

Caracterização das raízes do polinômio do terceiro grau e alguns resultados

Characterization of the roots of the third degree polynomial and some results

LUÍS YAMAOKA^a

Resumo

Neste artigo apresentamos um procedimento para caracterizar as raízes do polinômio do 3º grau $f \in \mathbb{R}[x]$ recorrendo a fatos do Cálculo. Ademais, impondo condições aos coeficientes de $f \in \mathbb{R}[x]$, estabelecemos uma comparação entre a parte real de suas raízes complexas não reais conjugadas e o(s) ponto(s) crítico(s) de $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Palavras-chave: Polinômio do terceiro grau, Caracterização das raízes, Parte real.

Abstract

In this paper we present a procedure to characterize the roots of the 3rd degree polynomial $f \in \mathbb{R}[x]$ using facts of Calculus. Furthermore, by imposing conditions on the coefficients of $f \in \mathbb{R}[x]$, we establish a comparison between the real part of their conjugated non-real complex roots and the critical point(s) of $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Keywords: Third degree polynomial, Root characterization, Real part.

MSC2010: 12D10

^aUniversidade Federal de São Paulo, São Paulo, Brasil; ORCID: 0000-0002-3963-7338 **E-mail:** luis.yamaoka@unifesp.br

1 Introdução

Denotamos por $\mathbb{C}[x]$ o conjunto dos polinômios na indeterminada x com coeficientes em \mathbb{C} . Sejam $f \in \mathbb{C}[x]$ e $r \in \mathbb{C}$. Dizemos que r é raiz de f se o número complexo $f(r)$ é igual a zero. Consideremos $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios na indeterminada x com coeficientes em \mathbb{R} . A partir daqui, abordaremos os polinômios do 3º grau em $\mathbb{R}[x]$.

É fato conhecido que cada polinômio do 3º grau $f \in \mathbb{R}[x]$ admite uma dentre as seguintes possibilidades para as suas raízes (veja, por exemplo, [7]):

- três raízes reais distintas;
- uma raiz real de multiplicidade 1 e outra raiz real distinta de multiplicidade 2;
- uma raiz real de multiplicidade 3;
- uma raiz real e duas raízes complexas não reais conjugadas.

Cada uma dentre as quatro possibilidades supracitadas é uma caracterização das raízes de um polinômio do 3º grau $f \in \mathbb{R}[x]$. Na Seção 2 daremos os detalhes a respeito de cada caracterização. O intuito deste artigo é valer-se do Cálculo para caracterizar as raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ e, sob condições impostas aos seus coeficientes, realizar uma comparação entre a parte real das suas raízes complexas não reais e o(s) ponto(s) crítico(s) de $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que \mathbf{f} é a função polinomial do 3º grau definida por f .

As ferramentas empregadas para alcançar os resultados aqui apresentados podem ser obtidas em um texto de Cálculo e na coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*. Por exemplo, os conjuntos numéricos, as funções quadráticas, a definição de função sobrejetora e equações e inequações irracionais estão expostos em [4]. Números complexos, polinômios e equações polinomiais são tratados em [3]. Posições de um ponto em relação ao sistema, em [2]. As derivadas são contempladas em [1] e em [5]. Temos como objetivo demonstrar o proposto neste trabalho sem recorrer à fórmula da solução geral da equação cúbica. Tais raízes podem ser obtidas por um software matemático. As formas dos gráficos das funções polinomiais do 3º grau exibidas na Seção 2 também podem ser encontradas em [6].

2 A caracterização das raízes

Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{f}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Definimos a *vizinhança* de um ponto x_0 pertencente ao domínio de \mathbf{f} , $D(\mathbf{f}) = \mathbb{R}$, um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, onde δ é um número real positivo. Consideremos a derivada de \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Definimos um *ponto crítico* de \mathbf{f} como sendo o valor de $x \in \mathbb{R}$ para o qual $\mathbf{f}'(x) = 0$. A forma do gráfico de \mathbf{f} depende do número de pontos críticos de \mathbf{f} . Deste modo, calculamos o discriminante de \mathbf{f}' :

$$\Delta = 4b^2 - 12ac.$$

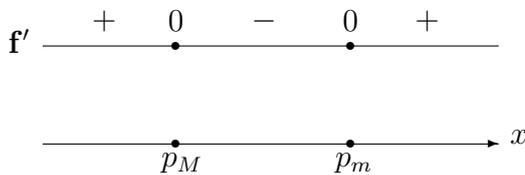
Se $\Delta > 0$, \mathbf{f} possui 2 pontos críticos; se $\Delta = 0$, \mathbf{f} possui 1 ponto crítico; se $\Delta < 0$, \mathbf{f} não possui ponto crítico. Logo, temos as 3 possíveis formas para o gráfico de \mathbf{f} :

1. 1ª forma ($\Delta > 0$)

Como $a > 0$, os pontos críticos p_M e p_m são tais que

$$p_M = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} < p_m = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

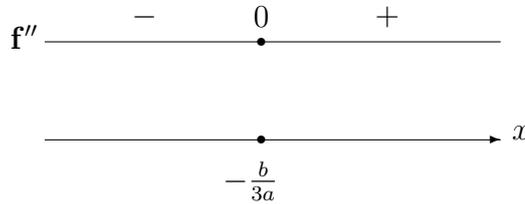
Analisando a variação do sinal de \mathbf{f}' , temos:



Como $\mathbf{f}'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, p_M[$ e para $x \in]p_m, \infty[$, segue que \mathbf{f} é estritamente crescente em $] - \infty, p_M[$ e em $]p_m, \infty[$; como $\mathbf{f}'(x) < 0$ para $x \in]p_M, p_m[$, segue que \mathbf{f} é estritamente decrescente em $]p_M, p_m[$. Ademais, como \mathbf{f}' é positiva à esquerda e negativa à direita de p_M , decorre que p_M é *ponto de máximo local* de \mathbf{f} , isto é, existe vizinhança V de p_M tal que $\mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}(p_M)$, $\forall x \in V$. Como \mathbf{f}' é negativa à esquerda e positiva à direita de p_m , decorre que p_m

é ponto de *mínimo local* de f , isto é, existe vizinhança V de p_m tal que $f(x) \geq f(p_m), \forall x \in V$.

Analisando a variação do sinal de f'' , em que $f''(x) = 6ax + 2b$, temos:



Como $f''(x) < 0$ para $x \in]-\infty, -b/3a[$, segue que f tem concavidade para baixo em $] -\infty, -b/3a[$; como $f''(x) > 0$ para $x \in] -b/3a, \infty[$, segue que f tem concavidade para cima em $] -b/3a, \infty[$. O ponto $-b/3a$ é a abscissa de um *ponto de inflexão* (ponto da curva onde ocorre mudança de concavidade), já que $f''(-b/3a) = 6a(-b/3a) + 2b = 0$ e $f'''(-b/3a) = 6a \neq 0$.

Portanto, a 1ª forma do gráfico de f é:

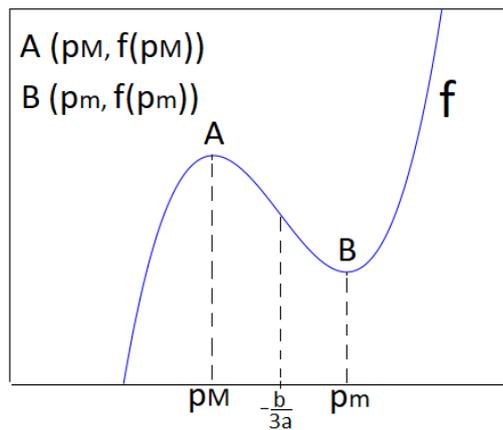


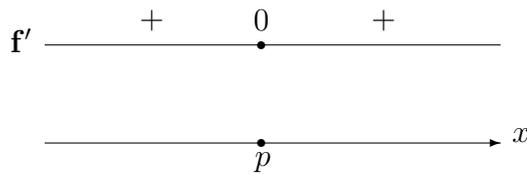
Figura 1: 1ª forma do gráfico de f

2. 2ª forma ($\Delta = 0$)

O ponto crítico é

$$p = -\frac{b}{3a}.$$

Analisando a variação do sinal de f' , temos:



Como $f'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, p[$ e para $x \in]p, \infty[$, segue que f é estritamente crescente nestes intervalos e que p não é *extremante* (*ponto de máximo local ou de mínimo local*) de f .

A variação do sinal de f'' é a mesma da 1ª forma.

Portanto, a 2ª forma do gráfico de f é:

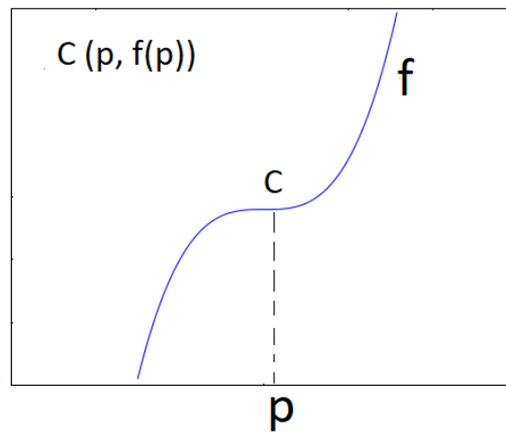


Figura 2: 2ª forma do gráfico de f

3. 3ª forma ($\Delta < 0$)

Não existe ponto crítico.

Analisando a variação do sinal de f' , temos:



Como $f'(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$, segue que f é estritamente crescente em \mathbb{R} .

A variação do sinal de f'' é a mesma da 1ª forma.

Portanto, a 3ª forma do gráfico de f é:

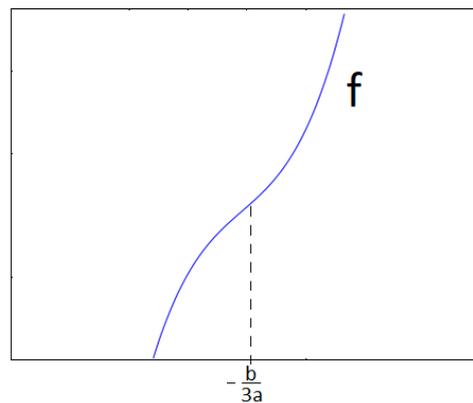


Figura 3: 3ª forma do gráfico de f

Ao posicionar cada uma das 3 formas em relação ao eixo x , teremos as seguintes caracterizações (de 1. a 9.) das raízes, especificadas nas legendas das Figuras 4 a 12:

1. Os pontos A e B situam-se acima do eixo x : $f(p_M) > 0$ e $f(p_m) > 0$

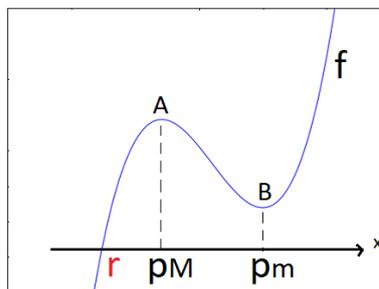


Figura 4: 1 raiz real r ($r < p_M$) e 2 raízes complexas não reais conjugadas

2. O ponto A acima e o ponto B no eixo x : $f(p_M) > 0$ e $f(p_m) = 0$

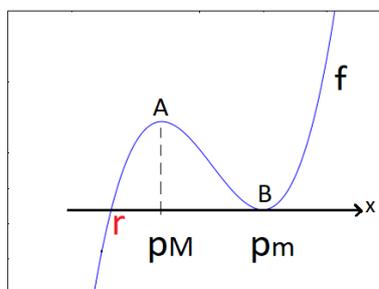


Figura 5: 1 raiz real r ($r < p_M$) e p_m é raiz real de multiplicidade 2

p_m é raiz real de multiplicidade 2, pois f não muda de sinal em p_m .

3. O ponto A acima e o ponto B abaixo do eixo x : $f(p_M) > 0$ e $f(p_m) < 0$

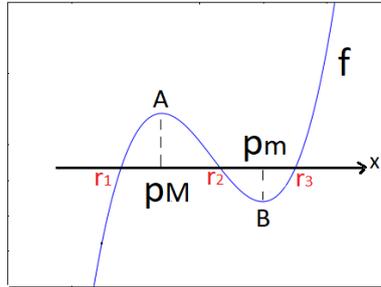


Figura 6: 3 raízes reais distintas: r_1, r_2, r_3 ($r_1 < p_M < r_2 < p_m < r_3$)

4. O ponto A no e o ponto B abaixo do eixo x : $f(p_M) = 0$ e $f(p_m) < 0$

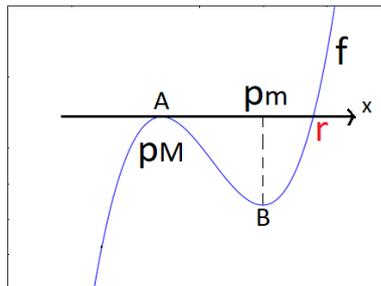


Figura 7: 1 raiz real r ($r > p_m$) e p_M é raiz real de multiplicidade 2

p_M é raiz real de multiplicidade 2, pois f não muda de sinal em p_M .

5. Os pontos A e B situam-se abaixo do eixo x : $f(p_M) < 0$ e $f(p_m) < 0$

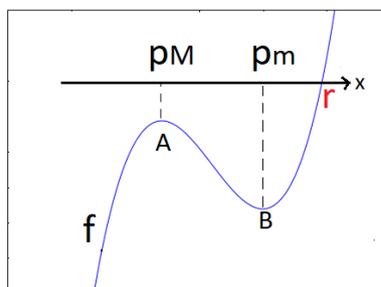


Figura 8: 1 raiz real r ($r > p_m$) e 2 raízes complexas não reais conjugadas

6. O ponto C situa-se acima do eixo x : $f(p) > 0$

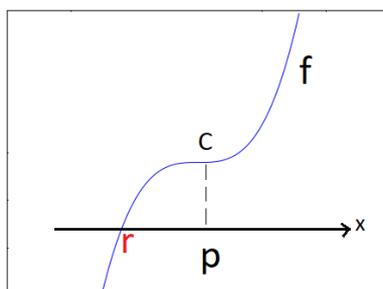


Figura 9: 1 raiz real r ($r < p$) e 2 raízes complexas não reais conjugadas

7. O ponto C no eixo x : $f(p) = 0$

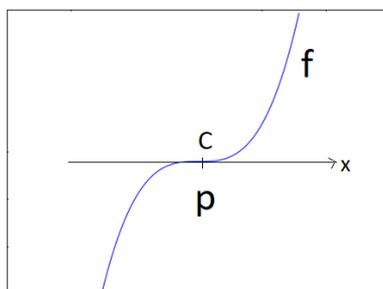


Figura 10: p é raiz real de multiplicidade 3

8. O ponto C situa-se abaixo do eixo x : $f(p) < 0$

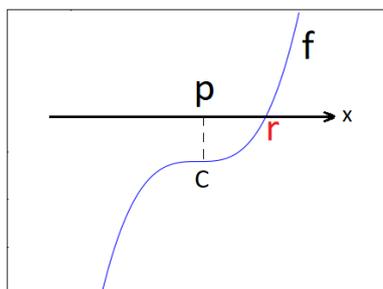


Figura 11: 1 raiz real r ($r > p$) e 2 raízes complexas não reais conjugadas

9. Quando não existe ponto crítico

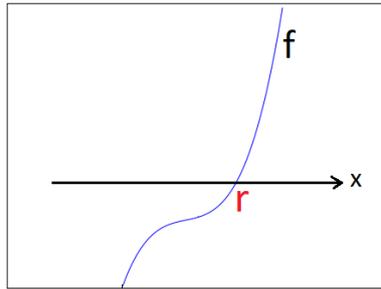


Figura 12: 1 raiz real r e 2 raízes complexas não reais conjugadas

Procedimento para a caracterização das raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$

- Determinar o(s) ponto(s) crítico(s)* de \mathbf{f} : p ou $(p_M < p_m)$.

*Caso não exista(m), a caracterização é: 1 raiz real e 2 complexas conjugadas.

- Calcular: $\mathbf{f}(p)$ ou $(\mathbf{f}(p_M)$ e $\mathbf{f}(p_m))$.
- Verificar as caracterizações: de 1. a 9. .

Exemplo 2.1. Caracterizar as raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Solução.

$$\mathbf{f}'(x) = 3x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$p_M = \frac{4 - \sqrt{13}}{3} \quad \text{e} \quad p_m = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$$

$$\mathbf{f}\left(\frac{4 - \sqrt{13}}{3}\right) \approx 7,93 > 0$$

$$\mathbf{f}\left(\frac{4 + \sqrt{13}}{3}\right) \approx -0,88 < 0$$

Trata-se da caracterização 3.: 3 raízes reais: r_1, r_2, r_3 ($r_1 < p_M < r_2 < p_m < r_3$).

Exemplo 2.2. Caracterizar as raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 11$.

Solução.

$$\mathbf{f}'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 0$$

$$p = -2$$

$$\mathbf{f}(-2) = 3 > 0$$

Trata-se da caracterização 6.: 1 raiz real r ($r < -2$) e 2 raízes complexas conjugadas.

Exemplo 2.3. Caracterizar as raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

Solução.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$p_M = 1 \quad \text{e} \quad p_m = \frac{7}{3}$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) \approx -1,19 < 0$$

Trata-se da caracterização 4.: Uma raiz real r ($r > \frac{7}{3}$) e 1 é raiz real de multiplicidade 2.

Exemplo 2.4. Caracterizar as raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Solução.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$p = 2$$

$$f(2) = 0$$

Trata-se da caracterização 7.: 2 é raiz real de multiplicidade 3.

Exemplo 2.5. Caracterizar as raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

Solução.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 \cdot (1)^2 - 12 \cdot 1 \cdot 1 = -8 < 0$$

Não existe ponto crítico. Trata-se da caracterização 9.: 1 raiz real r e 2 raízes complexas conjugadas.

Observação 2.1. Quando $a < 0$, temos p_m (ponto de mínimo) $<$ p_M (ponto de máximo), e as 9 caracterizações das raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$ estão especificadas abaixo:

$\mathbf{f}(p_m)$ $\mathbf{f}(p_M)$ Caracterização das raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$

1. > 0 > 0 1 raiz real r ($r > p_M > p_m$) e 2 raízes complexas conjugadas
2. 0 > 0 1 raiz real r ($r > p_M > p_m$) e p_m é raiz real de multiplicidade 2
3. < 0 > 0 3 raízes reais distintas: r_1, r_2, r_3 ($r_1 < p_m < r_2 < p_M < r_3$)
4. < 0 0 1 raiz real r ($r < p_m < p_M$) e p_M é raiz real de multiplicidade 2
5. < 0 < 0 1 raiz real r ($r < p_m < p_M$) e 2 raízes complexas conjugadas

$\mathbf{f}(p)$ Caracterização das raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$

6. > 0 1 raiz real r ($r > p$) e 2 raízes complexas conjugadas
7. 0 p é raiz real de multiplicidade 3
8. < 0 1 raiz real r ($r < p$) e 2 raízes complexas conjugadas

Caracterização das raízes de $f \in \mathbb{R}[x]$

9. $\nexists (p, p_m, p_M)$ 1 raiz real r e 2 raízes complexas conjugadas

3 Alguns resultados

Lema 3.1. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a > 0$, $3ac < b^2 < 4ac$, z_1 e \bar{z}_1 as raízes complexas não reais conjugadas de f ($Re(z_1)$ e $Re(\bar{z}_1)$ denotam a parte real de z_1 e de \bar{z}_1 , respectivamente), p_m o ponto de mínimo local de \mathbf{f} e p_M o ponto de máximo local de \mathbf{f} . Temos:*

i) Se $b < 0$, então $Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) > p_m > p_M > 0$.

ii) Se $b > 0$, então $Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) < p_M < p_m < 0$.

Demonstração. De $a > 0$ e $b^2 < 4ac$ segue que as raízes complexas não reais conjugadas de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$ são

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i, \quad \bar{z}_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (1)$$

De $a > 0$ e $b^2 > 3ac$ segue que os pontos críticos de \mathbf{f} são

$$p_1 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

Como $\mathbf{f}'(p_1) = 0$ e $\mathbf{f}''(p_1) = 6ap_1 + 2b = -\sqrt{4b^2 - 12ac} < 0$ segue que $p_1 \doteq p_M$ é o ponto de máximo local de \mathbf{f} . Como $\mathbf{f}'(p_2) = 0$ e $\mathbf{f}''(p_2) = 6ap_2 + 2b = \sqrt{4b^2 - 12ac} > 0$ segue que $p_2 \doteq p_m$ é o ponto de mínimo local de \mathbf{f} .

De $a > 0$, obtemos

$$p_M < p_m . \quad (2)$$

$a > 0$ e $b^2 < 4ac$ implicam $c > 0$. Como $ac > 0$ e $b^2 > 3ac$, segue que

$$0 < 4b^2 - 12ac < 4b^2 . \quad (3)$$

i) Supondo $b < 0$, de (3) temos

$$\begin{aligned} \sqrt{4b^2 - 12ac} &< -2b \\ \Rightarrow -2b - \sqrt{4b^2 - 12ac} &> 0 \\ \Rightarrow p_M &> 0 . \end{aligned} \quad (4)$$

Por fim, de $3ac < b^2 < 4ac$, $b < 0$ e $a > 0$ temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b^2 > 3ac \\ b^2 < 4ac \\ b < 0 \\ a > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4b^2 - 12ac > 0 \\ 4b^2 - 12ac < b^2 \\ b < 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < 4b^2 - 12ac < b^2 \\ b < 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4b^2 - 12ac} < -b \\ a > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{-b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} > 0 \\ &\Rightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} > 0 \\ &\Rightarrow -\frac{b}{2a} > \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) > p_m . \end{aligned} \quad (5)$$

Portanto, de (2), (4) e (5) segue a tese.

ii) Supondo $b > 0$, de (3) temos

$$\begin{aligned} \sqrt{4b^2 - 12ac} &< 2b \\ \Rightarrow -2b + \sqrt{4b^2 - 12ac} &< 0 \\ \Rightarrow p_m &< 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Por fim, de $3ac < b^2 < 4ac$, $b > 0$ e $a > 0$ temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b^2 > 3ac \\ b^2 < 4ac \\ b > 0 \\ a > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4b^2 - 12ac > 0 \\ 4b^2 - 12ac < b^2 \\ b > 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < 4b^2 - 12ac < b^2 \\ b > 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4b^2 - 12ac} < b \\ a > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{-b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} < 0 \\ &\Rightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} < 0 \\ &\Rightarrow -\frac{b}{2a} < \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) < p_M. \end{aligned} \tag{7}$$

Portanto, de (2), (6) e (7) segue a tese. □

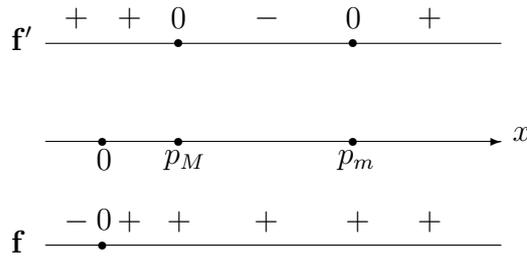
Teorema 3.1. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a > 0$, $3ac < b^2 < 4ac$, z_1 e \bar{z}_1 as raízes complexas não reais conjugadas de f , p_m o ponto de mínimo local de \mathbf{f} e p_M o ponto de máximo local de \mathbf{f} . Definindo $g = f + d$, $d \in \mathbb{R}$, temos:*

i) Se $b < 0$ e $d > 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $\operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(\bar{z}_2) > \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(\bar{z}_1) > p_m > p_M > 0$, em que $p_M(p_m)$ é o ponto de máximo (mínimo) local da função polinomial \mathbf{g} definida por g .

ii) Se $b > 0$ e $d < 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $\operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(\bar{z}_2) < \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(\bar{z}_1) < p_M < p_m < 0$, em que $p_M(p_m)$ é o ponto de máximo (mínimo) local da função polinomial \mathbf{g} definida por g .

Demonstração. 0 é raiz de $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pois $\mathbf{f}(0) = 0$. E é a única raiz real.

i) Da variação do sinal de f' e de (2) e (4), podemos identificar os sinais de f :



A Figura 13 corresponde ao gráfico de f . Dado $d > 0$, deslocamos cada ponto do gráfico de f “ d ” unidades “para cima” para obter na Figura 14 o gráfico de g .

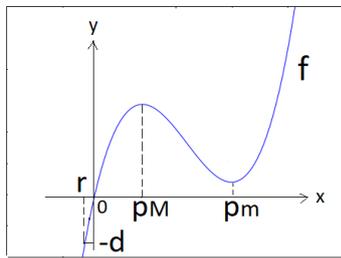


Figura 13: Gráfico de f

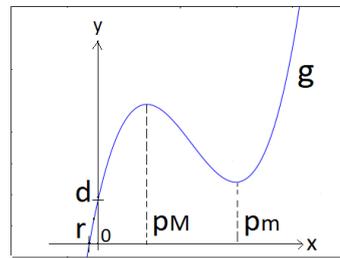


Figura 14: Gráfico de g

As raízes de f são: $0, z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \bar{z}_1 = \alpha_1 - \beta_1 i$, em que $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$ (veja (1)). A soma das raízes de f é

$$2\alpha_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}. \tag{8}$$

Tome $-d \in \mathbb{R}$ (Figura 13). Como $f(0) = 0, f$ é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é sobrejetora, segue que existe um único $r \in]-\infty, 0[$ tal que $f(r) = ar^3 + br^2 + cr = -d \implies ar^3 + br^2 + cr + d = 0 \implies g(r) = 0$. Isto é, r é raiz real de g (Figura 14).

As raízes de g são: $r, z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i, \bar{z}_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$, em que $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_2 > 0$. Das Relações de Girard, tiramos que a soma das raízes de g é

$$r + 2\alpha_2 = -\frac{b}{a}. \tag{9}$$

De (8) e (9) decorre que

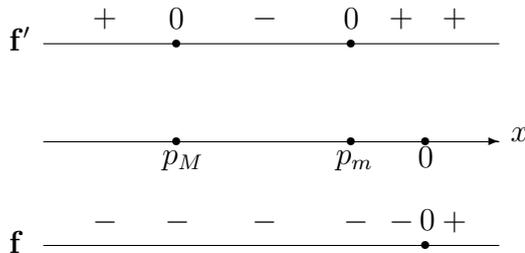
$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{r}{2} \implies \alpha_2 > \alpha_1, \text{ pois } r < 0. \tag{10}$$

Os pontos de máximo local (p_M) e de mínimo local (p_m) de f são os mesmos de g , pois $g'(p_M) = 0, g''(p_M) < 0$ e $g'(p_m) = 0, g''(p_m) > 0$. Como já dissemos, graficamente só se faz um deslocamento de “ d ” unidades “para cima” no gráfico de

f para obter o de g. Portanto, de (10) e do Lema 3.1 i) concluímos que

$$\underbrace{\alpha_2}_{\text{Re}(z_2)} > \underbrace{\alpha_1}_{\text{Re}(z_1)} > p_m > p_M > 0.$$

ii) Da variação do sinal de f' e de (2) e (6), podemos identificar os sinais de f :



A Figura 15 corresponde ao gráfico de f . Dado $d < 0$, deslocamos cada ponto do gráfico de f “ d ” unidades “para baixo” para obter na Figura 16 o gráfico de g .

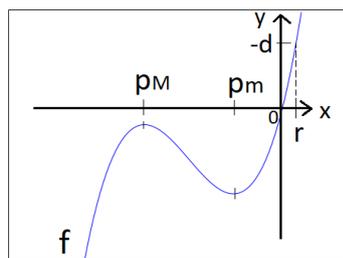


Figura 15: Gráfico de f

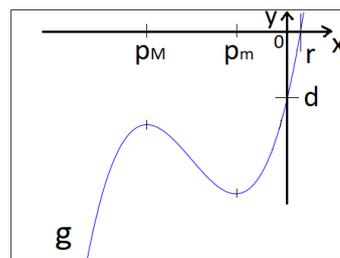


Figura 16: Gráfico de g

As raízes de f são: $0, z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \bar{z}_1 = \alpha_1 - \beta_1 i$, em que $\alpha_1 < 0, \beta_1 > 0$ (veja (1)). A soma das raízes de f é

$$2\alpha_1 = -\frac{b}{a}. \tag{11}$$

Tome $-d \in \mathbb{R}$ (Figura 15). Como $f(0) = 0$, f é estritamente crescente em $]0, \infty[$ e é sobrejetora, segue que existe um único $r \in]0, \infty[$ tal que $f(r) = ar^3 + br^2 + cr = -d \implies ar^3 + br^2 + cr + d = 0 \implies g(r) = 0$. Isto é, r é raiz real de g (Figura 16).

As raízes de g são: $r, z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i, \bar{z}_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$, em que $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_2 > 0$. Das Relações de Girard, tiramos que a soma das raízes de g é

$$r + 2\alpha_2 = -\frac{b}{a}. \tag{12}$$

De (11) e (12) decorre que

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{r}{2} \implies \alpha_2 < \alpha_1, \text{ pois } r > 0. \quad (13)$$

Os pontos de máximo local (p_M) e de mínimo local (p_m) de \mathbf{f} são os mesmos de \mathbf{g} , pois $\mathbf{g}'(p_M) = 0$, $\mathbf{g}''(p_M) < 0$ e $\mathbf{g}'(p_m) = 0$, $\mathbf{g}''(p_m) > 0$. Como já dissemos, graficamente só se faz um deslocamento de “d” unidades “para baixo” no gráfico de \mathbf{f} para obter o de \mathbf{g} . Portanto, de (13) e do Lema 3.1 ii) concluímos que

$$\underbrace{\alpha_2}_{\text{Re}(z_2)} < \underbrace{\alpha_1}_{\text{Re}(z_1)} < p_M < p_m < 0.$$

□

Exemplo 3.1. *A parte real das raízes complexas não reais conjugadas de $g(x) = 2x^3 - 8,9x^2 + 10x + 5$ é maior do que o ponto de mínimo local de \mathbf{g} .*

Solução.

As condições do Teorema 3.1 i) estão satisfeitas, pois $a = 2 > 0$, $b = -8,9 < 0$, $c = 10$, $d = 5 > 0$ e $3 \cdot 2 \cdot 10 < (-8,9)^2 < 4 \cdot 2 \cdot 10$.

Temos

$$p_M = \frac{17,8 - \sqrt{316,84 - 240}}{12} \approx 0,75 \text{ (ponto de máximo local),}$$

$$p_m = \frac{17,8 + \sqrt{316,84 - 240}}{12} \approx 2,21 \text{ (ponto de mínimo local).}$$

Portanto, sendo z_2 raiz complexa não real de g , segue que

$$\text{Re}(z_2) > p_m \approx 2,21.$$

Com uma calculadora encontramos as raízes de g ($r \approx -0,37$, $z_2 \approx 2,41 + 0,99i$, $\bar{z}_2 \approx 2,41 - 0,99i$). Veja a Figura 17 para o Exemplo 3.1.

Exemplo 3.2. *A parte real das raízes complexas não reais conjugadas de $g(x) = 2x^3 + 8,9x^2 + 10x - 5$ é menor do que o ponto de máximo local de \mathbf{g} .*

Solução.

As condições do Teorema 3.1 ii) estão satisfeitas, pois $a = 2 > 0$, $b = 8,9 > 0$, $c = 10$, $d = -5 < 0$ e $3 \cdot 2 \cdot 10 < (8,9)^2 < 4 \cdot 2 \cdot 10$.

Temos

$$p_M = \frac{-17,8 - \sqrt{316,84 - 240}}{12} \approx -2,21 \quad (\text{ponto de máximo local}),$$

$$p_m = \frac{-17,8 + \sqrt{316,84 - 240}}{12} \approx -0,75 \quad (\text{ponto de mínimo local}).$$

Portanto, sendo z_2 raiz complexa não real de g , segue que

$$\operatorname{Re}(z_2) < p_M \approx -2,21 .$$

Com uma calculadora encontramos as raízes de g ($r \approx 0,37$, $z_2 \approx -2,41 + 0,99i$, $\bar{z}_2 \approx -2,41 - 0,99i$). Veja a Figura 18 para o Exemplo 3.2.

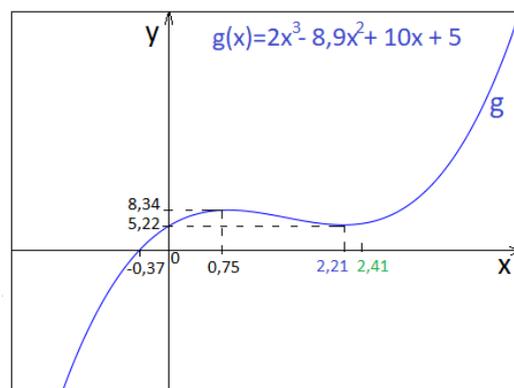


Figura 17: $\operatorname{Re}(z_2) \approx 2,41 > p_m \approx 2,21$

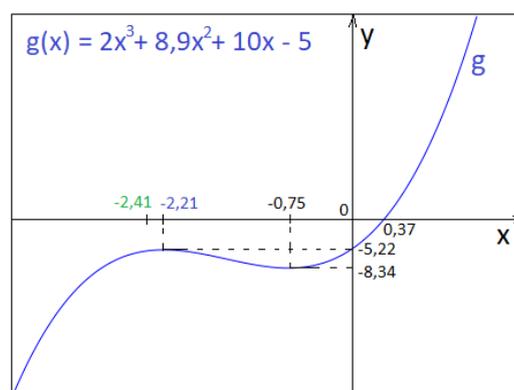


Figura 18: $\operatorname{Re}(z_2) \approx -2,41 < p_M \approx -2,21$

Corolário 3.1. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a < 0$, $3ac < b^2 < 4ac$, z_1 e \bar{z}_1 as raízes complexas não reais conjugadas de f , p_m o ponto de mínimo*

local de \mathbf{f} e p_M o ponto de máximo local de \mathbf{f} . Definindo $g = f + d$, $d \in \mathbb{R}$, temos:

i) Se $b > 0$ e $d < 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $Re(z_2) = Re(\bar{z}_2) > Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) > p_M > p_m > 0$, em que $p_M(p_m)$ é o ponto de máximo (mínimo) local da função polinomial \mathbf{g} definida por g .

ii) Se $b < 0$ e $d > 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $Re(z_2) = Re(\bar{z}_2) < Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) < p_m < p_M < 0$, em que $p_M(p_m)$ é o ponto de máximo (mínimo) local da função polinomial \mathbf{g} definida por g .

Demonstração. i) Os coeficientes de g do Corolário 3.1 i) são opostos aos coeficientes de g do Teorema 3.1 i), que são $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ e $d > 0$. Logo, as raízes são as mesmas e o gráfico da função \mathbf{g} do Corolário 3.1 i) é uma reflexão em relação ao eixo x do gráfico da função \mathbf{g} do Teorema 3.1 i). O ponto de máximo local da função \mathbf{g} do Teorema 3.1 i) é o ponto de mínimo local da função \mathbf{g} do Corolário 3.1 i); o ponto de mínimo local da função \mathbf{g} do Teorema 3.1 i) é o ponto de máximo local da função \mathbf{g} do Corolário 3.1 i). Idem para f : os coeficientes de f do Corolário 3.1 i) são opostos aos coeficientes de f do Teorema 3.1 i), logo suas raízes são as mesmas. Portanto, $Re(z_2) = Re(\bar{z}_2) > Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) > p_M > p_m > 0$. Veja a Figura 19.

ii) Faz-se a mesma análise para g do Corolário 3.1 ii) e para g do Teorema 3.1 ii), que têm sinais contrários. Idem para f .

□

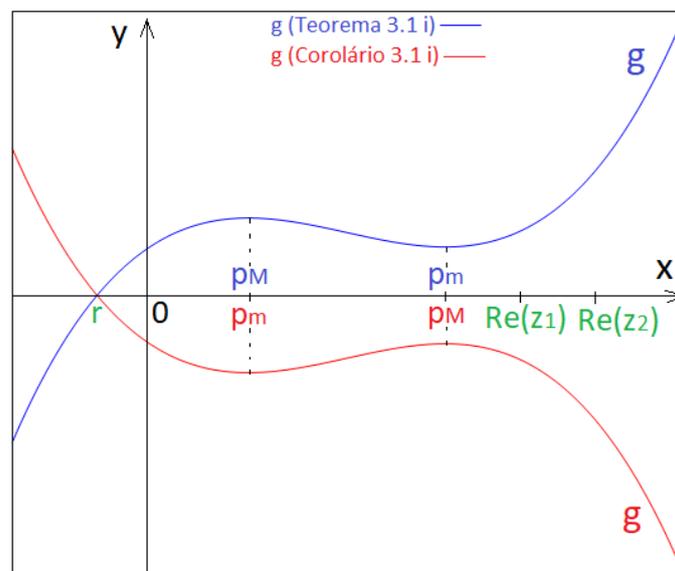


Figura 19: Comparativo entre o Teorema 3.1 i) e o Corolário 3.1 i)

Lema 3.2. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a > 0$, $b^2 = 3ac$, z_1 e \bar{z}_1 as raízes complexas não reais conjugadas de f e p a abscissa do ponto de inflexão de \mathbf{f} . Temos:*

- i) Se $b < 0$, então $Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) > p > 0$.*
- ii) Se $b > 0$, então $Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) < p < 0$.*

Demonstração. De $a > 0$ e $b^2 = 3ac$ vem:

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{ac}}{2a}i, \quad \bar{z}_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{ac}}{2a}i$$

e que o ponto crítico de \mathbf{f} é

$$p_1 = -\frac{b}{3a}.$$

Como $\mathbf{f}''(p_1) = 6ap_1 + 2b = 0$ e $\mathbf{f}'''(p_1) = 6a > 0$, segue que $p_1 \doteq p$ é a abscissa do ponto de inflexão de \mathbf{f} .

$$i) \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \implies -\frac{b}{2a} > -\frac{b}{3a} > 0 \implies Re(z_1) > p > 0.$$

$$ii) \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \implies -\frac{b}{2a} < -\frac{b}{3a} < 0 \implies Re(z_1) < p < 0.$$

□

Teorema 3.2. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a > 0$, $b^2 = 3ac$, z_1 e \bar{z}_1 as raízes complexas não reais conjugadas de f e p a abscissa do ponto de inflexão de \mathbf{f} . Definindo $g = f + d$, $d \in \mathbb{R}$, temos:*

i) Se $b < 0$ e $d > 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $Re(z_2) = Re(\bar{z}_2) > Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) > p > 0$, em que p é a abscissa do ponto de inflexão da função polinomial \mathbf{g} definida por g .

ii) Se $b > 0$ e $d < 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $Re(z_2) = Re(\bar{z}_2) < Re(z_1) = Re(\bar{z}_1) < p < 0$, em que p é a abscissa do ponto de inflexão da função polinomial \mathbf{g} definida por g .

Demonstração. É similar à do Teorema 3.1, usando o Lema 3.2. □

Exemplo 3.3. *A parte real das raízes complexas não reais conjugadas de $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ é maior do que a abscissa do ponto de inflexão de \mathbf{g} .*

Solução. As condições do Teorema 3.2 i) estão satisfeitas, pois $a = 1 > 0$, $b = -3 < 0$, $c = 3$, $d = 4 > 0$ e $(-3)^2 = 3 \cdot 1 \cdot 3$.

Temos

$$p = 1 \quad (\text{abscissa do ponto de inflexão}).$$

Portanto, sendo z_2 raiz complexa não real de g , segue que

$$\operatorname{Re}(z_2) > 1.$$

Com uma calculadora encontramos as raízes de g ($r \approx -0,71$, $z_2 \approx 1,85 + 1,48i$, $\bar{z}_2 \approx 1,85 - 1,48i$). Veja a Figura 20 para o Exemplo 3.3.

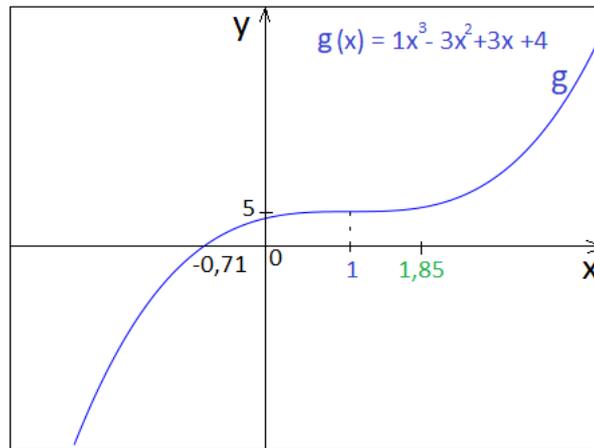


Figura 20: $\operatorname{Re}(z_2) \approx 1,85 > p = 1$

Corolário 3.2. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x]$ dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a < 0$, $b^2 = 3ac$, z_1 e \bar{z}_1 as raízes complexas não reais conjugadas de f e p a abscissa do ponto de inflexão de f . Definindo $g = f + d$, $d \in \mathbb{R}$, temos:*

i) *Se $b > 0$ e $d < 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $\operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(\bar{z}_2) > \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(\bar{z}_1) > p > 0$, em que p é a abscissa do ponto de inflexão da função polinomial g definida por g .*

ii) *Se $b < 0$ e $d > 0$, então as raízes complexas não reais conjugadas de g , z_2 e \bar{z}_2 , são tais que $\operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(\bar{z}_2) < \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(\bar{z}_1) < p < 0$, em que p é a abscissa do ponto de inflexão da função polinomial g definida por g .*

Demonstração. É similar à do Corolário 3.1. □

Exemplo 3.4. A parte real das raízes complexas não reais conjugadas de $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x - 4$ é maior do que a abscissa do ponto de inflexão de g .

Solução. As condições do Corolário 3.2 i) estão satisfeitas, pois $a = -1 < 0, b = 3 > 0, c = -3, d = -4 < 0$ e $3^2 = 3 \cdot (-1) \cdot (-3)$.

Temos

$$p = 1 \quad (\text{abscissa do ponto de inflexão}).$$

Portanto, sendo z_2 raiz complexa não real de g , segue que

$$\operatorname{Re}(z_2) > 1.$$

Com uma calculadora encontramos as raízes de g ($r \approx -0,71, z_2 \approx 1,85 + 1,48i, \bar{z}_2 \approx 1,85 - 1,48i$). Veja a Figura 21 para o Exemplo 3.4.

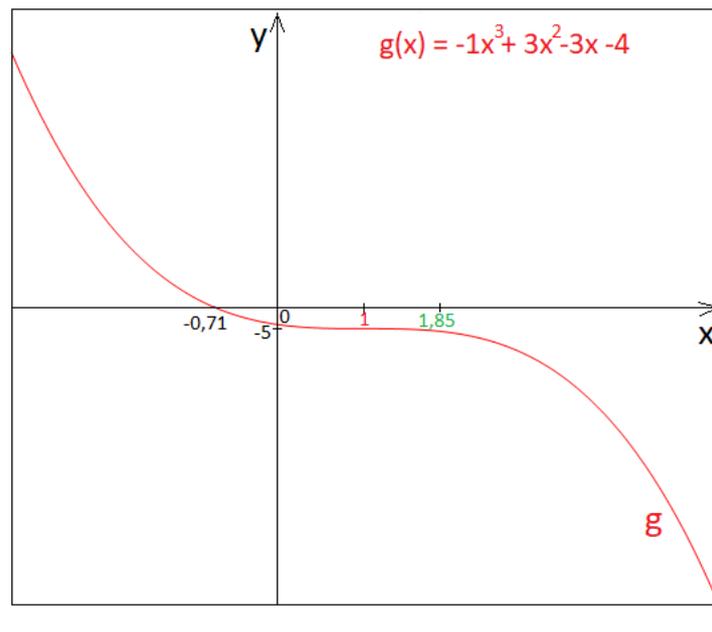


Figura 21: $\operatorname{Re}(z_2) \approx 1,85 > p = 1$

Todos os desenhos dos gráficos das funções neste artigo foram obtidos pelo software Maxima.

4 Conclusão

Na Seção 2 apresentamos um procedimento para caracterizar as raízes do polinômio do 3º grau $f \in \mathbb{R}[x]$ calculando a função polinomial do 3º grau $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no(s)

seu(s) ponto(s) crítico(s), quando este(s) existe(m). Quando há pelo menos uma raiz real e pelo menos um ponto crítico podemos estabelecer uma ordem entre a raiz (as raízes) e o(s) ponto(s) crítico(s). Esta ordem está especificada em: i) nas legendas das Figuras 4 a 11, para $a > 0$; ii) nas caracterizações 1. a 8. da Observação 2.1, para $a < 0$. Na Seção 3 fizemos um comparativo entre a parte real das raízes complexas não reais conjugadas do polinômio do 3^o grau $g \in \mathbb{R}[x]$ e o(s) ponto(s) crítico(s) da função polinomial do 3^o grau $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para alguns casos particulares.

Agradecimentos

Agradeço ao parecerista anônimo pelas sugestões e pela correção que contribuíram para a melhoria do trabalho.

Referências

- [1] GUIDORIZZI, H. L.: **Um Curso de Cálculo**, v.1, 6^aed., São Paulo: LTC, 2001.
- [2] IEZZI, G.: **Fundamentos de Matemática Elementar**, v.7, 4^aed., São Paulo: LTC, 1993.
- [3] IEZZI, G.: **Fundamentos de Matemática Elementar**, v.6, 6^aed., São Paulo: LTC, 1995.
- [4] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.: **Fundamentos de Matemática Elementar**, v.1, 7^aed., São Paulo: LTC, 1996.
- [5] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J.: **Fundamentos de Matemática Elementar**, v.8, 4^aed., São Paulo: LTC, 1985.
- [6] LIMA, E. L.: **A Equação do Terceiro Grau**; Matemática Universitária, n^o5, p.9-23, 1987.
- [7] SOUZA, F.N. B.: **Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas**; Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.