3} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_{r+1} - N_{r+2} + N_{r+2} + N_r \\ N_{r+2} - N_{r+1} + N_{r+2} + N_r & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_r + N_{r+1} \\ N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

E ainda, temos a seguinte propriedade que relaciona o determinante de uma matriz com a sua norma.

Propriedade 4.7. *Se φ_{HN_r} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Narayana, HN_r, então $\|HN_r\|^2 = det(\varphi_{HN_r})$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
det(\varphi_{HN_r}) &= det\begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_r + N_{r+1} \\ N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix} \\
&= |\,(N_r + N_{r+2})\,(N_r - N_{r+2}) - (N_r + N_{r+1})\,(N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2})\,| \\
&= |\,N_r^2 - N_{r+2}^2 - (N_r^2 - N_rN_{r+1} + 2N_rN_{r+2} + N_rN_{r+1} - N_{r+1}^2 + 2N_{r+1}N_{r+2})\,| \\
&= |\,N_{r+1}^2 - 2N_{r+2}(N_{r+1} + N_r) - N_{r+2}^2\,| \\
&= \|HN_r\|^2
\end{aligned}$$

□

A seguir, daremos a função geradora de HN_r e sua fórmula de Binet.

Teorema 4.8. *A função geradora do número híbrido generalizado de Narayana, denotado por $G_{HN_r}(x)$, é:*

$$G_{HN_r}(x) = \frac{HN_0 + (HN_1 - HN_0)x + (HN_2 - HN_1)x^2}{1 - x - x^3}$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido Narayana, denotado por $G_{HN_r}(x)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HN_r}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} HN_r x^r,$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
G_{HN_r}(x) &= HN_0 + HN_1x + HN_2x^2 + HN_3x^3 + HN_4x^4 + ..., \\
xG_{HN_r}(x) &= HN_0x + HN_1x^2 + HN_2x^3 + HN_3x^4 + HN_4x^5 + ..., \\
x^3G_{HN_r}(x) &= HN_0x^3 + HN_1x^4 + HN_2x^5 + HN_3x^6 + HN_4x^7 + ...
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
(1 - x - x^3)G_{HN_r}(x) = HN_0 + (HN_1 - HN_0)x + (HN_2 - HN_1)x^2 + \\
(HN_3 - HN_2 - HN_0)x^3 + ...,
\end{aligned}$$

a qual implica

$$G_{HN_r}(x) = \frac{HN_0 + (HN_1 - HN_0)x + (HN_2 - HN_1)x^2}{1 - x - x^3}$$

□

Assim, temos a função geradora para as sequências híbridas de Narayana.

Agora iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do n-ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência, utilizando a fórmula de Binet, a qual é necessário utilizar as raízes da equação característica desta sequência.

Teorema 4.9. *Para $r \geq 0$ temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Narayana é dado como:*

$$HN_r = A(x_1)^r + B(x_2)^r + C(x_3)^r$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação característica da sequência híbrida de Narayana e A, B e C os coeficientes iguais a:

$$A = \frac{HN_2 - HN_1x_2 - HN_1x_3 + HN_0x_2x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$B = \frac{HN_2 - HN_1x_1 - HN_1x_3 + HN_0x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$C = \frac{HN_2 - HN_1x_1 - HN1x_2 + HN_0x_1x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representado da seguinte maneira:

$$HN_r = A(x_1)^r + B(x_2)^r + C(x_3)^r$$

Para $r = 0$, tem-se: $A + B + C = HN_0$, para $r = 1$, temos $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = HN_1$ e para $r = 2$, temos $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = HN_2$.

Podemos construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A + B + C = HN_0 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = HN_1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = HN_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram:

$$A = \frac{HN_2 - HN_1x_2 - HN_1x_3 + HN_0x_2x_3}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{HN_2 - HN_1x_2 - HN_1x_3 + HN_0x_2x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$B = \frac{HN_2 - HN_1x_1 - HN_1x_3 + HN_0x_1x_3}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3} = \frac{HN_2 - HN_1x_1 - HN_1x_3 + HN_0x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$C = \frac{HN_2 - HN_1x_1 - HN_1x_2 + HN_0x_1x_2}{x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_1x_2} = \frac{HN_2 - HN_1x_1 - HN_1x_2 + HN_0x_1x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

□

5 Conclusão

Com base nos resultados dos teoremas e propriedades discutidos nessa pesquisa, podemos então concluir a existência de seis matrizes geradoras da sequência de Narayana, possuindo determinadas propriedades características de acordo com cada uma delas.

Investigamos e introduzimos ainda o processo de hibridização dessa sequência, com base no trabalho de [4], obtendo a fórmula de Binet, uma das seis matrizes geradora e função geradora dessa sequência. Vale salientar que as outras cinco matrizes geradoras podem ser utilizadas da mesma forma para esse novo conjunto dos números híbridos da sequência.

Para trabalhos futuros, pretende-se verificar uma aplicação dessas matrizes, bem como dos números híbridos dessa sequência para a área de física e da natureza.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

Referências

[1] ALLOUCHE, J. P.; JOHNSON, T.: **Narayana's cows and delayed morphisms**. Journées d'Informatique Musicale, 1996.

[2] CATARINO, P. M.: **On k-Pell hybrid numbers**. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 22(1): 83-89, 2019.

[3] CERDA-MORALES, G.: **Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties**. arXiv:180602231, 2018.

[4] ÖZDEMIR, M.: **Introduction to hybrid numbers**. Advances in Applied Clifford Algebras, 28(1):1-32, 2018.

[5] RAMÍREZ, J. L.; SIRVENT, V. F: **A note on the k-Narayana sequence**. Ann Math Inform, 45:91-105, 2015.

[6] SEENUKUL, P.: **Matrices which have similar properties to Padovan-matrix and its generalized relations**. Journal of Science and Technology, 7(2):90-94, 2015.

[7] SZYNAL-LIANA, A.: **The Horadam hybrid numbers**. Discussiones Mathematicae: General Algebra & Applications, 38(1), 2018.

[8] SZYNAL-LIANA, A; WLOCH, I.: **On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas hybrid numbers**. Annales Mathematicae Silesianae, 33:276-283, 2019.

[9] VIEIRA, R; ALVES, F.; CATARINO P.: **A generalização dos octónios de Narayana**. Cadernos do IME-Série Matemática, 17:133-143, 2021.

[10] VIEIRA, R; ALVES, F.; CATARINO P.: **A sequência (s,t)-Narayana**. Cadernos do IME-Série Matemática, 17:125-132, 2021.