Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2021.63013
Recebido em 15 Out. 2021 | Aceito em 08 Dez. 2021

CLASSE EQUIVARIANTE DE CHERN-SCHWARTZ-MACPHERSON

EQUIVARIANT CHERN-SCHWARTZ-MACPHERSON CLASS

AMANDA MONTEIRO[a]
NIVALDO DE GÓES GRULHA JÚNIOR[b]

Resumo

Para uma variedade algébrica complexa singular existem várias definições de classes características possíveis. A classe de Chern-Schwartz-MacPherson é uma delas. R. MacPherson construiu a classe provando a existência de uma única transformação natural do grupo abeliano das funções construtíveis sobre X para o grupo de homologia tal que, se X é não-singular, então $C_*(1_X)$ coincide com a classe de Chern usual. Independentemente, M.-H. Schwartz introduziu classes de obstrução para a extensão de campos vetoriais radiais sobre X, e foi mostrado que essas definições são equivalentes, a partir de então esta classe tem sido chamada de classe de Chern-Schwartz-MacPherson.

Neste estudo, apresentamos uma G-versão da classe de Chern-Schwartz-MacPherson para as G-variedades algébricas.

Palavras-chave: Variedade Singular, Classes Características, Teoria Equivariante.

Abstract

For a singular complex algebraic variety there are several possible characteristic class definitions. The Chern-Schwartz-MacPherson class is one of them. R. MacPherson constructed the class by proving the existence of a unique natural transformation from the abelian group of constructible functions over X to the homology group so that if X is nonsingular, then $C_*(1_X)$ coincide the usual Chern class. Independently, M.-H. Schwartz had introduced obstruction classes for the extension of stratified radial vector frames over X, and it was shown that these definitions are equivalent, henceforth this class has been called the Chern-Schwartz-MacPherson class.

In this study, we present a G-version of the Chern-Schwartz-MacPherson class for the algebraic G-varieties.

Keywords: Singular Variety, Characteristic Classes, Equivariant Theory.

MSC2010: 14C17

[a]Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil; ORCID: 0000-0003-1747-8708 **E-mail:** ammonteiro@usp.br

[b]Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil; ORCID: 0000-0003-4977-9070 **E-mail:** njunior@icmc.usp.br

1 Introdução

Para uma variedade algébrica complexa singular existem várias definições de classes características possíveis. Tais definições neste contexto dependem da busca por substitutos para o fibrado tangente.

A classe de Chern-Schwartz-MacPherson é um exemplo destas classes. R. MacPherson construiu a classe para resolver a chamada conjectura de Grothendieck-Deligne: Na verdade, ele provou a existência de uma única transformação natural $C_* : \mathcal{F}(X) \to H_{2*}(X;\mathbb{Z})$ do grupo abeliano $\mathcal{F}(X)$ das funções construtíveis sobre X para o grupo de homologia (de dimensão par) tal que, se X é não-singular, então $C_*(1_X) = c(TX) \frown [X]$, onde 1_X é a função característica, $1_X(x) = 1$ para $x \in X$. De forma independente, M. H. Schwartz introduziu, em [7], classes de obstrução para a extensão de campos vetoriais radiais sobre X. Em [1] é mostrado que essas classes são as mesmas, via o isomorfismo de Alexander, a partir de então esta classe tem sido chamada de classe de Chern-Schwartz-MacPherson e é denotada frequentemente por $C^{SM}(X)$.

O objetivo destas notas é introduzir o leitor à G-versão da classe de Chern-Schwartz-MacPherson para G-variedades algébricas X, apresentado em [5], detalhando os principais passos da construção formal da versão equivariante de C_*.

Para isso discutimos no contexto complexo, como em [4], usamos a cohomologia singular e a homologia de Borel-Moore, simplesmente denotada por $H_*(X)$, do espaço analítico (ou seja, localmente anelado) $(X, \mathcal{O}_X)$. Para nós, um esquema será sempre considerado separado, do tipo finito sobre um corpo K de característica 0, e uma variedade será um esquema integral.

Além da construção da G-versão da classe de Chern-Schwartz-MacPherson, também vamos abordar a teoria de polinômios de Thom nesta versão equivariante.

Para o desenvolvimento destas notas foram necessárias algumas ferramentas preliminares da Geometria Algébrica, de fibrados e de ações de grupos. Ao leitor interessado sugerimos consultar [3] e [2].

2 Grupos Algébricos

Nestas notas vamos considerar uma variedade sobre K como sendo um K-esquema integral, do tipo finito e separado.

Definição 2.1. *Um* ***grupo algébrico*** *G (ou K-grupo) é definido como uma variedade sobre K munida da topologia de Zariski, com uma estrutura de grupo tal que* *as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são morfismos de variedades.

Neste contexo, um **homomorfismo de grupos algébricos** $\alpha : G \to G'$ é um morfismo de variedades sobre K que também é homomorfismo de grupos. E um grupo algébrico G é dito **linear** se a variedade algébrica G é afim, ou seja, G é um K-esquema afim.

Um exemplo clássico de grupo algébrico linear é qualquer subgrupo de GL_n fechado com a topologia de Zariski (ver [8, p. 23]). Assim, dado um espaço vetorial V de dimensão finita, podemos definir o grupo algébrico linear $GL(V) = GL_{dimV}$.

Definição 2.2. *Sejam G um grupo algébrico e X uma variedade sobre K. Dizemos que X é uma G-**variedade** (ou G-espaço), se existe uma ação de G em X que é um morfismo de variedades. Mais precisamente, se existe um morfismo de variedades*

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & G \times X & \to & X \\ & (g,x) & \mapsto & gx \end{array},$$

tal que $1_G x = x$ e $g(hx) = (gh)x$.

Dadas X e Y G-variedades. Dizemos que um morfismo de G-variedades $\phi : X \to Y$ é um G-**morfismo** (ou morfismo G-equivariante) se $\phi(gx) = g\phi(x)$, $\forall\, g \in G, x \in X$.

Definição 2.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma **representação racional de** G **em** V é um homomorfismo de grupos algébricos $r : G \to GL(V)$.*

Mais geralmente, iremos nos referir ao espaço vetorial n-dimensional V, da definição anterior, como uma representação n-dimensional de G.

3 Fibrados principais e associados

Definição 3.1. *Seja ξ uma quíntupla (E, B, π, F, G) composta de:*

1. *um espaço topológico E, chamado **espaço total**;*

2. *um espaço topológico B, chamado **espaço base**;*

3. *uma aplicação contínua $\pi : E \to B$, chamada **projeção**;*

4. *um espaço topológico F chamado **fibra típica**;*

5. *um grupo topológico G chamado **grupo estrutural**, com uma ação (à esquerda) livre*

$$\begin{array}{ccc} G \times F & \to & F \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array},$$

   de G na fibra típica F.

*Dizemos que ξ é um **fibrado com grupo estrutural** se satisfaz a condição de **trivialidade local**: existem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de B e uma família $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de homeomorfismos*

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha),$$

*com $\pi \circ \phi_\alpha = pr_1$ para todo $\alpha \in A$ (onde pr_1 é a projeção na primeira coordenada), chamadas **trivializações locais**, tais que se a função $\phi_{\alpha,b} : F \to \pi^{-1}(b)$ é definida por*

$$\phi_{\alpha,b}(y) = (b, y)$$

então para cada $\alpha, \beta \in A$ e cada $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ o homeomorfismo

$$\phi_{\alpha,b}^{-1} \circ \phi_{\beta,b} : F \to F$$

coincide com a operação de um elemento do grupo G. E, ainda, para cada $\alpha, \beta \in A$ a função

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

definida por $g_{\alpha\beta}(b) = \phi_{\alpha,b}^{-1} \circ \phi_{\beta,b}$ é contínua.

Entre os fibrados com grupo estrutural, existe uma classe especial, os chamados fibrados principais:

Definição 3.2. *Um fibrado $\xi = (E, B, \pi, F, G)$ é chamado **fibrado principal** (ou G-fibrado principal) se $F = G$ e G age sobre si mesmo por translação à esquerda.*

Um dos motivos para o uso do termo "fibrado principal" é o fato de que qualquer fibrado com grupo estrutural G pode ser obtido a partir de um fibrado principal com grupo estrutural G por um método direto e global: a construção do **fibrado associado** (ver mais detalhes em [9, Seção 9])).

Seja P um fibrado principal sobre um espaço topológico B com projeção $\pi : P \to B$ e grupo estrutural G, e seja Q um espaço topológico munido de uma ação de G

$$\begin{array}{rcl} G \times Q & \to & Q \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}.$$

Considere o espaço produto $P \times Q$, munida da ação de G à direita definida por

$$\begin{array}{rcl} (P \times Q) \times G & \to & P \times Q \\ ((p, q), g) & \mapsto & (p, q)g = (pg, g^{-1}q) \end{array}.$$

Denotaremos o espaço das órbitas desta ação por $P \times_G Q$, a projeção canônica de $P \times Q$ sobre $P \times_G Q$ por π_Q e a classe de equivalência, ou órbita, de um par (p, q) por $[p, q]$, assim, vale

$$[pg, g^{-1}q] = [p, q] \text{ ou } [pg, q] = [p, gq],$$

para $p \in P,\ q \in Q,\ g \in G$.

Temos, então, $pr_1 \circ \pi = \pi_Q \circ \overline{\pi}$, onde as aplicações $\overline{\pi} : P \times_G Q \to B$ e $\pi_Q : P \times Q \to P \times_G Q$ são dadas por $\overline{\pi}[p, q] = \pi(p)$ e $\pi_Q(p, q) = [p, q]$, para $p \in P,\ q \in Q$.

Nas condições anteriores, $(P \times_G Q, B, \overline{\pi}, Q, G)$ é chamado de **fibrado associado** ao fibrado principal P, mediante a ação dada de G sobre sua fibra típica Q.

No nosso caso, estaremos interessados nos G-fibrados principais que tem como espaço total, espaço base e fibra típica as G-variedades. Nesta categoria, um **morfismo entre G-fibrados principais** (P_1, B_1, π, G) e (P_2, B_2, π', G) é qualquer aplicação G-equivariante $\phi : P_1 \to P_2$.

Para qualquer morfismo de G-fibrados principais $\phi : P_1 \to P_2$, existe uma aplicação $\widetilde{\phi} : B_1 \to B_2$ tal que $\pi \circ \widetilde{\phi} = \pi' \circ \phi$. A aplicação $\widetilde{\phi} : B_1 \to B_2$ dada por $\widetilde{\phi}(b) = \pi'(\phi(p))$, onde $b = \pi(p)$, está bem definida pois, dados $p, q \in \pi^{-1}(b)$, temos que $q = pg$ para algum $g \in G$ e, assim

$$\pi'(\phi(q)) = \pi'(\phi(pg)) = \pi'(\phi(p)g) = \pi'(\phi(p)).$$

Definição 3.3. *Dizemos que o fibrado principal $\xi = (E, \pi, B, G)$ é n-**universal** se E é $(n-1)$-conexo, ou seja, $\pi_i(E) = 0$, para $0 \leqslant i < n$. Dizemos, portanto, que ξ é ∞-**universal** (ou universal) se $\pi_i(E) = 0$, $\forall i$.*

Um espaço B é um **espaço classificante** de G se B é espaço base de algum fibrado universal com grupo estrutural G. Quando nos referimos a um espaço classificante de G qualquer, usa-se como notação habitual BG para o espaço classificante e EG para o espaço total do fibrado universal.

4 Objetos na G-versão

Seja G um grupo algébrico linear redutivo de dimensão g. Tome V uma representação l-dimensional de G com um subconjunto S fechado de Zariski G-invariante tal que G age em $U := V - S$ livremente.

Observação 4.1. *É possível tomar V e S de forma que $U \to U/G$ se torne um G-fibrado principal sobre uma variedade quasi-projetiva e que a codimensão de S seja suficientemente alta (ver [10, Remark 1.4]).*

Seja $I(G)$ o conjunto de todos os abertos de Zariski $U = V - S$, onde V é uma representação de G e S é um fechado de V tais que todas as propriedades acima mencionadas são respeitadas. Agora, vamos colocar uma ordem parcial em $I(G)$:

Definição 4.2. *Sejam $U, U' \in I(G)$. Dizemos que*

$$U(= V - S) < U'(= V' - S')$$

se $codim_V\ S < codim_{V'}\ S'$ e se existe uma inclusão linear G-equivariante $i_{V,V'} : V \to V'$ que leva U em U'.

Observação 4.3. *$(I(G), <)$ é um conjunto direcionado, e portanto, podemos definir $I(G)^*$, a categoria dos índices $I(G)$.*

Todos os G-fibrados principais $U \to U/G$ com as aplicações induzidas pelas inclusões formam um sistema direto (ou indutivo)

$$\{U \to U/G, i_{V,V'}|_U\}_{U,U' \in I(G)},$$

que é a aproximação algébrica do fibrado universal $EG \to BG$. A descrição dessa aproximação, construída por B. Totaro, pode ser vista em [10].

Dado $U \in I(G)$ e uma G-variedade X, podemos construir

$$X \times_G U \to U/G,$$

o fibrado associado a $U \to U/G$ como vimos anteriormente. A grosso modo, o fibrado universal $X \times_G EG \to BG$ é aproximado por estes fibrados $X \times_G U \to U/G$, com $U \in I(G)$.

Definição 4.4. *Sejam $U, U' \in I(G)$, com $U < U'$, $\iota_{U,U'} : X \times_G U \to X \times_G U'$ a inclusão natural e $r_{U,U'} := \iota^*_{U,U'} : H^*(X \times_G U') \to H^*(X \times_G U)$ o homomorfismo induzido. Então, temos um sistema inverso (ou projetivo) $\{H^*(X \times_G U), r_{U,U'}\}_{U,U' \in I(G)}$. O i-**ésimo grupo de cohomologogia G-equivariante** de X é dado por*

$$H^i_G(X) = \varprojlim_{I(G)} H^i(X \times_G U).$$

A soma formal é denotada por $H^*_G(X) = \prod H^i_G(X) = \varprojlim H^*(X \times_G U)$. Também denotamos por $r_U : H^*_G(X) \to H^*(X \times_G U)$ a projeção canônica para U.

Seja ξ um fibrado vetorial G-equivariante $E \to X$, isto é, E e X são G-variedades e a projeção é G-equivariante de modo que a ação em E preserva as fibras linearmente. Então, ξ induz um fibrado vetorial $E \times_G U \to X \times_G U$, denotado por ξ_U.

Definição 4.5. *O limite inverso (ou projetivo) das classes de Chern $c(\xi_U)$ é a **classe G-equivariante de Chern** de ξ, que é denotada por $c^G(\xi) \in H^*_G(X)$.*

Observação 4.6. *Em particular, quando $X = \{pt\}$, um fibrado vetorial G-equivariante é $V \to \{pt\}$, sendo V uma representação de G. A classe G-equivariante de Chern é denotada por $c^G(V) \in H^*_G(\{pt\}) = H^*(BG)$ ([5, p. 5]).*

Vamos definir uma sub-ordem $<_*$ em $I(G)$:

Definição 4.7. *Dados quaisquer $U(= V - S)$ e $U'(= V' - S')$, dizemos que $U <_* U'$ se existe uma representação V_1 de G tal que $V \oplus V_1 = V'$ e $U \oplus V_1 = U'$.*

Note que se $U_1 < U_2$, então existe U' tal que $U' <_* U_1$ e $U_2 <_* U'$ (por exemplo, $U' = V_1 \oplus V_2 - S_1 \oplus S_2$).

Observação 4.8. *$(I(G), <_*)$ é um conjunto direcionado, e portanto, podemos definir $I(G)^*$ com relação a essa sub-ordem, a categoria dos índices $I(G)$.*

Seja G-variedade complexa X n-dimensional. Para cada $U = V - S$ com $dim\ V = l$ e $codim\ S = s$, definimos a homologia truncada

$$H_{trunc}(X \times_G U) := \bigoplus_{2(n-s) < i \leqslant 2n} H_{i+2(l-g)}(X \times_G U).$$

Para cada par $U, U' \in I(G)$ é possível definir um homomorfismo graduado dos grupos de homologia truncados, cujos graus são deslocados por $k = dim\ U' - dim\ U$, denotado por

$$\varphi_{U,U'} : \bigoplus_{2(n-s)<i} H_{i+2(l-g)}(X \times_G U) \to \bigoplus_{2(n-s')<i} H_{i+2(l+k-g)}(X \times_G U),$$

o que nos fornece um sistema direto (ou indutivo) com respeito ao conjunto direcionado $(I(G), <_*)$.

Definição 4.9. *O* ***i-ésimo grupo de homologia*** G***-equivariante*** *de* X *é definido como o limite indutivo*

$$H_i^G(X) = \varinjlim_{I(G)} H_{i+2(l-g)}(X \times_G U).$$

Sendo X uma G-variedade n-dimensional, estes grupos $H_i^G(X)$ são triviais para $i > 2n$ e possivelmente não trivial para qualquer i negativo.

Temos então a soma direta

$$H_*^G(X) = \oplus H_i^G(X) = \varinjlim_{I(G)} H_{trunc}(X \times_G U).$$

Para cada U a aplicação identificação é denotada por $\varphi_U : H_{trunc}(X \times_G U) \to H_*^G(X)$.

Dado $U \in I(G)$ qualquer, a classe fundamental $[X \times_G U]$ tende a um único elemento de $H_{2n}^G(X)$, denotado por $[X]_G$, chamado de **classe fundamental** G**-equivariante** de X.

Existe então um homomorfismo bem definido

$$\begin{array}{rccc} \frown [X]_G : & H_G^{2n-i}(X) & \to & H_i^G(X) \\ & a & \mapsto & \varphi_U(r_U(a) \frown [X \times_G U]) \end{array}.$$

Observação 4.10. *Se* X *é não singular, então* $\frown [X]_G$ *é isomorfismo para cada* i *chamado de* ***Dualidade de Poincaré*** G***-equivariante****. Em particular, quando* X *é um ponto,*

$$H_{-k}^G(pt) \simeq H_G^k(pt) = H^k(BG).$$

Denotamos por $Dual_G$ o inverso da aplicação $\frown [X]_G$ (para cada i). A aplicação composta $r_U \circ Dual_G \circ \varphi_U$ coincide com o Dual de Poincaré de $X \times_G U$ na homologia truncada.

Seja X uma G-variedade. O subgrupo de $\mathcal{F}(X)$ que consiste das funções construtíveis G-invariantes é denotado por

$$\mathcal{F}^G_{inv}(X) := \{\alpha \in \mathcal{F}(X) \mid \alpha(g(x)) = \alpha(x),\ x \in X,\ g \in G\}.$$

Dado qualquer $U <_* U'$ ($V' = V \oplus V_1$, $U = V - S$, $U' = V' - S'$), seja $pr_1 : V' \to V$ a projeção na primeira coordenada. Então pr_1 induz um homomorfismo pullback

$$\begin{array}{rccc} \phi_{U,U'} := (pr_1)^* : & \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V) & \to & \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V') \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \circ (id \times pr_1) \end{array}$$

(as vezes denotamos por $\phi_{V,V'}$). Dessa forma, temos um outro sistema direto:

$$\{\mathcal{F}^G_{inv}(X \times V), \phi_{U,U'}\}_{U,U' \in I(G)}.$$

Definição 4.11. *O* ***grupo abeliano das funções*** G***-equivariantes construtíveis*** $\mathcal{F}^G(X)$ *é definido como limite indutivo*

$$\mathcal{F}^G(X) := \varinjlim_{I(G)} \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V).$$

A aplicação identificação é denotada por $\phi_U : \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V) \to \mathcal{F}^G(X)$ (as vezes por ϕ_V).

Para cada $U = V - S \in I(G)$ não vazio, a inclusão $U \subset V$, que vamos denotar por j_U, induz $j_U^* : \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V) \to \mathcal{F}^G_{inv}(X \times U)$.

Observação 4.12. *Como G atua livremente em $X \times U$, qualquer subesquema reduzido G-invariante W de X tem um G-fibrado principal $W \to W/G$. Assim, para $1_W \in \mathcal{F}^G_{inv}(X \times U)$ atribuímos $1_{W/G} \in \mathcal{F}^G_{inv}(X \times_G U)$, que na verdade cria um isomorfismo de grupos e deste modo, identificamos $\mathcal{F}^G_{inv}(X \times U) = \mathcal{F}^G_{inv}(X \times_G U)$ ([5, p. 10]).*

Como $X \times_G U$ uma variedade algébrica complexa podemos considerar a transformação (comum) de MacPherson

$$C_* : \mathcal{F}(X \times_G U) \to H_*(X \times_G U).$$

Vamos denotar por TU_G o fibrado vetorial

$$X \times_G TU (= X \times_G (U \oplus V)) \to X \times_G U$$

e sua classe de Chern por $c(TU_G) \in H^*(X \times_G U)$. Ou seja, $c(TU_G) := r_U(c^G(V))$, onde $r_U : H^*_G(X) \to H^*(X \times_G U)$ é a projeção canônica e $c^G(V)$ é a classe de Chern da representação V.

Combinando as aplicações acima, definimos

$$T_{U,*} = c(TU_G)^{-1} \frown C_* \circ j_U^* : \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V) \to H_*(X \times_G U).$$

Definimos o homomorfismo limite como

$$C^G_* := \varinjlim T_{U,*} : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}^G(X) & \to & H^G_*(X) \\ \phi_U(\alpha_U) & \mapsto & \varphi_U \circ T_{U,*}(\alpha_U) \end{array},$$

onde $\phi_U : \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V) \to \mathcal{F}^G(X)$ e $\varphi_U : H_{trunc}(X \times_G U) \to H^G_*(X)$ são aplicações de identificação.

O teorema a seguir garante que a aplicação C^G_* é a transformação natural desejada, e que possui característica equivalentes a transformação natural (comum) de R. MacPherson. Para enunciarmos o teorema, precisamos relembrar que um grupo algébrico G é **redutivo** se o maior subgrupo normal unipotente conexo suave de G é trivial (mais detalhes em [8, 6.4.14]).

Teorema 4.13. *Seja G um grupo algébrico linear redutivo complexo. Para a categoria das G-variedades algébricas complexas e G-morfismos próprios, existe uma transformação natural de funtores covariantes*

$$C^G_* : \mathcal{F}^G(X) \to H^G_*(X)$$

tal que se X é não singular, então $C^G_*(1_X) = c^G(TX) \frown [X]_G$, onde $c^G(TX)$ é a classe G-equivariante de Chern total do fibrado tangente de X. A transformação natural C^G_* é única em certo sentido.

A demonstração do resultado acima pode ser vista em [5, Theorem 1.1] e consiste em três passos. O primeiro passo é mostrar que C^*_G é uma transformação natural (veja definição de transformação natural e exemplos em [6, Capítulo 8]), o segundo passo é demonstrar que se X é não singular, então $C^G_*(1_X) = c^G(TX) \frown [X]_G$, o terceiro e último passo é demonstrar a unicidade de C^*_G em certo sentido: supondo que para cada $U(= V - S)$ tenhamos um homomorfismo $DT_{U,*} : \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V) \to H_{trunc}(X \times_G U)$ comutando com os homomorfismos estruturas ($\phi_{U,U'}$ e $\varphi_{U,U'}$) tal que seu limite indutivo $D^G_* : \mathcal{F}^G \to H^G_*$ satisfaça as mesmas propriedades que C^*_G e, então, como podemos tomar a *codim* S suficientemente grande, podemos mostrar que $D_G^* = C_G^*$.

A partir deste teorema, de forma equivalente ao apresentado por R. MacPherson, pode-se definir então a versão equivariante da classe de Chern-Schwartz-MacPherson:

Definição 4.14. *A* ***classe*** G***-equivariante de Chern-Schwartz-MacPherson*** *de uma* G*-variedade* X *é definida por*

$$C_G^{SM}(X) := C_*^G(1_X).$$

5 Polinômio de Thom

Dada uma G-variedade X podemos definir a aplicação

$$Dual_G \circ C_*^G : \mathcal{F}_{inv}^G(X) \to H_G^*(X).$$

Para uma subvariedade G-invariante W de codimensão l, o termo principal de $Dual_G \circ C_*^G(1_W)$ é o dual de Poincaré G-equivariante de $[W]_G$ em X, que é chamado de **polinômio de Thom de** W e é denotado por $tp(W) \in H_G^{2l}(X)$.

Em particular, se X é um G-espaço afim, sabemos que $H_G^*(X) = H^*(BG)$ e então $tp(W)$ é escrito como um polinômio de classes características c_i de G-fibrados, que tem uma "universalidade" no seguinte sentido:

(*Universalidade*): Para qualquer fibrado $E \to M$ com fibra X e grupo estrutural G sobre um espaço base não singular M de dimensão m, associamos um subfibrado $E_W \to M$ com fibra W. Dada uma seção genérica $s : M \to E$, definimos

$$W(s) := s^{-1}(E_W)$$

e chamamos $W(s)$ de **conjunto singular do tipo** W, que tem codimensão $l = codim\ W$. Seja $i : W(s) \to M$ a inclusão. Então, a classe fundamental do conjunto singular é expressa em M por

$$i_*[W(s)] = tp(W)(c(E)) \frown [M] \in H_{2(m-l)}(M)$$

depois de substituir $c_i(E)$ por c_i resultando em $tp(W) \in H^{2l}(BG)$.

Definição 5.1. *Para uma subvariedade invariantes* W *em uma* G*-variedade* X *não singular (denotamos a* G*-inclusão por* $i : W \hookrightarrow X$*), definimos a* ***classe universal***

de Segre-SM *de* W *por*

$$s_G^{SM}(W,X) := c^G(TX|_W)^{-1} \frown C_*^G(1_W) \in H_*^G(X),$$

ou equivalentemente, $s_G^{SM}(W,X) = \varphi_U(s^{SM}(W \times_G U, X \times_G U))$, *onde* φ_U *é a aplicação* $H_{trunc}(W \times_G U) \to H_*^G(W)$*. Seu dual* G*-equivariante em* X *é denotado por*

$$tp^{SM}(W) = Dual_G i_*^G s_G^{SM}(W,X) \in H_G^*(X).$$

Note que $tp^{SM}(W)$ é uma série de potências formal

$$tp^{SM}(W) = \sum_{i=0}^{\infty} tp_i^{SM}(W) \in H_G^*(X) = \prod H_G^i(X).$$

O teorema a seguir apresenta uma relação entre $tp^{SM}(W)$ e $tp(W)$. Para enunciarmos o teorema precisamos entender o que significa uma seção s ser genérica com relação a W, para isso precisamos relembrar algumas definições:

Definição 5.2. *Dizemos que* $f : X \to Y$ *é um* ***morfismo de interseção completa local*** *(morfismo i.c.l.) se* f *é uma composição de um mergulho regular* $i : X \to N$ *e um morfismo suave* $p : N \to Y$.

Definição 5.3. *Seja* $f : X \to Y$ *um morfismo i.c.l. com fibrado normal virtual* ν*. Dizemos que* f *é* ***genérico em relação a uma subvariedade*** W *de* Y *se ele mantém que* $C_* \circ f^*(1_W) = f^{**} \circ C_*(1_W)$, *ou seja,*

$$i_* C^{SM}(f^{-1}(W)) = c(\nu)^{-1} \frown f^* i_* C^{SM}(W),$$

onde i_* *são as aplicações induzidas via inclusões.*

Definição 5.4. *Seja* s *uma seção de um fibrado* $E \to M$ *com fibra* X *e grupo estrutural* G*,* W *uma subvariedade* G*-invariante de* X*. Dizemos que* s *é* ***genérico com relação a*** W *se o morfismo* s *é genérico com relação ao subfibrado associado* E_W *com fibra* W.

Com a definição acima podemos enunciar o teorema a seguir, nele assumimos que M é uma variedade quasi-projetiva.

Teorema 5.5. *Seja* X *um* G*-espaço afim e* W *uma subvariedade de* X G*-invariante de codimensão* l*. Então,*

1. *$tp_i^{SM}(W) = 0$, para $i < l$, e $tp_l^{SM}(W)$ coincide com o polinômio de Thom $tp(W)$:*

$$tp^{SM}(W) = tp(W) + \textit{termos mais altos};$$

2. *(Universalidade) Para qualquer fibrado genérico $E \to M$ e qualquer seção s genérica com relação a W, temos*

$$i_* C^{SM}(W(s)) = tp^{SM}(W)(c(E)) \frown C^{SM}(M) \in H_*(M),$$

onde i_* denota a aplicação induzida pela inclusão.

A demonstração pode ser vista em [5, Theorem 7.5].

6 Conclusão

O estudo de classes características de variedades singulares é um tema atual e que tem sido amplamente utilizado em várias áreas da ciência. Assim como as classes características, as classes características equivariantes contribuem com informações topológicas relevantes dos objetos estudados e que são adaptáveis ao estudo dos espaços de órbitas.

Nessas notas apresentamos a construção de uma classe equivariante, dentre muitas possíveis, a de Chern-Schwartz-MacPherson, o que torna este trabalho um ponto de partida interessante para o estudo de outras classes como a de Mather, a de Fulton, dentre muitas outras e além outros resultados.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à FAPESP pelo apoio financeiro (Processo 2019/02068-8). Agradeco também pela leitura atenta, observações e sugestões do(a) parecerista que contribuíram grandemente para a melhoria destas notas. Trabalho desenvolvido durante doutorado no ICMC - USP, sob orientação do Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior.

Referências

[1] BRASSELET, J.P.; Schwartz, M.H. Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe. Astérisque 82-83, p. 93-148, 1981.

[2] GIBSON, C.G. Singular points of smooth mappings. Pitman Publishing, London, 1979.

[3] GÖRTZ, U.; Wedhorn, T. Algebraic Geometry I: Schemes with Examples and Exercises. Vieweg+teubner Verlag, 2010.

[4] MACPHERSON, R. Chern classes for singular algebraic varieties. Ann. of Math. 100, p. 421-432, 1974.

[5] OHMOTO, T. Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 140, p. 115-134, 2006.

[6] RIBEIRO, M. F. S. Teoria das Categorias para Matemáticos; Uma breve introdução. SBM, Rio de Janeiro, 2020.

[7] SCHWARTZ, M.H. Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complere. CRAS 260, 3262-3264 et 3535-3537, 1965.

[8] SPRINGER, T.A. Linear Algebraic Groups. 2nd edition, Birkhäuser, 1998.

[9] STEENROD, N. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press, Princeton, 1999.

[10] TOTARO, B. The Chow Ring of a Classifying Space. Proc. Symposia in Pure Math., vol. 67, p. 249-281, 1999.