Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2021.62231
Recebido em 08 Setembro 2021 | Aceito em 11 Novembro 2021

A GENERALIZAÇÃO DOS OCTÔNIOS DE NARAYANA

THE NARAYANA OCTONIONS GENERALIZATION

R. VIEIRA[a] F. ALVES[b] P. CATARINO[c]

Resumo

A partir da necessidade de realizar uma investigação em torno do processo de generalização da sequência de Narayana, surge-se nesta pesquisa a introdução dos octônios de Narayana. Nesse sentido, realiza-se a generalização para os números inteiros não positivos. Dessa forma, são discutidas algumas propriedades matemáticas, com ênfase na forma matricial, função geradora, fórmula de Binet dentre outros aspectos matemáticos. Por fim, buscam-se novas propriedades desses números em outras áreas, investigando a sua aplicação.

Palavras-chave: forma matricial, fórmula de Binet, octônios, sequência de Narayana.

Abstract

From the need to carry out an investigation around the generalization process of the Narayana sequence, this research presents the introduction of the Narayana octoniums. In this sense, the generalization for non-positive whole numbers is carried out. Thus, some mathematical properties are discussed, with emphasis on matrix form, generating function, Binet's formula and other mathematical aspects. Finally, new properties of these numbers are sought in other areas, investigating their application.

Keywords: matrix form, Binet's formula, octonions, Narayana sequence.

MSC2010: 11B37, 11B39.

[a]Secretaria de Educação do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1966-7097 **E-mail:** re.passosm@gmail.com

[b]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561 **E-mail:** fregis@gmx.fr

[c]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal; ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6917-5093 **E-mail:** pcatarino23@gmail.com

1 Introdução

Introduzida pelo matemático indiano Narayana Pandita (1340-1400), após o estudo referente ao problema das vacas e bezerros, a sequência de Narayana é uma sequência numérica linear e recorrente. Dessa forma, tem-se a seguinte problemática inicial dos bezerros e vacas: a partir do quarto ano, cada bezerro produz um bezerro no início de cada ano. Quantos bezerros existem no total após 20 anos? [1]

Assim, é possível onter a definição da sequência de Narayana (N_n), como sendo uma sequência de terceira ordem, com a sua fórmula de recorrência, dada por [1]:

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}, n \geqslant 3, N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1.$$

O seu polinômio característico é dado por: $x^3 - x^2 - 1 = 0$, possuindo duas raízes complexas e uma raiz real, como soluções, onde esse valor real é representado pela proporção de super-ouro (valor aproximado de 1,46). De fato, outros aspectos matemáticos e históricos podem ser estudados em outros trabalhos [1, 2]. Ademais, são estudados os octônios de Narayana e a sua extensão para os números inteiros não positivos, estudando alguns teoremas matemáticos e definições.

Seja $\mathbb{O}$ a álgebra dos octônios sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. Desse modo, para qualquer p, pode-se escrever $p \in \mathbb{O}$ [7, 6, 5]:

$$p = p' + p''\mathrm{e},$$

onde $p', p'' \in H = \{a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{k^2} = -1, \boldsymbol{ijk} = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, representa a divisão da álgebra dos quatérnios.

Para a operação da adição e multiplicação entre dois octônios, $p = p' + p''\mathrm{e}$ e, $q = q' + q''\mathrm{e}$ tem-se:

$$p + q = (p' + q') + (p'' + q'')\mathrm{e},$$
$$pq = (p'q' - \overline{q''}p'') + (q''p' + p''\overline{q'})\mathrm{e},$$

em que $\overline{q'}$ e $\overline{q''}$ são os conjugados dos quatérnios q' e q'', respectivamente. Portanto, $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octônios, numa base natural no espaço sobre $\mathbb{R}$ formado pelos elementos: $\mathrm{e}_0 = 1, \mathrm{e}_1 = \boldsymbol{i}, \mathrm{e}_2 = \boldsymbol{j}, \mathrm{e}_3 = \boldsymbol{k}, \mathrm{e}_4 = \mathrm{e}, \mathrm{e}_5 = \boldsymbol{i}\mathrm{e}, \mathrm{e}_6 = \boldsymbol{j}\mathrm{e}, \mathrm{e}_7 = \boldsymbol{k}\mathrm{e}$ e a multiplicação desses números é mostrada na Tabela 1.

Tabela 1: Multiplicação dos octônios de $\mathbb{O}$. Fonte: [7]

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Assim, utilizam-se a seguinte notação para os octônios:

$$p = \sum_{p=0}^{7} p_s \mathrm{e}_\mathrm{s},$$

onde p_s é o coeficiente real, com $p \in \mathcal{O}$, no formato $p = Re(p) + Im(p)$, em que $Re(p) = p_0$ representa a parte real e, $Im(p) = \sum_{s=1}^{7} p_s \mathrm{e}_\mathrm{s}$ representa a parte imaginária.

Visando realizar uma investigação em torno da sequência de Narayana, tem-se a generalização dos octônios de Narayana. Assim, tem-se um estudo do processo de complexificação dessa sequência, possuindo interesse e aplicações ligadas à geometria em dimensões mais altas, além de outras relações com a física [3, 4].

2 Os octônios de Narayana

Nesta seção, são estudados os octônios de Narayana, abordando os seus respectivos aspectos matemáticos.

Definição 2.1. *Para $n \geqslant 0$, os octônios de Narayana são definidos por:*

$$ON_n = \sum_{s=0}^{7} N_{n+s} \mathrm{e}_\mathrm{s},$$

e o seu conjugado é dado por:

$$\overline{ON_n} = N_n - \sum_{s=1}^{7} N_{n+s} \mathrm{e}_\mathrm{s}.$$

Teorema 2.2. *A função geradora dos octônios de Narayana, ON_n, é dada por:*

$$g(ON_n, x) = \frac{1}{(1-x-x^3)} \sum_{s=0}^{7} (N_s + N_{s-2}x + N_{s-1}x^2)\mathrm{e_s}.$$

Demonstração. Com base na função:

$$g(ON_n, x) = ON_0 + ON_1 x + ON_2 x^2 + \ldots + ON_n x^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por x e x^3, resultando:

$$\begin{aligned} xg(ON_n, x) &= ON_0 x + ON_1 x^2 + ON_2 x^3 + \ldots + ON_{n-1} x^n + \ldots \\ x^3 g(ON_n, x) &= ON_0 x^3 + ON_1 x^4 + ON_2 x^5 + \ldots + ON_{n-3} x^n + \ldots \end{aligned}$$

Dessa forma, realizando $g(ON_n, x) - xg(ON_n, x) - x^3 g(ON_n, x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} (1-x-x^3)g(ON_n, x) &= ON_0 + (ON_1 - ON_0)x + (ON_2 - ON_1)x^2 \\ g(ON_n, x) &= \frac{1}{(1-x-x^3)} \sum_{s=0}^{7} (N_s + N_{s-2}x + N_{s-1}x^2)\mathrm{e_s}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. *A fórmula de Binet dos octônios de Narayana, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:*

$$ON_n = A\alpha_o x_1^n + B\beta_o x_2^n + C\gamma_o x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico $x^3 - x^2 - 1 = 0$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}, \\ \alpha_o &= 1 + x_1 i + x_1^2 j + x_1^3 k + x_1^4 \mathrm{e} + x_1^5 i\mathrm{e} + x_1^6 j\mathrm{e} + x_1^7 k\mathrm{e}, \\ \beta_o &= 1 + x_2 i + x_2^2 j + x_2^3 k + x_2^4 \mathrm{e} + x_2^5 i\mathrm{e} + x_2^6 j\mathrm{e} + x_2^7 k\mathrm{e}, \\ \gamma_o &= 1 + x_3 i + x_3^2 j + x_3^3 k + x_3^4 \mathrm{e} + x_3^5 i\mathrm{e} + x_3^6 j\mathrm{e} + x_3^7 k\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Demonstração. Por meio da fórmula de Binet $ON_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ e da recorrência dos octônios de Narayana $ON_n = \sum_{s=0}^{7} N_{n+s}\mathrm{e_s}$, com os valores iniciais $ON_0 = i + j + k + 2\mathrm{e} + 3i\mathrm{e} + 4j\mathrm{e} + 6k\mathrm{e}$, $ON_1 = 1 + i + j + 2k + 3\mathrm{e} + 4i\mathrm{e} + 6j\mathrm{e} + 9k\mathrm{e}$

e $ON_2 = 1 + i + 2j + 3k + 4\mathrm{e} + 6i\mathrm{e} + 9j\mathrm{e} + 13k\mathrm{e}$, é possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = i + j + k + 2\mathrm{e} + 3i\mathrm{e} + 4j\mathrm{e} + 6k\mathrm{e} \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 & = 1 + i + j + 2k + 3\mathrm{e} + 4i\mathrm{e} + 6j\mathrm{e} + 9k\mathrm{e} \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 & = 1 + i + 2j + 3k + 4\mathrm{e} + 6i\mathrm{e} + 9j\mathrm{e} + 13k\mathrm{e} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\alpha = \frac{(1 + i + 2j + 3k + 4\mathrm{e} + 6i\mathrm{e} + 9j\mathrm{e} + 13k\mathrm{e}) + (-x_2 - x_3)(1 + i + j + 2k + 3\mathrm{e} + 4i\mathrm{e} + 6j\mathrm{e} + 9k\mathrm{e})}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3}$$
$$+ \frac{x_2x_3(i + j + k + 2\mathrm{e} + 3i\mathrm{e} + 4j\mathrm{e} + 6k\mathrm{e})}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3},$$

$$\beta = \frac{(1 + i + 2j + 3k + 4\mathrm{e} + 6i\mathrm{e} + 9j\mathrm{e} + 13k\mathrm{e}) + (-x_1 - x_3)(1 + i + j + 2k + 3\mathrm{e} + 4i\mathrm{e} + 6j\mathrm{e} + 9k\mathrm{e})}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3}$$
$$+ \frac{x_1x_3(i + j + k + 2\mathrm{e} + 3i\mathrm{e} + 4j\mathrm{e} + 6k\mathrm{e})}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3},$$
$$\gamma = \frac{(1 + i + 2j + 3k + 4\mathrm{e} + 6i\mathrm{e} + 9j\mathrm{e} + 13k\mathrm{e}) + (-x_1 - x_2)(1 + i + j + 2k + 3\mathrm{e} + 4i\mathrm{e} + 6j\mathrm{e} + 9k\mathrm{e})}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}$$
$$+ \frac{x_1x_2(i + j + k + 2\mathrm{e} + 3i\mathrm{e} + 4j\mathrm{e} + 6k\mathrm{e})}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = 1, x_1+x_2+x_3 = 1$ e $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 0$, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(x_2x_3 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4\mathrm{e} + x_1^5i\mathrm{e} + x_1^6j\mathrm{e} + x_1^7k\mathrm{e}) \\ &= \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4\mathrm{e} + x_1^5i\mathrm{e} + x_1^6j\mathrm{e} + x_1^7k\mathrm{e}), \\ \beta &= \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4\mathrm{e} + x_2^5i\mathrm{e} + x_2^6j\mathrm{e} + x_2^7k\mathrm{e}) \\ &= \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4\mathrm{e} + x_2^5i\mathrm{e} + x_2^6j\mathrm{e} + x_2^7k\mathrm{e}), \\ \gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4\mathrm{e} + x_3^5i\mathrm{e} + x_3^6j\mathrm{e} + x_3^7k\mathrm{e}) \\ &= \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4\mathrm{e} + x_3^5i\mathrm{e} + x_3^6j\mathrm{e} + x_3^7k\mathrm{e}). \end{aligned}$$

Definindo $\alpha_o = (1+x_1i+x_1^2j+x_1^3k+x_1^4\mathrm{e}+x_1^5i\mathrm{e}+x_1^6j\mathrm{e}+x_1^7k\mathrm{e}), \beta_o = (1+x_2i+x_2^2j+x_2^3k+x_2^4\mathrm{e}+x_2^5i\mathrm{e}+x_2^6j\mathrm{e}+x_2^7k\mathrm{e})$, $\gamma_o = (1+x_3i+x_3^2j+x_3^3k+x_3^4\mathrm{e}+x_3^5i\mathrm{e}+x_3^6j\mathrm{e}+x_3^7k\mathrm{e})$, $A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$ e $C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$, conclui-se que:

$$\alpha = A\alpha_o, \beta = B\beta_o, \gamma = C\gamma_o.$$

$\square$

A forma matricial dos octônios de Narayana é realizada com base no trabalho [8], em que trata da matriz geradora da sequência de Narayana, generalizando os coeficientes da fórmula de recorrência.

Propriedade 2.4. *Para $n \geqslant 3$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos octônios de Narayana é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{n+1} & N_n & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-2} & N_{n-3} \\ N_n & N_{n-1} & N_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ON_{n+1} & ON_n & ON_{n-1} \\ ON_{n-1} & ON_{n-2} & ON_{n-3} \\ ON_n & ON_{n-1} & ON_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Constatando a veracidade para $n = 3$, pelo princípio da indução finita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2ON_1 + ON_{-1} + ON_0 & 2ON_0 + ON_{-2} + ON_{-1} & 2ON_{-1} + ON_{-3} + ON_{-2} \\ ON_1 + ON_{-1} & ON_0 + ON_{-2} & ON_{-1} + ON_{-3} \\ ON_1 + ON_{-1} + ON_0 & ON_0 + ON_{-2} + ON_{-1} & ON_{-1} + ON_{-3} + ON_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ON_4 & ON_3 & ON_2 \\ ON_2 & ON_1 & ON_0 \\ ON_3 & ON_2 & ON_1 \end{bmatrix}.$$

Supondo a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ON_{k+1} & ON_k & ON_{k-1} \\ ON_{k-1} & ON_{k-2} & ON_{k-3} \\ ON_k & ON_{k-1} & ON_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{k+1}\begin{bmatrix}ON_1&ON_0&ON_{-1}\\ON_{-1}&ON_{-2}&ON_{-3}\\ON_0&ON_{-1}&ON_{-2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{k}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ON_1&ON_0&ON_{-1}\\ON_{-1}&ON_{-2}&ON_{-3}\\ON_0&ON_{-1}&ON_{-2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}N_{k+1}&N_k&N_{k-1}\\N_{k-1}&N_{k-2}&N_{k-3}\\N_k&N_{k-1}&N_{k-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ON_1&ON_0&ON_{-1}\\ON_{-1}&ON_{-2}&ON_{-3}\\ON_0&ON_{-1}&ON_{-2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}N_{k+2}&N_{k+1}&N_k\\N_k&N_{k-1}&N_{k-2}\\N_{k+1}&N_k&N_{k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ON_1&ON_0&ON_{-1}\\ON_{-1}&ON_{-2}&ON_{-3}\\ON_0&ON_{-1}&ON_{-2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}ON_{k+2}&ON_{k+1}&ON_k\\ON_k&ON_{k-1}&ON_{k-2}\\ON_{k+1}&ON_k&ON_{k-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$\square$

3 A generalização dos octônios de Narayana

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos octônios de Narayana. Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de

Definição 3.1. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o octonion de Narayana, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$ON_{-n} = \sum_{s=0}^{7} N_{-n+s}\mathrm{e}_{\mathrm{s}}.$$

Propriedade 3.2. *A função geradora dos octônios de Narayana para índice inteiro não positivo, é expressa por:*

$$g(ON_{-n}, x) = \frac{ON_0 + ON_{-1}x - (ON_{-2} - ON_0)x^2}{x^3 - x^2 - 1},$$

com os respectivos valores iniciais: $ON_{-2} = \sum_{s=0}^{7} N_{-2+s}\mathrm{e}_{\mathrm{s}}, ON_{-1} = \sum_{s=0}^{7} N_{-2+s}\mathrm{e}_{\mathrm{s}}$ *e* $ON_0 = \sum_{s=0}^{7} N_{s}\mathrm{e}_{\mathrm{s}}$.

Demonstração. A validação do presente teorema, ocorre da mesma maneira como realizado para o Teorema 2.2.

□

Propriedade 3.3. *Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octônios de Narayana, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{-n+1} & N_{-n} & N_{-n-1} \\ N_{-n-1} & N_{-n-2} & N_{-n-3} \\ N_{-n} & N_{-n-1} & N_{-n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ON_1 & ON_0 & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-2} & ON_{-3} \\ ON_0 & ON_{-1} & ON_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ON_{-n+1} & ON_{-n} & ON_{-n-1} \\ ON_{-n-1} & ON_{-n-2} & ON_{-n-3} \\ ON_{-n} & ON_{-n-1} & ON_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo similar à demonstração realizada na Propriedade 2.4, pode-se validar esta propriedade. □

4 Propriedades dos octônios de Narayana

Doravante, serão estudadas algumas propriedades inerentes aos octônios de Narayana.

Teorema 4.1. *A soma dos n primeiros termos octônios de Narayana é dada por:*

$$\sum_{m=1}^{n} ON_m = ON_{n+3} - ON_3.$$

Demonstração. Utilizando a Definição 2.1, pode-se obter a relação:

$$ON_{n-3} = ON_n - ON_{n-1}.$$

Assim, realizando a soma telescópica do lado direito, pode-se obter:

$$\sum_{m=1}^{n} ON_m = ON_{n+3} - ON_3.$$

□

Teorema 4.2. *A soma dos 5 primeiros termos dos octônios de Narayana é dada por:*

$$\sum_{m=0}^{4} ON_m = 2ON_n + ON_{n-1}.$$

Demonstração. Utilizando a Definição 2.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
ON_n + ON_{n-1} + ON_{n-2} + ON_{n-3} + ON_{n-4} &= N_n + N_{n+1}e_1 + N_{n+2}e_2 + N_{n+3}e_3 + N_{n+4}e_4 \\
&+ N_{n+5}e_5 + N_{n+6}e_6 + N_{n+7}e_7 \\
&+ N_{n-1} + N_n e_1 + N_{n+1}e_2 + N_{n+2}e_3 + N_{n+3}e_4 \\
&+ N_{n+4}e_5 + N_{n+5}e_6 + N_{n+6}e_7 \\
&+ N_{n-2} + N_{n-1}e_1 + N_n e_2 + N_{n+1}e_3 + N_{n+2}e_4 \\
&+ N_{n+3}e_5 + N_{n+4}e_6 + N_{n+5}e_7 \\
&+ N_{n-3} + N_{n-2}e_1 + N_{n-1}e_2 + N_n e_3 + N_{n+1}e_4 \\
&+ N_{n+2}e_5 + N_{n+3}e_6 + N_{n+4}e_7 \\
&+ N_{n-4} + N_{n-3}e_1 + N_{n-2}e_2 + N_{n-1}e_3 + N_n e_4 \\
&+ N_{n+1}e_5 + N_{n+2}e_6 + N_{n+3}e_7 \\
&= 2N_n + N_{n-1} + 2N_{n+1}e_1 + N_n e_1 \\
&+ 2N_{n+2}e_2 + N_{n+1}e_2 + 2N_{n+3}e_3 + N_{n+2}e_3 \\
&+ 2N_{n+4}e_4 + N_{n+3}e_4 + 2N_{n+5}e_5 + N_{n+4}e_5 \\
&+ 2N_{n+6}e_6 + N_{n+5}e_6 + 2N_{n+7}e_7 + N_{n+6}e_6 \\
&= 2ON_n + ON_{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos octônios de Narayana, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} ON_{-m} = ON_{-n+3} + ON_2.$$

Demonstração. De modo similar à demonstração do Teorema 4.1, pode-se validar este Teorema. □

Teorema 4.4. *A soma dos* 5 *primeiros termos dos octônios de Narayana é dada por:*

$$\sum_{m=0}^{4} ON_m = ON_{-n+3} + 2ON_{-n+4}.$$

Demonstração. Com base na Definição 3.1, tem-se que:

$$\begin{aligned}
ON_{-n}+ON_{-n+1}+ON_{-n+2}+ON_{-n+3}+ON_{-n+4} &= N_{-n}+N_{-n+1}e_1+N_{-n+2}e_2+N_{-n+3}e_3+N_{-n+4}e_4\\
&+N_{-n+5}e_5+N_{-n+6}e_6+N_{-n+7}e_7\\
&+N_{-n+1}+N_{-n+2}e_1+N_{-n+3}e_2+N_{-n+4}e_3+N_{-n+5}e_4\\
&+N_{-n+6}e_5+N_{-n+7}e_6+N_{-n+8}e_7\\
&+N_{-n+2}+N_{-n+3}e_1+N_{-n+4}e_2+N_{-n+5}e_3+N_{-n+6}e_4\\
&+N_{-n+7}e_5+N_{-n+8}e_6+N_{-n+9}e_7\\
&+N_{-n+3}+N_{-n+4}e_1+N_{-n+5}e_2+N_{-n+6}e_3+N_{-n+7}e_4\\
&+N_{-n+8}e_5+N_{-n+9}e_6+N_{-n+10}e_7\\
&+N_{-n+4}+N_{-n+5}e_1+N_{-n+6}e_2+N_{-n+7}e_3+N_{-n+8}e_4\\
&+N_{-n+9}e_5+N_{-n+10}e_6+N_{-n+11}e_7\\
&=2N_{-n+4}+N_{-n+3}+2N_{-n+5}e_1+N_{-n+4}e_1\\
&+2N_{-n+6}e_2+N_{-n+5}e_2+2N_{-n+7}e_3+N_{-n+6}e_3\\
&+2N_{-n+8}e_4+N_{-n+7}e_4+2N_{-n+9}e_5+N_{-n+8}e_5\\
&+2N_{-n+10}e_6+N_{-n+9}e_6+2N_{-n+11}e_7+N_{-n+10}e_6\\
&=ON_{-n+3}+2ON_{-n+4}.
\end{aligned}$$

$$ON_{-n}+ON_{-n+1}+ON_{-n+2}+ON_{-n+3}+ON_{-n+4}=ON_{-n+3}+2ON_{-n+4}.$$

□

5 Conclusão

A partir do estudo dos octônios de Narayana e a sua generalização, foi possível discutir aspectos matemáticos e evolução dessa sequência, ressaltando: a sua função geradora, fórmula de Binet, forma matricial e algumas propriedades referentes à esses números.

Para pesquisas futuras, espera-se realizar estudos referentes a visualização dessa sequência, assim como ocorrido nos trabalhos [2, 9], em que foi estudada uma alternativa de visualização da sequência de Padovan e outras sequências numéricas, por meio do GoogleColab integrado ao método de Newton.

Agradecimentos

Referências

[1] ALLOUCHE, J. P.; JOHNSON, J. Narayana's cows and delayed morphisms, *Articles of 3rd Computer Music Conference JIM96*, France, 1996.

[2] ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons Fractal from the Recurring Linear Sequence with Google Colab: An Example of Brazil X Portugal Research, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, vol. 15, n. 3, p. 1-19, 2020.

[3] BAEZ, J. C.; HUERTA, J. Division Algebras and Supersymmetry I, *https://arxiv.org/pdf/0909.0551.pdf*, 2009.

[4] BAEZ, J. C.; HUERTA, J. Division Algebras and Supersymmetry II, *https://arxiv.org/pdf/1003.3436.pdf*, 2010.

[5] HORADAM, A. F. Quaternion Recurrence relations, *Ulam Quarterly*, vol. 2, p. 23-33, 1993.

[6] KARATAS, A.; HALICI, S. Horadam Octonions, *Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, vol. 25, n. 3, p. 97-106, 2017.

[7] KECILIOGLU, O.; AKKUS, I. The Fibonacci Octonions, *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 25, n. 1, p. 151-158, 2015.

[8] RAMÍREZ, J. L.; SIRVENT, V. F. A note on the k-Narayana sequence, *Annales Mathematicae et Informaticae*, vol. 45, p. 91-105, 2015.

[9] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Alternative views of some extensions of the Padovan sequence with the Google Colab, *Anale. Seria Iformatica*, vol. XVII, n. 2, p. 266-273, 2019.