Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2021.59738
Recebido em 10 Maio 2021 | Aceito em 24 Maio 2021

Padrões Numéricos

Numeric Patterns

Mário Olivero Marques da Silva [a]

Abstract

Nestas notas chamamos a atenção para padrões existentes nas somas iteradas dos números obtidos dos períodos das dízimas periódicas de frações da forma $\frac{1}{p}$, para p primos maiores do que 5. Esta rica fonte de padrões pode servir de estímulo aos estudantes de Matemática, mesmo de nível elementar, pois lidamos apenas com conceitos introdutórios e com as operações básicas de números. Para as situações nas quais estes cálculos se tornam volumosos, sugerimos o uso do programa livre PARI/GP. Os comandos mais usados para tanto serão exemplificadas no fim do trabalho.

Palavras-chave: Frações, Números Racionais, Padrões Numéricos, Números Cíclicos.

Abstract

In these notes, we draw attention to patterns existing in the iterated sums of numbers obtained from periods of periodic tithes of fractions of the form $\frac{1}{p}$, for p primes grather than 5. This rich source of patterns can serve as a stimulus for mathematics students, even at the elementary level, since we only deal with introductory concepts and basic number operations. For situations in which these calculations become bulky, we suggest using the free PARI/GP program. The most used commands for this purpose will be exemplified at the end of the work.

Key-words: Fractions, Rational Numbers, Numeric Patterns, Cyclic Numbers.

MSC2010: 97F40

[a]Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil; ORCID: **E-mail:** mariolivero@id.uff.br

1 Introdução

Nestas notas trataremos de números e padrões, mas antes de nos envolver diretamente com o tema, vamos abordar rapidamente estas coisas separadamente.

Número é essencial para a Matemática, talvez seja a sua substância primeira, no sentido que é o que ocorre à maioria das pessoas quando a Matemática é mencionada. Não é incomum ouvir: 'Não sou muito bom com números', mas raramente alguém leva troco errado para casa.

Número não é o único conceito essencial à Matemática, formas e figuras também têm papel preponderante, mas é impossível negar o poder icônico dos números. E nunca os números estiveram tão presentes, foram tão usados nas atividades humanas. Códigos de barra, senhas de cartões, identificações numéricas. À medida em que a tecnologia se dissemina, os números surgem por todos os lados, fazendo valer de maneira contundente a frase atribuída a Pitágoras: 'Tudo é número!'

Civilizações do passado lidaram com números de formas diferentes e essas diferentes maneiras de tratar os números afetaram seus desenvolvimentos. É impossível lidar com números sem representá-los. Portanto, precisamos dos numerais. Sem enveredar por este caminho, basta lembrar que os gregos e romanos representavam os números por letras e certamente isto refletia a maneira como eles pensavam a Matemática. Devemos a criação do Sistema Numérico que usamos aos hindus e a sua disseminação aos árabes. Para a propagação deste Sistema Numérico no Ocidente, foi fundamental as ações de Leonardo Pisano, o Fibonacci, e seu livro *Liber Abaci*. O sistema é tão funcional, tão útil, que não nos damos conta de sua importância nem consideramos muito como ele influencia nossa maneira de pensar ou produzir Matemática. No entanto, este é o caso com as ciências, de um modo em geral. Quando funciona tão bem assim, como no caso do Sistema Numérico Decimal, não nos damos tanta conta de sua importância.

Notemos como a representação dos números é importante. Por exemplo, para representarmos os números irracionais mais destacados, aqueles que afloram com mais frequência em nossas atividades, adotamos a estratégia de atribuir a eles um nome, um 'apelido'. Para a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro, usamos π. Para o comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1, usamos $\sqrt{2}$. Mas, a grande, imensa maioria dos números irracionais permanece no anonimato.

E os padrões? O que podemos dizer sobre eles? Os padrões são evidências da presença de Matemática nas coisas. É através da percepção dos padrões que buscamos organizar nossos pensamentos, construir as leis, os princípios das ciências, em particular da Matemática. Descobrir e entender padrões matemáticos é uma das melhores maneiras de atrair alguém para as atividades matemáticas. O esforço para entender e identificar um padrão, quando alcança êxito, resulta em uma sensação sem igual. Neste trabalho vamos apresentar uma fonte bastante rica de padrões numéricos que pode servir de estímulo aos estudantes de Matemática, mesmo de nível elementar, pois que lidaremos apenas com as operações básicas de números.

2 Números e suas representações decimais

Vamos mencionar alguns fatos básicos, o que nos ajudará a estabelecer alguma nomenclatura. Lembramos que qualquer número real $0 < x < 1$ admite uma *reaprresentação decimal*

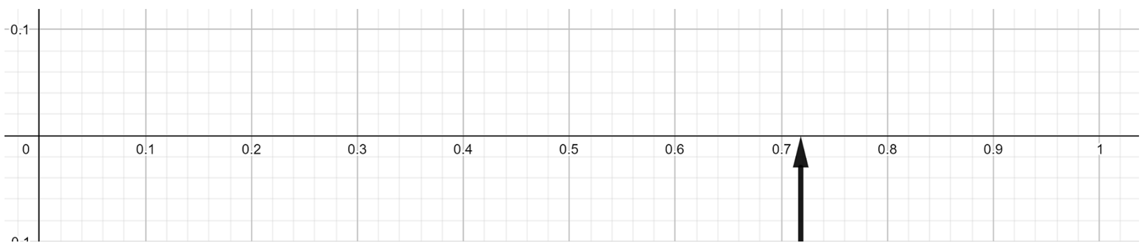
$$0, d_1 d_2 d_3 \ldots, \qquad d_i \in \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 9\,\}.$$

Ou seja,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{10^i} \;=\; \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots$$

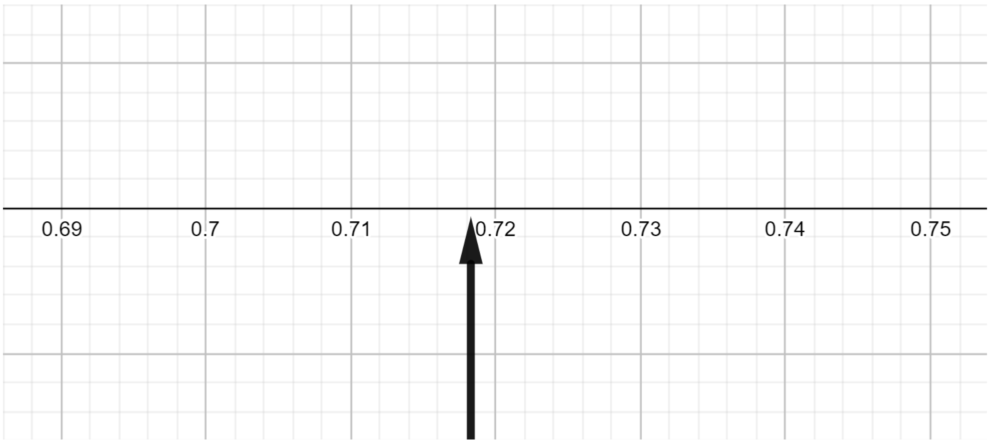
Do ponto de vista geométrico $0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ é o *endereço* do número real $x \in (0\ ,\ 1) \subset \mathbb{R}$ na sua identificação com um ponto da reta real. Por exemplo, no caso $e - 2 = 0,7182818\ldots$, $d_1 = 7$ indica que $e - 2$ pertence ao oitavo décimo do intervalo $[0\ ,\ 1]$. Isto é, $x = e - 2 \in [0{,}7\ ,\ 0{,}8] \subset [0\ ,\ 1]$.

Figure 1: $e - 2 \in [0{,}7\ ,\ 0{,}8]$



A segunda *casa* $d_2 = 1$ indica que $e - 2$ pertence ao segundo décimo deste subintervalo: $x = e - 2 \in [0{,}71\ ,\ 0{,}72] \subset [0{,}7\ ,\ 0{,}8]$.

Figure 2: $e - 2 \in [0{,}71\ ,\ 0{,}72]$



No caso $d_3 = 8$, a indicação é $e - 2 \in [0{,}718\ ,\ 0{,}719]$.

Figure 3: $e - 2 \in [0{,}718\ ,\ 0{,}719] \subset [0{,}71\ ,\ 0{,}72]$

Se, a partir de uma certa casa decimal, a representação apresenta um padrão de repetição infinita de um algarismo ou de um grupo de algarismos, isto é, um comportamento periódico, chamamos a representação de uma *dízima periódica*. Por exemplo,

$$\frac{1201}{9900} = 0,121313131313... = 0,12\overline{13}.$$

Se os algarismos da parte que se repete são todos nulos, dizemos que a representação é *finita*, como em

$$\frac{125}{1000} = 0,12500000.... = 0,125.$$

As representações decimais dos números reais $0 < x < 1$ são únicas, com exceção dos casos nos quais os números representados são da forma $\dfrac{q}{10^n}$, para algum $q \in \mathbb{N}$, que também admitem uma representação finita. Nestes casos, o número admite uma segunda representação periódica, obtida da representação finita pela substituição do seu último dígito não nulo d_k por $d_k - 1$ e acrescentando o dígito 9 em todas as casas decimais a seguir. Por exemplo,

$$\frac{23}{100} = 0,23 = 0,229999.... = 0,22\overline{9}.$$

Como referência para estes fatos, veja [2, pp. 29-38]. Em especial, veja o exercício 21 [2, p. 38]. Veja também a página de internet Oxford Reference [3].

Com estas informações e notações em mente, vamos considerar o conjunto dos números racionais para a nossa busca pelos padrões do enunciado. Lembramos que os números irracionais são os números reais cujas representações decimais demandam uma infinidade de casas decimais não nulas e não periódicas.

O conjunto dos números racionais se divide em dois subconjuntos: o subconjunto dos números que admitem uma representação decimal finita e o subconjunto dos números cuja representação decimal é (necessariamente) infinita, porém periódica. Mais especificamente, vejamos o teorema a seguir.

No enunciado do teorema, usaremos a notação (p, q) para indicar o máximo divisor comum entre p e q. Além disso, $p|q$ significa que p divide q ou q é divisível por p. A negação desta afirmação é denotada por $p \nmid q$.

Teorema 1: *Seja $\frac{p}{q}$ um número racional e vamos supor que $q > p > 0$, p e q primos entre si. Isto é, $(p, q) = 1$. A representação decimal de $\frac{p}{q}$ é finita se, e somente se, $q = 2^n\, 5^m$, com n, m inteiros não negativos.*

Prova: Vamos começar supondo que $\frac{p}{q}$ tenha uma representação decimal finita. Então, existe a, um inteiro positivo tal que

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{2^r\, 5^r},$$

para algum $r \in \mathbb{N}$.

Portanto, $aq = 2^r\, 5^r\, p$ e como $(p, q) = 1$, necessariamente $p|a$ (p divide a). Portanto, existe um inteiro positivo b tal que $a = b\,p$. Assim, substituindo em $aq = 2^r\, 5^r\, p$ e simplificando, temos que $b\,q = 2^r\, 5^r$.

Pela unicidade da decomposição de um número inteiro em fatores primos, os únicos primos que podem ocorrer na decomposição tanto de b como de q são 2 ou 5. Assim, existem inteiros não negativos n e m tais que $q = 2^n\, 5^m$, o que completa esta etapa da prova.

Para o Teorema Fundamental da Aritmética, que trata da fatoração de inteiros em números primos, veja [1, p. 83]

Por outro lado, suponhamos que $q = 2^n\, 5^m$. Então

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^n\, 5^m} = \begin{cases} \dfrac{p}{10^n}, & \text{se } n = m \\ \dfrac{5^{n-m}p}{10^n}, & \text{se } n > m, \\ \dfrac{2^{m-n}p}{10^m}, & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Em todos os três casos, a representação obtida é finita.

3 Padrões

Vamos analisar os padrões que podem surgir nas listas das somas iteradas de números obtidos considerando as sequências de dígitos que formam os períodos das representações decimais de números racionais de representações infintas. Vamos nos concentrar no caso dos racionais da forma $\frac{1}{p}$, com $p > 0$ primo. Isso evita, por exemplo, a parte da representação decimal que antecede a parte periódica. Veremos, para começar, um resultado muito interessante. Ele afirma que o comprimento do período da dízima periódica resultante de $\frac{1}{p}$, para $p > 5$, é um divisor de $p - 1$ e, portanto, seu comprimento é, no máximo, $p - 1$.

Exemplo: Se tomarmos $p = 7$, $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ e temos uma situação na qual o comprimento máximo ocorre. No caso em que $p = 13$, temos $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ e o comprimento do período é igual a 6, que divide $(13 - 1)$.

Vamos enunciar este resultado como um teorema:

Teorema 2: *Seja p um número primo diferente de 2 ou de 5. O comprimento do período da representação decimal da fração $\frac{1}{p}$ divide $p - 1$.*

Para demonstrar este resultado, usamos um resultado decorrente do chamado Pequeno Teorema de Fermat, cuja demonstração pode ser encontrada em [1, pp. 92-93]. Veja os enunciados:

Pequeno Teorema de Fermat: *Dado um primo p, tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.*

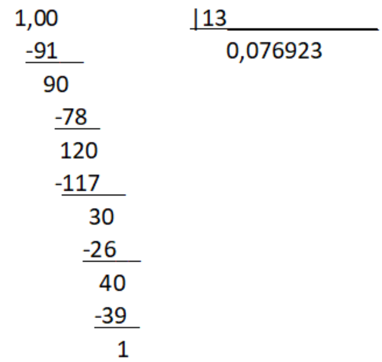
Corolário: *Se p é um número primo e se a é um número natural não divisível por p, então p divide $a^{p-1} - 1$*

Lembramos que, se a, b e $m > 1$ são inteiros, a notação $a = b \mod m$, a qual se lê "a é igual a b módulo m", significa que $m|(b-a)$. Ou seja, se existe k inteiro tal que $a = b + k\,m$. Por exemplo, $17 = 1 \mod 4$ e todo número ímpar é igual a 1 módulo 2.

Com esta notação, o Corolário do Pequeno Teorema de Fermat afirma que, se p é um primo e $p \nmid a$, então $a^{p-1} = 1 \mod p$.

Prova do Teorema 2: A Divisão Euclidiana nos permite determinar o período da dízima periódica que representa $\frac{1}{p}$. O período fica determinado na passagem do algoritmo em que o resto da divisão é igual a 1. Veja o exemplo no qual $p = 13$:

Figure 4: Divisão de Euclidiana



Como p é diferente de 2 ou 5, $p \nmid 10$. Portanto, o Corolário do Pequeno Teorema de Fermat afirma que a divisão de 10^{p-1} por p tem resto 1. Isto quer dizer que o comprimento do período da representação decimal de $\frac{1}{p}$ é no máximo $p-1$, uma vez que ao procedermos o algoritmo de divisão de 1 por p, no passo $p-1$ teremos resto 1 e o ciclo recomeçará. Mas isto também quer dizer que o comprimento do período é um divisor de $p-1$, no caso em que a divisão tenha alcançado resto 1 antes do passo $p-1$.

Observação 1: Note que devido ao fato de o período da dízima periódica, considerado como um número inteiro, ter sido obtido da divisão de uma potência de 10 por p, com resto 1, ele é divísivel por 9. Portanto, a soma de seus algarismos é divisível por 9. Assim, certos grupamentos de seus algarismos somam 9. Veja os casos já citados, $p = 7$, no qual o período é 142857 $(1+8,\ \ 4+5,\ 2+7)$ e $p = 13$, no qual temos período igual 076923 $(0+9,\ 7+2,\ 6+3)$. Realmente, note que $7 \times 142857 = 999999$ e $13 \times 076923 = 999999$.

Observação 2: O comprimento do período, isto é, o número de dígitos do período, leva em conta eventuais zeros que possam aparecer no seu início. Por exemplo, para $p = 37$, temos $\frac{1}{37} = 0,\overline{027}$, um período de comprimento 3, que divide 36. No caso de $p = 101$, temos $\frac{1}{101} = 0,\overline{0099}$, um período de comprimento 4, que divide 100. Estes dois exemplos são situações nas quais os períodos são relativamente curtos em relação a $p - 1$.

3.1 Tabelas com Padrões Interessantes

Dado $p > 5$ um número primo, seja l o comprimento do período da dízima periódica que representa $\frac{1}{p}$. O Teorema 2 nos diz que se arranjarmos os l primeiros dígitos das dízimas periódicas que representam os números $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}$, em uma coluna, obteremos uma tabela de números na qual afloram alguns padrões interessantes. Nesta seção vamos discutir e exemplificar alguns deles.

3.2 Números Cíclicos

O caso mais notório desta situação ocorre quando o período da dízima periódica que representa $\frac{1}{p}$ tem comprimento máximo $p - 1$. Neste caso $l = p - 1$ e cada um dos números da tabela contém os mesmos $p - 1$ dígitos, porém dispostos em uma diferente ordem cíclica. Note que a disposição desses números obedece a ordem crescente, na medida que passamos das primeiras linhas para as seguintes. Os primos com esta propriedade são chamados *primos longos.* Vejamos o famoso caso em que $p = 7$ e $l = 7 - 1 = 6$, na Tabela 1. Lembre que $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

Table 1: Somas iteradas para $p = 7$

$1\times$	142857	$=$	142857
$2\times$	142857	$=$	285714
$3\times$	142857	$=$	428571
$4\times$	142857	$=$	571428
$5\times$	142857	$=$	714285
$6\times$	142857	$=$	857142

Fonte: Autoral

Note que todas as permutações cíclicas do número 142857, com os dígitos mudando sempre da direita para a esquerda, aparecem na lista, mas não necessariamente na ordem de alteração cíclica de um dígito de cada vez, uma vez que estão dispostos na ordem crescente. Veja nos exemplos a seguir.

$$1\ 4\ \underline{2\ 8\ 5\ 7} \quad \longleftarrow \quad \underline{2\ 8\ 5\ 7}\ 1\ 4$$

$$2\ 8\ 5\ 7\ 1\ \underline{4} \quad \longleftarrow \quad \underline{4}\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1$$

Isto se dá pois, na lista, estão as somas iteradas e os números ficam dispostos em ordem crescente: $142857 < 285714 < 428571 < \ldots$

Este caso, no qual o comprimento do período é máximo ($l = p - 1$), é particularmente notório pois o período desta dízima define um *número cíclico*.

Um número cíclico n é tal que, ao ser multiplicado por $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n-1$ sempre produz números com os mesmos dígitos dispostos em um diferente ordem (cíclica), exatamente como no caso de 142857.

Algumas perguntas sobre estes números continuam sem respostas até o momento. Por exemplo, não se sabe se há um número infinito deles. Há uma conjectura que estima que a parte dos primos longos (primos que geram um número cíclico) é proporcional à Constante de Artin $C = 0,3739558136...$ Por exemplo, a fração de primos longos entre os primos menores ou iguais a 10^{10} é $0,3739551$. Veja na página da Wolfram MathWorld para mais detalhes sobre os números cíclicos podem ser encontrados na página da Wolfram Math World [4].

Além disso, não se conhece um número cíclico que não seja obtido como o período do inverso de um primo cujo comprimento seja $p - 1$.

Vejamos outro exemplo de um número cíclico, para $p = 17$, nas Tabelas 2 e 3.

Table 2: Somas iteradas para $p = 17$

$1\times$	588235294117647	=	588235294117647
$2\times$	588235294117647	=	1176470588235294
$3\times$	588235294117647	=	1764705882352941
$4\times$	588235294117647	=	2352941176470588
$5\times$	588235294117647	=	2941176470588235
$6\times$	588235294117647	=	3529411764705882
$7\times$	588235294117647	=	4117647058823529
$8\times$	588235294117647	=	4705882352941176

Fonte: Autoral

Table 3: Somas iteradas para $p = 17$, continuação

$9\times$	588235294117647	=	5294117647058823
$10\times$	588235294117647	=	5882352941176470
$11\times$	588235294117647	=	6470588235294117
$12\times$	588235294117647	=	7058823529411764
$13\times$	588235294117647	=	7647058823529411
$14\times$	588235294117647	=	8235294117647058
$15\times$	588235294117647	=	8823529411764705
$16\times$	588235294117647	=	9411764705882352

Fonte: Autoral

3.3 O Caso da Metade do Comprimento

Como estamos lidando com p primo maior do que 5, $p-1$ é um número par e há casos nos quais o número de dígitos do período de $\frac{1}{p}$ é $\frac{p-1}{2}$. Nestes casos não temos um número cíclico, como na situação anterior, mas as somas sucessivas deste 'número' se distribuem em dois grupos interessantes, cada um deles com seus específicos dígitos, e que se alternam. No exemplo no qual $p = 13$, temos $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$.

Table 4: Somas iteradas para $p = 13$

$1\times$	076923	=	076923	
$2\times$	076923	=		153846
$3\times$	076923	=	230769	
$4\times$	076923	=	307692	
$5\times$	076923	=		384615
$6\times$	076923	=		461538
$7\times$	076923	=		538461
$8\times$	076923	=		615384
$9\times$	076923	=	692307	
$10\times$	076923	=	769230	
$11\times$	076923	=		846153
$12\times$	076923	=	923076	

Fonte: Autoral

Na tabela 4, usamos duas colunas para salientar a existência dos dois grupos.

O próximo número primo a mostrar este tipo de comportamento é $p = 31$, em que temos $\frac{1}{31} = 0,\overline{032258064516129}$. Vamos listar, na Tabela 5, apenas as 15 primeiras iterações.

Table 5: Somas iteradas para $p = 31$

$1 \times 032258064516129 =$	032258064516129	
$2 \times 032258064516129 =$	064516129032258	
$3 \times 032258064516129 =$		096774193548387
$4 \times 032258064516129 =$	129032258064516	
$5 \times 032258064516129 =$	161290322580645	
$6 \times 032258064516129 =$		193548387096774
$7 \times 032258064516129 =$	225806451612903	
$8 \times 032258064516129 =$	258064516129032	
$9 \times 032258064516129 =$	290322580645161	
$10 \times 032258064516129 =$	322580645161290	
$11 \times 032258064516129 =$		354838709677419
$12 \times 032258064516129 =$		387096774193548
$13 \times 032258064516129 =$		419354838709677
$14 \times 032258064516129 =$	451612903225806	
$15 \times 032258064516129 =$		483870967741935
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autoral

3.4 Outros Casos

Quanto mais divisores o números $p - 1$ tiver, mais chances há de o período de $\frac{1}{p}$ ser 'curto' e, consequentemente, mais números de 'grupos' surgirão nas iterações. Vejamos alguns exemplos.

3.4.1 $p = 37$

No caso em que $p = 37$, $p - 1 = 36 = 2^2 \times 3^2$ e o período tem 3 dígitos: $\frac{1}{37} = 0,\overline{027}$. As iterações se dividirão em 12 grupos de 3 permutações. Vejamos alguns exemplos destes grupos:

$1 \times 027 =$	027	$5 \times 027 =$	135	$11 \times 027 =$	297
$10 \times 027 =$	270	$13 \times 027 =$	351	$27 \times 027 =$	729
$26 \times 027 =$	720	$19 \times 027 =$	513	$36 \times 027 =$	927

Veja que em cada coluna temos as permutações dos três dígitos, mas os números estão dispostos em ordem crescente, de cima para baixo.

3.4.2 $p = 41$

Neste caso, $p - 1 = 40 = 2^3 \times 5$, temos $\frac{1}{p} = 0,\overline{02439}$. O comprimento do período é 5 e os padrões de ciclos se dividirão em 8 grupos. Cada grupo terá uma permutação de 5 iterações, que se alternam, segundo as Tabelas 6 e 7.

Table 6: Somas iteradas para $p = 41$

	A	B	C	D	E	F	G	H
$1 \times 02439 =$	02439							
$2 \times 02439 =$		04878						
$3 \times 02439 =$			07317					
$4 \times 02439 =$				09756				
$5 \times 02439 =$					12195			
$6 \times 02439 =$						14634		
$7 \times 02439 =$			17073					
$8 \times 02439 =$					19512			
$9 \times 02439 =$					21951			
$10 \times 02439 =$	24390							
$11 \times 02439 =$							26829	
$12 \times 02439 =$							29268	
$13 \times 02439 =$			31707					
$14 \times 02439 =$						34146		
$15 \times 02439 =$								36585
$16 \times 02439 =$	39024							
$17 \times 02439 =$						41463		
$18 \times 02439 =$	43902							
$19 \times 02439 =$						46341		
$20 \times 02439 =$		48780						

Fonte: Autoral

Table 7: Somas iteradas para $p = 41$, continuação

	A	B	C	D	E	F	G	H
$21 \times 02439 =$					51219			
$22 \times 02439 =$								53658
$23 \times 02439 =$				56097				
$24 \times 02439 =$								58536
$25 \times 02439 =$				60975				
$26 \times 02439 =$						63414		
$27 \times 02439 =$								65853
$28 \times 02439 =$							68292	
$29 \times 02439 =$			70731					
$30 \times 02439 =$			73170					
$31 \times 02439 =$				75609				
$32 \times 02439 =$		78048						
$33 \times 02439 =$		80487						
$34 \times 02439 =$							82926	
$35 \times 02439 =$								85365
$36 \times 02439 =$		87804						
$37 \times 02439 =$	90243							
$38 \times 02439 =$							92682	
$39 \times 02439 =$					95121			
$40 \times 02439 =$				97560				

Fonte: Autoral

Note a coluna H, com primeira entrada 36585, ainda na Tabea 6. As suas duas próximas entradas ocorrem entre os núeros que começas com 5: 53658 e 58536. Depois os números que começam com 6 e 8, respectivamente: 65853 e 85365.

3.5 PARI/GP

Nesta seção exemplificamos o uso de alguns comandos de um programa livre que pode ser usado para explorar esse universo de números. O programa livre chama-se PARI/GP e é um sistema de computação algébrica desenvolvido para facilitar as computações em Teoria de Números. Há uma interface online que permite fazer os cálculos que estamos interessados com a precisão que desejarmos. Há também uma versão do programa que funciona como um aplicativo para celular.

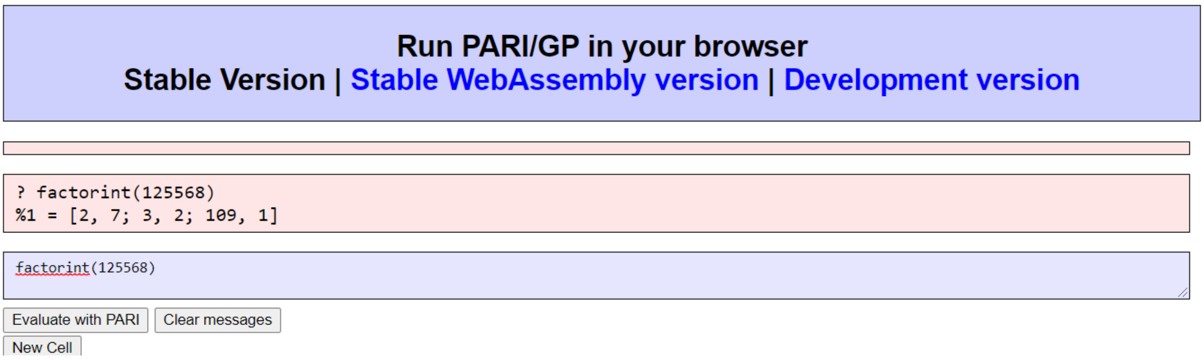
Usando 'pari-gp' em qualquer ferramenta de busca, acesse a página 'GP in your browser' e escreva, por exemplo, 'factorint(125568)'na célula azul (Figura 1.)

Figure 5: Página - PARI/GP

Exemplo proposto pelo autor

Para executar o programa, clique no retângulo escrito Evaluate with PARI (Figura 2.)

Figure 6: Executar - PARI/GP

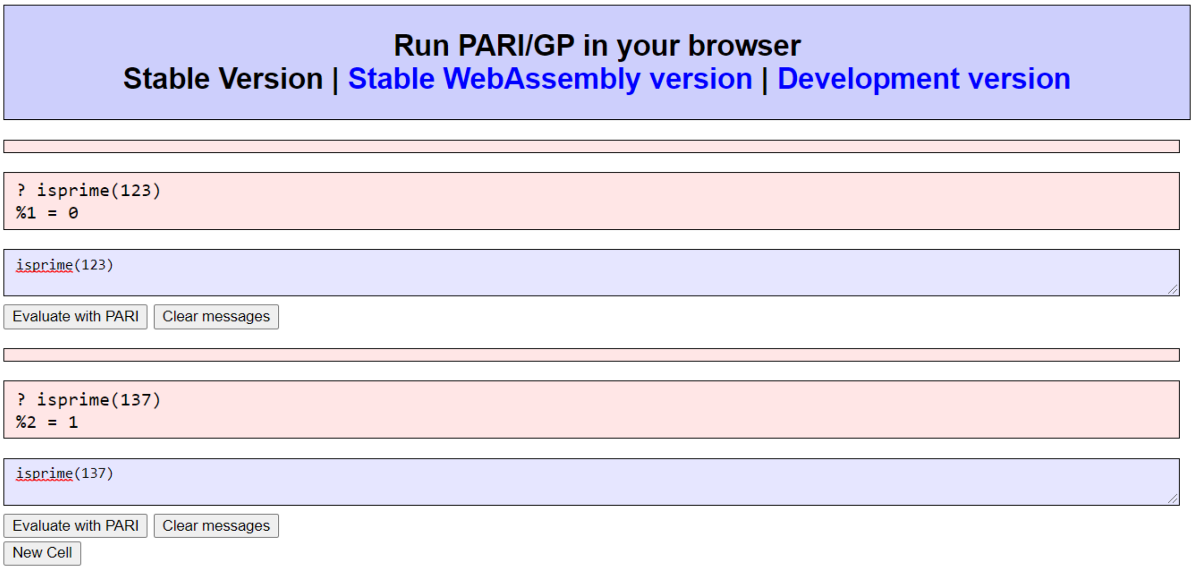


Fonte: Exemplo proposto pelo autor

O programa então retornará a informação em uma caixa de cor rosa com a informação $\%1 = [2, 7; 3, 2; 109, 1]$. Ou seja, $125568 = 2^7 \times 3^2 \times 109$.

O comando "isprime" serve para verificar diretamente se um dado número natural é primo. A resposta 0 é negativa, enquanto que 1 indica que o número é primo.

Figure 7: Executar - PARI/GP

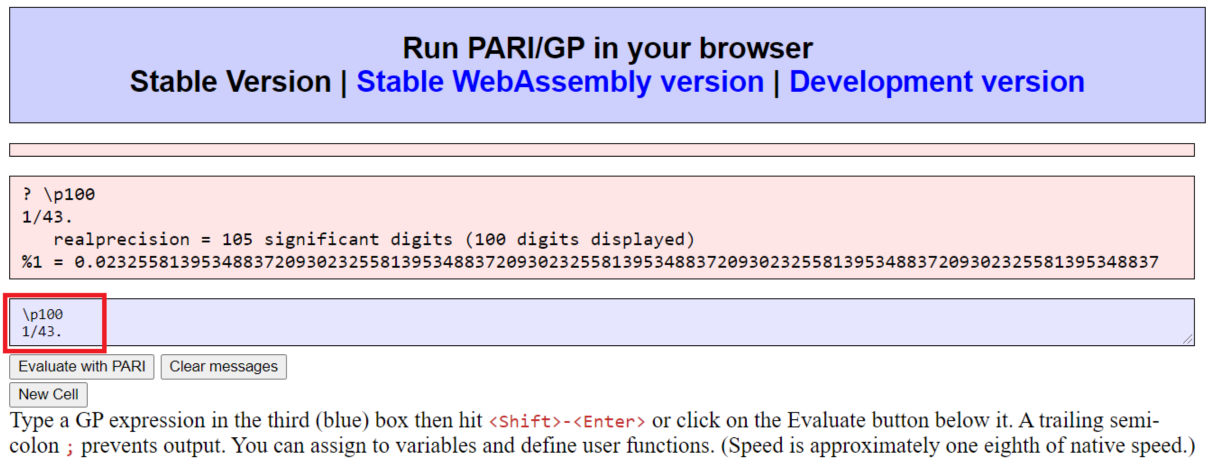


Exemplo proposto pelo autor

Para calcular os períodos de frações, basta escrever, por exemplo, 1/43. e o programa entenderá que você quer uma aproximação decimal. PARI/GP usa 28 casas decimais por default, mas o comando \p100 colocado antes estabelece o número de casas decimais que o programa oferecerá.

Um comando interessante é o que permitirá gerar listas de somas iteradas. Faça ‘for(n= $1, 72,$ print(n $*$ 01369863))’, por exemplo, e clique no retâgulo de execução para obter a lista. Veja na Figura 3.

Figure 8: Gerar Listas - PARI/GP



Fonte: Exemplo proposto pelo autor

Para calcular os períodos de frações, basta escrever, por exemplo, 1/43. e o programa entenderá que você quer uma aproximação decimal. PARI/GP usa 28 casas decimais por default, mas o comando \p100 colocado antes estabelece o número de casas decimais que o programa oferecerá.

Um comando interessante é o que permitirá gerar listas de somas iteradas. Faça 'for(n$=1, 72,$ print(n $*$ 01369863))', por exemplo, e clique no retâgulo de execução para obter a lista. Veja na Figura 4.

Figure 9: Somas Iteradas - PARI/GP

Exemplo proposto pelo autor

Estas informações certamente o colacarão em condições de fazer vários experimentos.

4 Conclusão

É claro que várias possibilidades de explorar as características de tabelas como estas pode ser um incentivo à descoberta de padrões matemáticos. No entanto, para explorar com propriedade este tipo de conteúdo, seria adequado o uso de algum programa de computador para os cálculos.

Uma rotina como verificar se um certo número p é primo e, se for primo, quais são os divisores de $p-1$, assim como calcular o período de $\frac{1}{p}$ pode ser demais trabalhoso, mesmo usando uma calculadora.

A tarefa será bem mais prazeirosa e eficiente se for feito uso de algum programa livre para os cálculos. Na seção anterior foi feita uma sugestão que parece muito apropriada.

References

[1] Hefez, Abramo *Elementos de Aritmética* Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio, 2005.

[2] ROYDEN, H. L.: Real Analysis - Second Edition. Macmillan Publishing Co, NY, 1963.

[3] https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803095705744

[4] https://mathworld.wolfram.com/CyclicNumber.html

[5] https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html