Cadernos do IME - Série Matemática
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
DOI: 10.12957/cadmat.2020.54182
Recebido em 11 Nov. 2020 — Aceito em 05 Dez. 2020

Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder

Cantor-Bernstein-Schröder Theorem

GABRIELLA J. MAGALHÃES[a] GERSON G. LEDESMA [b]

Resumo

O Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder é um resultado importante em Teoria dos Conjuntos tanto do ponto de vista dos fundamentos da matemática quanto para a formação profissional de futuros educadores da matemática. Neste trabalho iremos apresentar uma prova detalhada deste resultado usando alguns conceitos básicos que serão devidamente apresentados ao longo deste.

Keywords: Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, Axioma da Escolha, Teoria de conjuntos.

Abstract

The Cantor-Bernstein-Schröder Theorem is an important result in Sets Theory both from the point of view of a mathematical foundations and for the formation of new professionals in mathematics education. In this work, we will present a detailed proof of this result using some basic concepts that will be properly presented throughout this.

Keywords: Cantor-Bernstein-Schröder Theorem, Axiom of Choice, Sets Theory.

MSC2020: 03E20, 03E25.

[a]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil; ORCID:0000-0001-6768-9082 **E-mail:** gabriellateles96@gmail.com
[b]Universidade do Rio de Janeiro, Rio De Janeiro, Brasil; ORCID:0000-0002-8351-7456 **E-mail:** guido.ledesma@ime.uerj.br

1 Introdução

Historicamente o teorema tem sua estreia em uma carta de Cantor para R. Dedekind, embora ambos tivessem conseguido provar este resultado, as discordâncias existentes entre eles -segundo os historiadores- foi o principal motivo pelo qual estas demonstrações foram publicadas somente anos depois da primeira demonstração oficial [6]. Dedeking apresentou 3 formas diferentes de demonstrar o teorema, todas em cartas datadas no ano de 1887, e G. Cantor tem sua demonstração numa carta datada no ano de 1882. Apesar disso foi o matemático alemão Ernst Schröder, quem primeiro publicou uma versão da demonstração deste teorema [6], com data de publicação em janeiro de 1896, porém, sua prova foi refutada por Alwin Korselt em 1911. Através de cartas, o próprio Schröder admitiu seu erro e ainda disse a Korselt: "Deixa-o sozinho a honra de fornecer uma prova para o teorema de Cantor", Schröder se referiu a Felix Bernstein que na época tinha apenas 20 anos e ficou sabendo do teorema através de um dos seminários de Cantor, acabou se interessando pelo teorema e obteve sucesso em sua prova, cuja publicação data do ano de 1897 [1]. Após isso, houveram inúmeras provas e tentativas de demonstrar este teorema, veremos aqui uma delas. Esta parte histórica encontra-se amplamente explicada no livro [3].

2 Conceitos preliminares

Estes conceitos preliminares foram insiprados em [5].

Lema 2.1. *Sejam E, F conjuntos e $f : E \to F$ uma função, então f é injetiva se e somente se*

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), \quad \forall A, B \subseteq E$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dados dois subconjuntos $A, B \subseteq E$ iremos provar o lema acima usando dupla inclusão. Primeiro $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Para isto seja $y \in f(A \cap B)$ então existe um $x_1 \in A \cap B$ tal que $y = f(x_1)$ e como $x_1 \in A \cap B$ então $f(x_1) \in f(A)$ e $f(x_1) \in f(B)$ o que implica que $y \in f(A) \cap f(B)$.

Agora iremos mostrar que $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$ para isto, considere $y \in f(A) \cap (B)$ então $y \in f(A)$ *e* $y \in f(B)$ logo existe um $x_1 \in A$ tal que $f(x_1) = y$ e também existe um $x_2 \in B$ tal que $f(x_2) = y$, desde que $y = f(x_1) = f(x_2)$ e como f é injetiva então temos necessariamente que $x_1 \in A$ *e* $x_2 \in B$ então $f(x_1) \in f(A \cap B)$

($\Leftarrow$) Sejam x_1 e $x_2 \in E$ com a propriedade $f(x_1) = f(x_2)$. Definimos os conjuntos

$A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$ tais que se $x_1 \neq x_2$ então $A \cap B = \emptyset$. Usando as hipóteses:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Rightarrow \emptyset = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}$$

o que resulta em uma contradição. Logo $x_1 = x_2$ então f é injetiva. □

Lema 2.2. *Sejam E, F conjuntos e $f : E \to F$ uma função. A função f é bijetiva, se e somente se:*

$$F \setminus f(A) = f(E \setminus A), \quad \forall A \subseteq E.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $A \subseteq E$, vamos mostrar este resultado usando dupla inclusão. Iniciamos provando a inclusão $F \setminus f(A) \subseteq f(E \setminus A)$, para isto, dado

$$\begin{aligned} y \in F \setminus f(A) &\Rightarrow y \notin f(A) \\ &\Rightarrow f(x) \neq y, \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Como f é sobrejetiva existe um $x_1 \in E \setminus A$ tal que $f(x_1) = y$ o que implica que $y \in f(E \setminus A)$. Agora resta mostrar a inclusão $f(E \setminus A) \subseteq F \setminus f(A)$. Para isto, dado $y \in f(E \setminus A)$ então existe um $x_1 \in E \setminus A$ tal que $y = f(x_1)$. Como f é injetiva, então para todo $x_2 \in A$ temos que $f(x_2) \neq f(x_1) = y$ o que implica que $y \in F \setminus f(A)$.

($\Leftarrow$) Para mostrar a bijetividade de f, iremos primeiro mostrar a injetividade, para isto, suponha que $x_1 \neq x_2$ e denotamos $A = \{x_1\}$. Logo $\{x_2\} \subseteq E \setminus A$ daqui, se $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ temos

$$y_1 \in f(A) \quad \text{e} \quad y_2 \in f(E \setminus A) = F \setminus f(A).$$

Assim, $y_1 \in f(A)$ e $y_2 \in F \setminus f(A)$, logo $y_1 \neq y_2$, portanto f é injetiva. Para provar a sobrejetividade iremos mostrar que $f(E) = F$. Para isto tomamos $A = E$, então $E \setminus A = \emptyset$ logo,

$$f(E \setminus A) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad F \setminus f(E) = \emptyset$$

com isto, temos que $f(E) = F$. Logo f é de fato sobrejetiva e por fim f é bijetiva. □

Proposição 2.1. *Sejam E, F conjuntos e $f : E \to F$ uma função bijetiva. Se A, B são subconjuntos de E então,*

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Demonstração. Como f é bijetiva então pelo Lema 2.1 e Lema 2.2 temos que

$$\begin{aligned} f(A \setminus B) &= f\left(A \cap (E \setminus B)\right) \\ &= f(A) \cap f(E \setminus B) \\ &= f(A) \cap (F \setminus f(B)) \\ &= f(A) \setminus f(B). \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to T$ funções bijetivas tais que $X \cap Z = \emptyset$ e $Y \cap T = \emptyset$ então, $h : X \cup Z \to Y \cup T$ é bijetiva.*

$$h(w) = \begin{cases} f(w), & se\, w \in X \\ g(w), & se\, w \in Z. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos primeiramente provar a injetividade: Sejam $x, z \in X \cup Z$, então temos as seguintes possibilidades

(i) $x, z \in X$

(ii) $x, z \in Z$

(iii) $x \in X$ e $z \in Z$

(iv) $x \in Z$ e $z \in X$

Em (i) e (ii) o resultado segue da injetividade de f e g, respectivamente. Para (iii), temos

$$h(x) = h(z) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(z).$$

Isto categoriza uma contradição, pois $f(x) \in Y$ e $g(z) \in T$, onde por hipótese Y e T são disjuntos. Logo h é injetiva. O caso (iv) é similar ao caso (iii).

Nos resta agora mostrar a sobrejetividade de h. Para isto, seja um $\beta \in Y \cup T$ então, $\beta \in Y$ ou $\beta \in T$ pela sobrejetividade de f e g podemos ver que: Caso $\beta \in Y$, existe um $x \in X$ tal que $f(x) = \beta$ então, $h(x) = \beta$. E agora caso $\beta \in T$, então existe um $y \in Y$ tal que $g(y) = \beta$ então $h(y) = \beta$. Assim, mostramos que h é de fato bijetiva. □

3 Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder

A demonstração deste teorema foi fundamentada em [4].

Definição 3.1 (Equivalências)**.** *Dados dois conjuntos A e B diremos que são equivalentes se existe uma função bijetiva $f : A \to B$, e denotaremos esta relação por $A \sim B$.*

Esta relação $\sim$ verifica as seguintes propriedades:

Lema 3.1.

1. Reflexiva: $A \sim A$.

2. Simétrica: $A \sim B$ então $B \sim A$.

3. Transitiva: Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

Demonstração. 1. Basta usar a função identidade $Id_A : A \to A$, definida por $Id_A(x) = x$ que define uma função bijetiva.

2. Como $A \sim B$, existe uma função $f : A \to B$ bijetiva. Logo $f^{-1} : B \to A$ é uma função bijetiva e portanto $B \sim A$.

3. Se $A \sim B$, então existe $f : A \to B$ bijetiva, assim também como $B \sim C$ então existe $g : B \to C$ bijetiva. Assim, $g \circ f : A \to C$ é uma função bijetiva. Logo $A \sim C$.

Uma relação que verifica (i), (ii) e (iii) é chamado de relação de equivalência. □

Teorema 3.1 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder (TCBS))**.** *Sejam $f : A_0 \to B_0$ e $g : B_0 \to A_0$ duas funções injetivas, então existe uma função bijetiva $h : A_0 \to B_0$.*

Demonstração. A ideia da prova é mostrar que existe uma função bijetiva de A_0 para um subconjunto deste, o qual chamamos de A_1, que é equivalente a B_0, daqui usando transitividade entre conjuntos equivalentes mostramos que A_0 é equivalente a B_0.

Denotamos por B_1 o conjunto $f(A_0)$ e A_1 o conjunto $g(B_0)$. Então as funções $f : A_0 \to B_1$ e $g : B_0 \to A_1$ tornam-se bijetivas. Ver Figura 1.

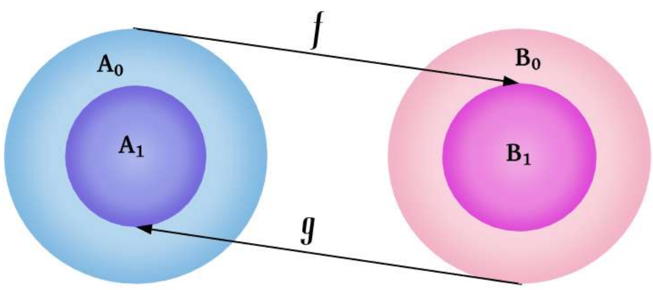

Figura 1: Definição de A_2

Do mesmo modo denotemos por A_2 o conjunto $g(B_1)$, assim este conjunto está contido em A_1 e é equivalente ao conjunto A_0, pois $f : A_0 \to B_1$ e $g|_{B_1} : B_1 \to A_2$

são bijetivas, então a composição $g|_{B_1} \circ f$ também é bijetiva, com isto $A_0 \sim A_2$. De maneira análoga, denotamos por B_2 o conjunto $f(A_1)$, assim este conjunto está contido em B_1 e é equivalente ao conjunto B_0, já que $g : B_0 \to A_1$ e $f|_{A_1} : A_1 \to B_2$ são funções bijetivas, então a composição $f|_{A_1} \circ g$ é bijetiva e daqui $B_0 \sim B_2$. Ver Figura 2

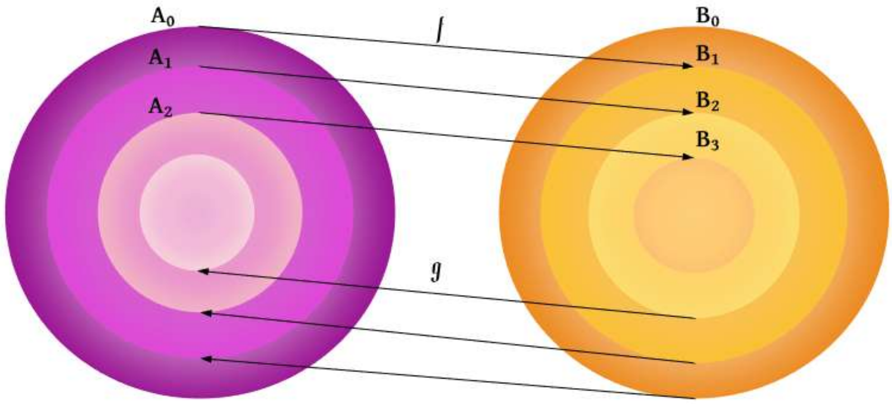

Figura 2: Definição dos conjuntos $A_n's$ e $B_n's$

De maneira geral a ação da composição $g \circ f$ pode ser visualizado como Figura 3.

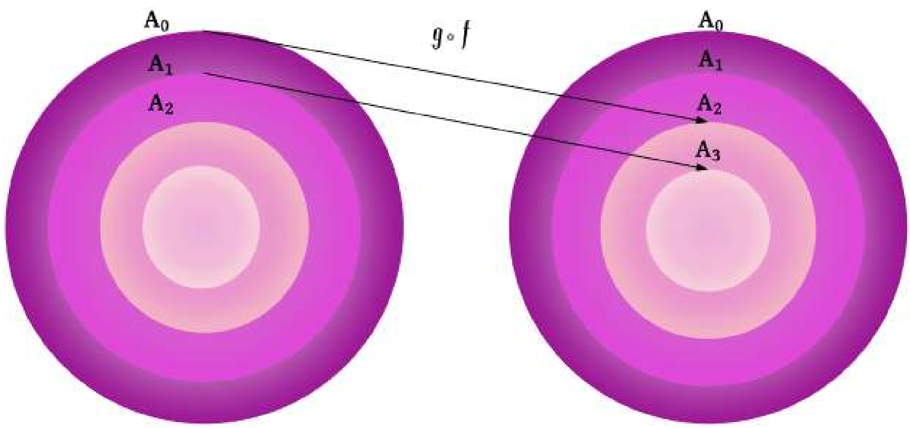

Figura 3: composição $g \circ f$

Desta forma podemos construir sequências de subconjuntos $\{A_k\}$ e $\{B_k\}$ de A e B respectivamente, que verificam as propriedades:

1. $B_{l+1} = f(A_l)$ e $A_{l+1} = g(B_l), \quad \forall l \in \{0, ..., k-1]$.

2. $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ... \supseteq A_k$ e $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ... \supseteq B_k$

3. $A_l \sim A_{l+2}$ e $B_l \sim B_{l+2}$

Agora definimos

$$A_{k+1} = g(B_k) \quad e \quad B_{k+1} = g(A_k)$$

Claramente estes conjuntos assim definidos verificam (1), vamos agora verificar as propriedades (2) e (3). Primeiro (2), por (1) temos que,

$$B_k = f(A_{k-1}) \subseteq B_{k-1} \Rightarrow g(B_k) \subseteq g(B_{k-1}) \Rightarrow A_{k+1} \subseteq A_k$$

De forma análoga sabemos que $B_{k+1} \subseteq B_k$. Agora vamos mostrar (3), isto é, $A_{k-1} \sim A_{k+1}$ e $B_{k-1} \sim B_{k+1}$ primeiro vamos mostrar que $A_{k-1} \sim A_{k+1}$ para isto note que $f|_{A_{k-1}} : A_{k-1} \to B_k$ e $g|_{B_k} : B_k \to A_{k+1}$ são bijetivas assim, $g|_{B_k} \circ f|_{A_{k-1}}$ é uma bijeção de A_{k-1} para A_{k+1}. Fazendo de maneira análoga podemos mostrar que $B_{k-1} \sim B_{k+1}$. Com isto construímos indutivamente duas sequências $\{A_k\}$ e $\{B_k\}$ de subconjuntos encaixantes de A_0 e B_0 respectivamente. Agora com as propriedades (1), (2) e (3) acima, definimos:

$$D = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \quad e \quad E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$$

Com isto podemos escrever o conjunto A como uma união de subconjuntos da seguinte forma:

$$A_0 = D \dot{\bigcup} \left[\dot{\bigcup_{k=0}^{+\infty}} A_k \setminus A_{k+1} \right]$$

podemos ver isto graficamente na Figura 4

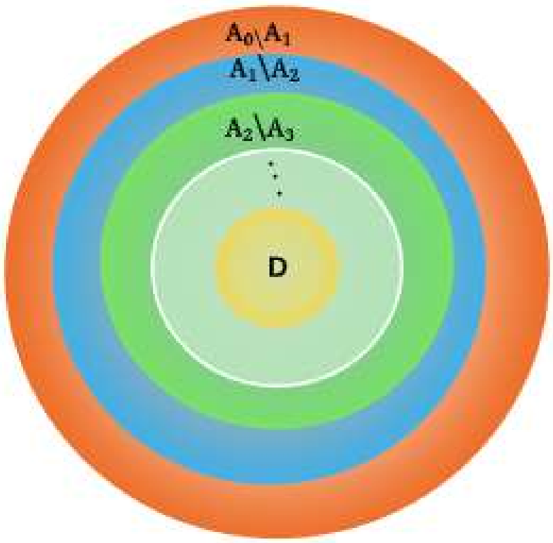

Figura 4: Coroas que compõem A_0

Podemos ver que A_0 é a união disjunta do conjunto D e de infinitas coroas. Assim iremos olhar para cada coroa, afim de entender quais são as aplicações que atuam em cada uma. Tendo em vista que o objetivo desta demonstração é provar que existe uma correspondência entre os conjuntos A_0 e A_1, iremos escrever os conjuntos A_0 e A_1 como a união disjunta de coroas, afim de estabelecer esta correspondência procurada. Assim, temos que

$$A_0 = D \bigcup\!\!\!\cdot \left[\bigcup\!\!\!\cdot_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \setminus A_{2k+2} \right] \mathbin{\dot\cup} \left[\bigcup\!\!\!\cdot_{k=0}^{+\infty} A_{2k} \setminus A_{2k+1} \right]$$

e

$$A_1 = D \bigcup\!\!\!\cdot \left[\bigcup\!\!\!\cdot_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \setminus A_{2k+2} \right] \mathbin{\dot\cup} \left[\bigcup\!\!\!\cdot_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \setminus A_{2k+2} \right]$$

Arrumando de forma conveniente, como feito acima, fica claro que existe uma correspondência através da aplicação identidade entre as coroas ímpares de A_0 e de A_1 e também entre os conjuntos $D's$. Logo, é preciso encontrar uma aplicação bijetiva que relacione as coroas pares, e de fato como visto anteriormente uma possível candidata a esta aplicação é a composição das funções $g \circ f$. Assim pela Proposição 2.1 temos que:

$$\begin{aligned} g \circ f(A_{2k} \setminus A_{2k+1}) &= f(A_{2k}) \setminus f(A_{2k+1}) \\ &= A_{2k+2} \setminus A_{2k+3} \end{aligned}$$

Podemos ver claramente esta aplicação na Figura 5.

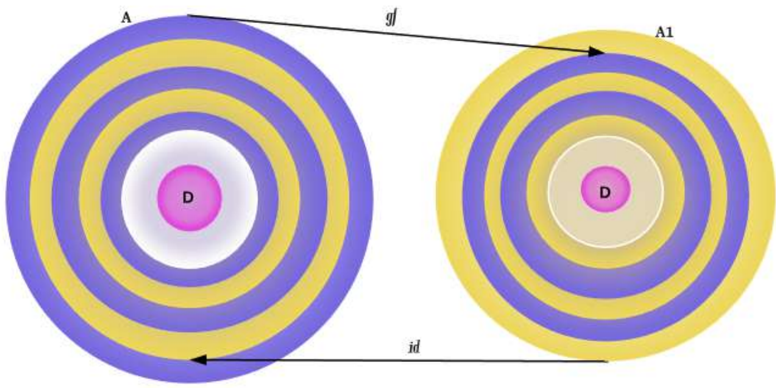

Figura 5: Composição $g \circ f$

Assim definimos a função $\alpha : A_0 \to A_1$ como sendo a função bijetiva entre tais conjuntos, e podemos escreve-la como:

$$\alpha(a) = \begin{cases} a; & \text{se } a \in D \cup \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \setminus A_{2k+2}\right) \\ g \circ f(a); & \text{se } a \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k} \setminus A_{2k+1} \end{cases}$$

Pelo Lema 2.3 esta é uma função bijetiva. Então, temos que $A_0 \sim A_1$ e por hipótese sabemos que $A_1 \sim B_0$, assim por transitividade $A_0 \sim B_0$.

O mais interessante é que além de mostrar que existe essa bijeção, podemos escrever quem é esta correspondência. Compondo a função α com g^{-1} temos a função bijetiva denotada por $h : A_0 \to B_0$. Definida como

$$h(a) = g^{-1} \circ \alpha(a) = \begin{cases} g^{-1}(a); & \text{se } a \in D \cup \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \setminus A_{2k+2}\right) \\ f(a); & \text{se } a \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k} \setminus A_{2k+1} \end{cases}$$

E pelo Lema 2.3 esta função é bijetiva. □

4 Aplicações

4.1 Construção de uma bijeção entre $[0,1]$ e $]0,1[$

A prova do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder nos fornece uma maneira simples de encontrar esta bijeção, por exemplo, podemos tomar duas funções f e g definidas como

$$f :]0,1[\to [0,1] \qquad\qquad g : [0,1] \to]0,1[$$

$$f(x) = x \qquad\qquad g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

Claramente estas são funções injetivas, assim pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder podemos concluir que $]0,1[\sim [0,1]$. Restringindo os contradomínios às suas respectivas imagens temos que

$$A_0 =]0,1[\,, \quad f(A_0) = B_1 = \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\,, \quad f(A_1) = B_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \quad ...$$

Do mesmo jeito,

$$B_0 = [0,1]\,, \quad g(B_0) = A_1 = [0,1]\,, \quad g(B_1) = A_2 = \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\,, \quad ...$$

Assim generalizando as imagens de f temos que:

$$f(A_{k-1}) = \begin{cases} \left[\frac{2^k - 1}{2^{k+1}}, \frac{2^k + 1}{2^{k+1}}\right]; & \text{se } k-1 \text{ é par} \\ \left]\frac{2^k - 1}{2^{k+1}}, \frac{2^k + 1}{2^{k+1}}\right[; & \text{se } k-1 \text{ é ímpar} \end{cases}$$

De maneira análoga, generalizando as imagens de g temos que:

$$g(B_k) = \begin{cases} \left]\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}}, \dfrac{2^k+1}{2^{k+1}}\right[; & \text{se } k \text{ é par} \\ \left[\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}}, \dfrac{2^k+1}{2^{k+1}}\right]; & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Como foi feito no TCBS precisamos identificar se existe interseção entre os $\{A_k\}$ sendo assim, tomamos $x \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$ daqui, temos em particular que $x \in A_{2k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ logo,

$$\begin{aligned} \frac{2^k-1}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{2^k+1}{2^{k+1}} \quad &\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{2^k-1}{2^{k+1}} \leq \lim_{k\to+\infty} x \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{2^k+1}{2^{k+1}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D = \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Com isto finalmente podemos reescrever o conjunto A_0 como união disjunta de suas coroas como feito no teorema, assim, temos que

$$\begin{aligned} A_{2k} \setminus A_{2k+1} &= \left\{\frac{2^k-1}{2^{k+1}}, \frac{2^k+1}{2^{k+1}}\right\} \\ A_{2k+1} \setminus A_{2k+2} &= \left]\frac{2^k-1}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+2}}\right[\bigcup \left]\frac{2^{k+1}+1}{2^{k+2}}, \frac{2^k+1}{2^{k+1}}\right[\end{aligned}$$

Logo a função $h :]0,1[\to [0,1]$ bijetiva pode ser escrita como

$$h(x) = \begin{cases} x; & \text{se } x \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \bigcup (A_{2k+1} \setminus A_{2k+2}) \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}; & \text{se } x \in A_{2k} \setminus A_{2k+1} \end{cases}$$

Podemos ver esta função graficamente na Figura 6

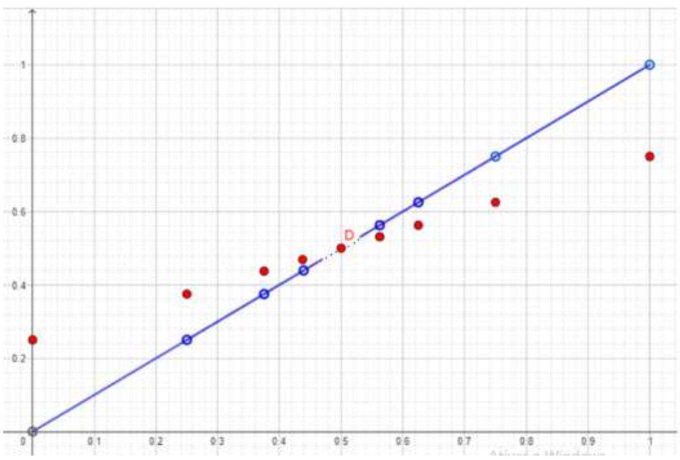

Figura 6: Gráfico da função h

4.2 Equivalência entre $\wp(\mathbb{Z})$ e $\mathbb{R}$

Esta aplicação é inspirada no livro do G. Folland [2].

A estratégia para esta aplicação será encontrar uma função $f : \wp(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ injetiva, e em seguida encontrar uma função $g : \wp(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ sobrejetiva pois pelo axioma da escolha existe uma $h : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Z})$ injetiva e por fim pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder sabemos que $\wp(\mathbb{Z}) \sim \mathbb{R}$. Sendo assim precisamos enunciar o axioma da escolha e também um importante lema.

Axioma da Escolha: Dada uma família $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ de conjuntos não vazios, existe um conjunto C ao qual pertence exatamente um elemento de cada A_α.

Observação 4.1. *É claro que o Axioma da Escolha só é necessário quando trabalhamos com uma família* ***infinita*** *de conjuntos. No caso da família ser finita não precisamos do axioma para fazer tal escolha, pois essa poderia ser feita de maneira sequencial, ou seja, um por um. Coisa impossível no caso do infinito, onde esta escolha deve ser feita de forma* ***simultânea****.*

Lema 4.1. *Toda função sobrejetiva admite uma inversa à direita.*

Demonstração. Dados X e Y conjuntos e uma $f : X \to Y$ sobrejetiva, assim para cada $y \in Y$ temos que $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ de tal modo que $\{f^{-1}(\{y\})\} \subseteq X$. Veja Figura 7.

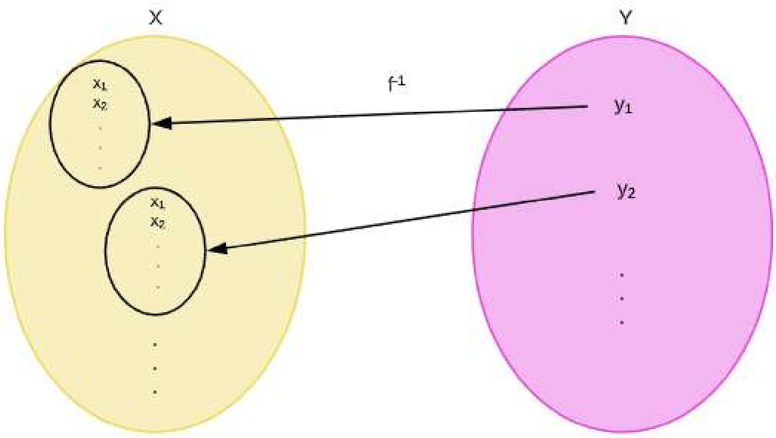

Figura 7: Gráfico da função f^{-1}

Com isto pelo axioma da escolha, dada esta família $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y\in Y}$ existe um conjunto C formado por um elemento de cada conjunto $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y\in Y}$, a saber,

$$C = \left\{x_y : x_y \in f^{-1}(y) \text{ para cada } y \in Y\right\}$$

Assim conseguimos definir a função g com a seguinte regra,

$$
\begin{aligned}
g : Y &\rightarrow X \\
y &\rightarrow x_y
\end{aligned}
$$

Com isto temos que $f(g(y)) = f(x_y) = y$. □

O primeiro passo para nossa demonstração será definir uma função injetiva de $\wp(\mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$ para isto, pegamos $A \subseteq \mathbb{N}$ e definimos a regra,

$$\hat{f}(A) = \sum_{n \in A} 10^{-n}$$

Note que $\hat{f}(A) = 0, a_0 a_1 a_2 ...$ onde cada a_n, verifica que,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in A \\ 0, & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Esta função assim definida é injetiva, com efeito, se pegamos $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tais que,

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(A) = \hat{f}(B) &\Rightarrow 0, a_1 a_2 a_3 ... = 0, b_1 b_2 b_3 ... \\
&\Rightarrow a_i = b_i, \quad \forall i \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow A = B.
\end{aligned}
$$

Portanto $\hat{f}$ é injetiva. Por outro lado sabemos que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ e daqui temos que $\wp(\mathbb{Z}) \sim \wp(\mathbb{N})$, usando composição de funções existe uma função injetiva $\hat{f} : \wp(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$. O próximo passo será construir uma função g sobrejetiva de $\wp(\mathbb{Z})$ em $\mathbb{R}$. Para isto, definimos $g : \wp(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ como segue

$$g(A) = \begin{cases} log\left(\sum_{n \in A} 2^{-n}\right), & \text{se } A \text{ é limitado inferiormente e } A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Afrimamos que esta função $g : \wp(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, com efeito dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = log(x_0)$. Desde que y admite representação decimal em base 2 temos que,

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + ... + a_0 2^0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2} + ... \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i 2^i + \sum_{j=1} \frac{b_j}{2^j}
\end{aligned}
$$

Agora definimos o conjunto $C = \{m \in \mathbb{Z} : a_{-m} = 1 \ ou \ b_m = 1\}$ e com este temos,

$$
\begin{aligned}
g(C) = \log\left(\sum_{n \in C} \frac{1}{2^n}\right) &= \log\left(\sum_{m=1}^{k} a_m 2^m + \sum_{m=1} b_m 2^{-m}\right) \\
&= \log(x_0) = y.
\end{aligned}
$$

Assim, provamos que g é sobrejeitiva e pelo Lema 4.1, existe uma função $h : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Z})$ injetiva, com isto conseguimos construir uma $\hat{f} : \wp(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ injetiva e $h : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Z})$ injetiva logo pelo TCBS temos $\mathbb{R} \sim \wp(\mathbb{N})$.

Corolário 4.1. *$\mathbb{R} \sim \wp(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R} \sim \wp(\mathbb{Q})$.*

Demonstração. Segue diretamente da equivalência $\mathbb{R} \sim \wp(\mathbb{Z})$. □

5 Conclusão

Neste trabalho usamos a propriedade da infinitude do infinito para poder construir uma bijeção entre um conjunto e um subconjunto próprio dele. Esta ideia esta também presente em outras construções tais como o Hotel de Hilbert e o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Assim este trabalho contribui na compreensão da aplicação do infinito na matemática.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador por toda paciência, carinho e dedicação que sempre mostrou ao me conduzir a este estudo.
Agradeço ao revisor deste trabalho pelas correções que me guiaram e ajudaram a tornar este trabalho mais coerente.
Agradeço a todos os professores e contribuintes que trabalham incansavelmente para que o avanço científico não estagne.

Referências

[1] BOREL, E.: Leçons sur la Théorie des fonctions(elements et principles de la théorie des ensembles).Gauthier Villars.1898.

[2] FOLLAND, G. B. Real Analysis: Modern Techniques and Their applications, Volume 40. Jhon Wiley and sons.1999.

[3] HINKINS, A. Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem. Springer. 2013.

[4] KOLMOGOROV, A. N. , Elementos de la teoría des funciones y del análisis funcional, 1972.

[5] LEDESMA, G. G., Análise Real. Notas de Aula. 2018.

[6] SCHRÖDER, E. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereiniganf. 1896.