Cadernos do IME - Série Matemática
***e-ISSN:** 2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2021.58185
Recebido em 05 Março 2021 | Aceito em 14 Março 2021

OS NÚMEROS HIPERBÓLICOS DE LEONARDO

LEONARDO'S HYPERBOLIC NUMBERS

R. VIEIRA[a] M. MANGUEIRA[b] F. ALVES[c]
P. CATARINO[d]

Resumo

Visando dar continuidade ao processo de evolução da sequência de Leonardo, tem-se a complexificação dessa sequência por meio da introdução dos números hiperbólicos de Leonardo. Diante disso, são estudados conceitos matemáticos dando ênfase a sua respectiva função geradora, fórmula de Binet e forma matricial. Tão logo, é realizada a extensão para os números inteiros não positivos, generalizando assim os números hiperbólicos de Leonardo.

Palavras-chave: Fórmula de Binet, Generalização, Números hiperbólicos, Sequência de Leonardo.

Abstract

In order to continue the evolution process of Leonardo's sequence, there is a complexification of this sequence through the introduction of Leonardo's hyperbolic numbers. Therefore, mathematical concepts are studied, emphasizing their respective generating function, Binet formula and matrix form. As soon as, the extension to non-positive integers is performed, thus generalizing Leonardo's hyperbolic numbers.

Keywords: Binet's formula, generalization, hyperbolic numbers, Leonardo sequence.

MSC2010: 11B37, 11B39.

[a]Secretaria de Educação do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1966-7097 **E-mail:** re.passosm@gmail.com

[b]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4446-155X **E-mail:** milenacarolina24@gmail.com

[c]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561 **E-mail:** fregis@gmx.fr

[d]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal; ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6917-5093 **E-mail:** pcatarino23@gmail.com

1 Introdução

A sequência de Leonardo foi introduzida por Catarino e Borges [2], ocorrendo uma evolução matemática desta sequência presente em outros trabalhos matemáticos [1, 5, 8, 9].

Dessa forma, tem-se a sequência de Leonardo satisfazendo a seguinte relação de recorrência:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} + 1, n \geq 2. \tag{1.1}$$

Tão logo, para $n+1$ pode-se reescrever essa relação de recorrência como $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} + 1$. E ainda, subtraindo $Le_n - Le_{n+1}$ obtêm-se uma outra relação de recorrência equivalente para esta sequência.

$$L_n - L_{n+1} = L_{n-1} + L_{n-2} + 1 - L_n - L_{n-1} - 1$$

$$L_{n+1} = 2L_n - L_{n-2} \tag{1.2}$$

onde $L_0 = L_1 = 1$ são as condições iniciais.

Com o viés de realizar uma evolução matemática desses números, tem-se o processo de complexificação com o estudo dos números hiperbólicos. Assim, tem-se que o anel hiperbólico, $\mathbb{H}$ pertencente à algébra bidimensional de Clifford [4], pode ser chamados de números de Lorentz. Esses números possuem aplicação na medição de distâncias no plano do espaço-tempo de Lorentz [6].

Assim, os números hiperbólicos são descritos por $\mathbb{H} = \{z = x + hy | h \notin \mathbb{R}, h^2 = 1, x,\ y \in \mathbb{R}\}$. A adição e multiplicação de dois desses números hiperbólicos n_1 e n_2, são dadas por [3, 7]:

$$n_1 \pm n_2 = (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2)$$
$$n_1 n_2 = (x_1 + hy_1)(x_2 + hy_2) = (x_1 x_2) + h(y_1 y_2) + h(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

O seu polinômio característico é dado por $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, apresentando como soluções três raízes, onde duas são semelhantes as raízes de Fibonacci.

Ao tudo, tem-se a introdução dos números hiperbólicos de Leonardo, realizando ainda o seu processo de generalização. Logo, a partir da definição desses números, são obtidos alguns conceitos matemáticos discutidos mais adiante.

2 Os números hiperbólicos de Leonardo

Nesta seção, são estudados os números referente à sequência hiperbólica de Leonardo, abordando os aspectos matemáticos referentes a esses números.

Definição 2.1. *A sequência hiperbólica de Leonardo, $\tilde{L_n}$, é definida por:*

$$\tilde{L_n} = L_n + hL_{n+1},$$

com $\tilde{L_0} = 1 + h$, $\tilde{P_1} = 1 + 3h$ e $\tilde{P_2} = 3 + 5h$, em que $h = 1$.

Dessa forma, tem-se os primeiros termos dessa sequência: $1+h, 1+3h, 3+5h, 5+9h, 9+15h, 15+25h, \ldots$

Definição 2.2. *A fórmula de recorrência dos hiperbólicos de Leonardo, é dada por:*

$$\tilde{L_n} = 2\tilde{L}_{n-1} - \tilde{L}_{n-3},$$

onde $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Propriedade 2.3. *A função geradora dos números hiperbólicos de Leonardo é dada por:*

$$g(\tilde{L_n}, x) = \frac{1 + h + (1-h)(-x + x^2)}{(1 - 2x + x^3)}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por $2x$, x^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(\tilde{L_n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{L_n} x^n = \tilde{L_0} + \tilde{L_1}x + \tilde{L_2}x^2 + \ldots + \tilde{L_n}x^n + \ldots \tag{2.3}$$

$$2xg(\tilde{L_n}, x) = 2\tilde{L}_0 x + 2\tilde{L}_1 x^2 + 2\tilde{L}_2 x^3 + \ldots + 2\tilde{L}_{n-1}x^n + \ldots \tag{2.4}$$

$$x^3 g(\tilde{L_n}, x) = \tilde{L}_0 x^3 + \tilde{L}_1 x^4 + \tilde{L}_2 x^5 + \ldots + \tilde{L}_{n-3}x^n + \ldots \tag{2.5}$$

Adicionando as equações (2.3) e (2.5) e subtraindo (2.4) tem-se que:

$$\begin{aligned}(1 - 2x + x^3)g(\tilde{L_n}, x) &= \tilde{L_0} + (\tilde{L_1} - 2\tilde{L_0})x + (\tilde{L_2} - 2\tilde{L_1})x^2 + (\tilde{L_3} - 2\tilde{L_2} + \tilde{L_0})x^3 + \ldots + \\ &+ (\tilde{L_n} - 2\tilde{L}_{n-1} + \tilde{L}_{n-3})x^n + \ldots\end{aligned}$$

Com base nos valores iniciais: $\tilde{L_0} = 1 + h, \tilde{L_1} = 1 + 3h, \tilde{L_2} = 3 + 5h$ e em sua respectiva fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned}(1 - 2x + x^3)g(\tilde{L_n}, x) &= 1 + h + (-1 + h)x + (1 + h)x^2 \\ g(\tilde{P_n}, x) &= \frac{1 + h + (1-h)(-x + x^2)}{1 - 2x + x^3}.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4. *A fórmula de Binet dos números hiperbólicos de Leonardo, com $n \in \mathbb{Z}$, é descrita por:*

$$\tilde{L_n} = A_h(1 + hx_1)x_1^n + B_h(1 + hx_2)x_2^n + C_h(1 + hx_3)x_3^n,$$

em que: $A_h = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $B_h = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$, $C_h = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$ *e* x_1*,* x_2 *e* x_3 *as raízes do polinômio característico de Leonardo* $(x^3 - 2x^2 - 1 = 0)$*.*

Demonstração. Utiliza-se a recorrência da sequência hiperbólica (Definição 2.2) com os seus valores iniciais $(\tilde{L_0} = 1 + h, \tilde{L_1} = 1 + 3h, \tilde{L_2} = 3 + 5h)$. Dessa forma, tem-se o sistema de equação:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 1 + h \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 & = 1 + 3h \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 & = 3 + 5h \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\alpha = \frac{(3 + 5h) + (-x_2 - x_3)(1 + 3h) + x_2x_3(1 + h)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3},$$
$$\beta = \frac{(3 + 5h) + (-x_1 - x_3)(1 + 3h) + x_1x_3(1 + h)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3},$$
$$\gamma = \frac{(3 + 5h) + (-x_1 - x_2)(1 + 3h) + x_1x_2(1 + h)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = -1, x_1 + x_2 + x_3 = 2$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$, é fácil ver que:

$$\alpha_h = \frac{(x_2x_2 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + hx_1) = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + hx_1) = A_h(1 + hx_1),$$
$$\beta_h = \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + hx_2) = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + hx_2) = B_h(1 + hx_2),$$
$$\gamma_h = \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + hx_3) = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + hx_3) = C_h(1 + hx_3).$$

□

Baseado no trabalho de Vieira et al. [8], em que trata da forma matricial unidimensional, tem-se o estudo da forma matricial dos números hiperbólicos de Leonardo.

Teorema 2.5. *Para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência hiperbólica de Leonardo é dada por:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1+2h & h & 0\\ 0 & 1 & h\\ -h & 0 & 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}L_{n+2} & L_{n+1} & L_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2h & h & 0\\ 0 & 1 & h\\ -h & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\tilde{L}_{n+2} & \tilde{L}_{n+1} & \tilde{L}_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se que para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2h & h & 0\\ 0 & 1 & h\\ -h & 0 & 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}5 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2h & h & 0\\ 0 & 1 & h\\ -h & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5+9h & 3+5h & 1+3h\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\tilde{L}_3 & \tilde{L}_2 & \tilde{L}_1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, assumindo que vale para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1+2h & h & 0\\ 0 & 1 & h\\ -h & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{L}_{k+2} & \tilde{L}_{k+1} & \tilde{L}_k\end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 1+2h & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -h & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{k+2} & L_{k+1} & L_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2h & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -h & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{k+3} & L_{k+2} & L_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2h & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -h & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{k+3} + 2hL_{k+3} - hL_{k+1} & hL_{k+3} + L_{k+2} & hL_{k+2} + L_{k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{k+3} + hL_{k+4} & \tilde{L}_{k+2} & \tilde{L}_{k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{L}_{k+3} & \tilde{L}_{k+2} & \tilde{L}_{k+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

3 Generalização da sequência hiperbólica de Leonardo

Na presente seção, estuda-se o comportamento dos números hiperbólicos de Leonardo para os termos com índices inteiros não positivos, generalizando assim esses números.

Definição 3.1. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos hiperbólicos de Leonardo para índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\tilde{L}_{-n} = 2\tilde{L}_{-n+2} - \tilde{L}_{-n+3}.$$

Definição 3.2. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o hiperbólico de Leonardo, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$\tilde{L}_{-n} = L_{-n} + hL_{-n+1}.$$

Propriedade 3.3. *A função geradora dos hiperbólicos de Leonardo para índice in-*

teiro não positivo, é expressa por:

$$g(\tilde{L}_{-n}, x) = \frac{1 + h + (-1 + h)x + (-1 - 3h)x^2}{x^3 - 2x^2 + 1},$$

com os respectivos valores iniciais: $\tilde{L}_{-2} = 1 - h, \tilde{L}_{-1} = -1 + h$ *e* $\tilde{L}_0 = 1 + h$.

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por $2x^2$ e x^3, tem-se que:

$$\begin{aligned} g(\tilde{L}_{-n,x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{L}_{-n}x^n = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_{-1}x + \tilde{L}_{-2}x^2 + \ldots + \tilde{L}_{-n}x^n + \ldots \\ 2x^2 g(\tilde{L}_{-n}, x) &= 2\tilde{L}_0x^2 + 2\tilde{L}_{-1}x^3 + 2\tilde{L}_{-2}x^4 + \ldots + 2\tilde{L}_{-n-2}x^n + \ldots \\ x^3 g(\tilde{L}_{-n}, x) &= \tilde{L}_0x^3 + \tilde{L}_{-1}x^4 + \tilde{L}_{-2}x^5 + \ldots + \tilde{L}_{-n-3}x^n + \ldots \end{aligned}$$

Assim, ao realizar a operação $x^3 g(\tilde{L}_{-n}, x) - 2x^2 g(\tilde{L}_{-n}, x) + g(\tilde{L}_{-n}, x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} (x^3 - 2x^2 + 1)g(\tilde{L}_{-n}, x) &= \tilde{L}_0 + \tilde{L}_{-1}x + (-2\tilde{L}_0 + \tilde{L}_{-2})x^2 \\ (x^3 - 2x^2 + 1)g(\tilde{L}_{-n}, x) &= 1 + h + (-1 + h)x + (-1 - 3h)x^2 \\ g(\tilde{L}_{-n}, x) &= \frac{1 + h + (-1 + h)x + (-1 - 3h)x^2}{x^3 - 2x^2 + 1} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4. *Para* $n > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *a forma matricial dos hiperbólicos de Leonardo, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1+2h & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -h & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{-n+2} & L_{-n+1} & L_{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2h & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -h & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{L}_{-n+2} & \tilde{L}_{-n+1} & \tilde{L}_{-n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. De modo similar à demonstração realizada no Teorema 2.5, pode-se validar esta propriedade. □

4 Algumas propriedades

Doravante, são investigadas alguns conceitos matemáticos referentes aos números hiperbólicos de Leonardo e a sua generalização.

Propriedade 4.1. *A soma dos n primeiros números dos hiperbólicos de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} \tilde{L}_m = 2\tilde{L}_{n-2} + 2\tilde{L}_{n-1} - (2+3h) + \sum_{s=2}^{n-3} \tilde{L}_s$$

Demonstração. Por meio da relação de recorrência dos hiperbólicos de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\tilde{L}_n = 2\tilde{L}_{n-1} - \tilde{L}_{n-3} \tag{4.6}$$

Assim, avaliando a relação dada na Equação 4.6, em valores de $n \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_3 &= 2\tilde{L}_2 - \tilde{L}_0\\
\tilde{L}_4 &= 2\tilde{L}_3 - \tilde{L}_1\\
\tilde{L}_5 &= 2\tilde{L}_4 - \tilde{L}_2\\
\tilde{L}_6 &= 2\tilde{L}_5 - \tilde{L}_3\\
\tilde{L}_7 &= 2\tilde{L}_6 - \tilde{L}_4\\
&\vdots\\
\tilde{L}_{n-2} &= 2\tilde{L}_{n-3} - \tilde{L}_{n-5}\\
\tilde{L}_{n-1} &= 2\tilde{L}_{n-2} - \tilde{L}_{n-4}\\
\tilde{L}_n &= 2\tilde{L}_{n-1} - \tilde{L}_{n-3}
\end{aligned}$$

Por meio de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=3}^{n} \tilde{L}_m &= \tilde{L}_2 - \tilde{L}_0 + \tilde{L}_3 - \tilde{L}_1 + \tilde{L}_4 + \cdots + \tilde{L}_{n-3} + 2\tilde{L}_{n-2} + 2\tilde{L}_{n-1}\\
&= 2\tilde{L}_{n-2} + 2\tilde{L}_{n-1} - (\tilde{L}_0 + \tilde{L}_1) + \sum_{s=2}^{n-3} \tilde{L}_s\\
&= 2\tilde{L}_{n-2} + 2\tilde{L}_{n-1} - (2+3h) + \sum_{s=2}^{n-3} \tilde{L}_s
\end{aligned}$$

□

Propriedade 4.2. *A soma dos números de índices pares dos hiperbólicos de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} \tilde{L}_{2m} = 2\tilde{L}_{2n-1} - (1+2h) + \sum_{s=3}^{2n-3} \tilde{L}_s$$

Demonstração. Com base na relação de recorrência dos hiperbólicos de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\tilde{L}_n = 2\tilde{L}_{n-1} - \tilde{L}_{n-3}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_4 &= 2\tilde{L}_3 - \tilde{L}_1 \\
\tilde{L}_6 &= 2\tilde{L}_5 - \tilde{L}_3 \\
\tilde{L}_8 &= 2\tilde{L}_7 - \tilde{L}_5 \\
&\vdots \\
\tilde{L}_{2n-2} &= 2\tilde{L}_{2n-3} - \tilde{L}_{2n-5} \\
\tilde{L}_{2n} &= 2\tilde{L}_{2n-1} - \tilde{L}_{2n-3}
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=3}^{n} \tilde{L}_{2m} &= \tilde{L}_3 - \tilde{L}_1 + \tilde{L}_5 + \cdots + \tilde{L}_{2n-3} + 2\tilde{L}_{2n-1} \\
&= 2\tilde{L}_{2n-1} - \tilde{L}_1 + \sum_{s=3}^{2n-3} \tilde{L}_s \\
&= 2\tilde{L}_{2n-1} - (1 + 2h) + \sum_{s=3}^{2n-3} \tilde{L}_s
\end{aligned}$$

□

Propriedade 4.3. *A soma dos números de índices ímpares dos hiperbólicos de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} \tilde{L}_{2m-1} = 2\tilde{L}_{2n-2} - (1 + h) + \sum_{s=2}^{2n-4} \tilde{L}_s$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos hiperbólicos de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\tilde{L}_n = 2\tilde{L}_{n-1} - \tilde{L}_{n-3}$$

Dessa forma, com base na relação de recorrência, com valores de $n \geq 3$, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{L}_3 & = & 2\tilde{L}_2 - \tilde{L}_0 \\ \tilde{L}_5 & = & 2\tilde{L}_4 - \tilde{L}_2 \\ \tilde{L}_7 & = & 2\tilde{L}_6 - \tilde{L}_4 \\ \vdots & & \\ \tilde{L}_{2n-3} & = & 2\tilde{L}_{2n-4} - \tilde{L}_{2n-6} \\ \tilde{L}_{2n-1} & = & 2\tilde{L}_{2n-2} - \tilde{L}_{2n-4} \end{array}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{m=3}^{n} \tilde{L}_{2m-1} & = & \tilde{L}_2 - \tilde{L}_0 + \tilde{L}_4 + \cdots + \tilde{L}_{2n-4} + 2\tilde{L}_{2n-2} \\ & = & 2\tilde{L}_{2n-2} - \tilde{L}_0 + \sum_{s=2}^{2n-4} \tilde{L}_s \\ & = & 2\tilde{L}_{2n-2} - (1+h) + \sum_{s=2}^{2n-4} \tilde{L}_s \end{array}$$

□

Teorema 4.4. *A soma dos inteiros hiperbólicos com índice inteiro não positivo de Leonardo é descrita por:*

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{L}_{-j} = 2\tilde{L}_{-n+2} - (1+h) + \sum_{k=-1}^{-n+3} L_k.$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência (Definição 2.2), tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{L}_{-3} & = & 2\tilde{L}_{-1} - \tilde{L}_0 \\ \tilde{L}_{-4} & = & 2\tilde{L}_{-2} - \tilde{L}_{-1} \\ \tilde{L}_{-5} & = & 2\tilde{L}_{-3} - \tilde{L}_{-2} \\ \tilde{L}_{-6} & = & 2\tilde{L}_{-4} - \tilde{L}_{-3} \\ & \vdots & \\ \tilde{L}_{-n+1} & = & 2\tilde{L}_{-n+3} - \tilde{L}_{-n+4} \\ \tilde{L}_{-n} & = & 2\tilde{L}_{-n+2} - \tilde{L}_{-n+3} \end{array}$$

Através de cancelamentos sucessivos, é possível obter:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \tilde{L}_{-j} &= 2\tilde{L}_{-n+2} - \tilde{L}_0 + \sum_{k=-1}^{-n+3} L_k \\ &= 2\tilde{L}_{-n+2} - (1+h) + \sum_{k=-1}^{-n+3} L_k\end{aligned}$$

□

5 Conclusão

A pesquisa apresentou uma evolução em torno do processo de complexificação dos números de Leonardo. Assim, foram introduzidos os números hiperbólicos de Leonardo, inserindo a unidade hiperbólica na referida sequência unidimensional.

Ao tudo, foram estudados aspectos matemáticos, ressaltando a fórmula de Binet, função geradora e forma matricial dos números hiperbólicos de Leonardo e da sua generalização para os números inteiros não positivos.

Por fim, para trabalhos futuros destaca-se a aplicação desses números, bem como a sua utilização em outras áreas e formas de visualização.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

[1] ALVES, F. R.; Vieira, R. P. The Newton Fractal's Leonardo Sequence Study with the Google Colab. *International Eletronic Journal of Mathematics Education*, vol. 15, n. 2, 1-9, 2019.

[2] CATARINO, P. M.; BORGES, A. On Leonardo numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, p. 1-12, 2019.

[3] CIHAN, A.; AZAK, A. Z.; GUNGOR, M. A.; TOSUN, M. A Study on Dual Hyperbolic Fibonacci and Lucas Number. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, vol. 27, n. 1, p. 35-48, 2019.

[4] JANCEWICZ, B. *The extended Grassmann algebra of R^3, in Clifford (Geometric) Algebras with Applications and Engineering*. Birkhauser, Boston, p. 389-421, 1996.

[5] SHANNON, A. G. A note on generalized Leonardo numbers. *Note on Number Theory and Discrete Mathematics*, vol. 25, n. 3, 97-101, 2019.

[6] SOBCZYK, G. The Hyperbolic Number Plane. *The College Mathematics Journal*, vol. 26, n. 4, p. 268-280, 1995.

[7] SOYKAN, Y.; GOCEN, M. Properties of hyperbolic generalized Pell numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, vol. 26, n. 4, p. 136,153, 2020.

[8] VIEIRA, R. P. M. et al. A forma matricial dos números de Leonardo. *Ciência e Natura*, vol. 42, p. 1-13, 2020.

[9] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, vol. 4, n. 2, 156-173, 2019.