Cadernos do IME - Série Matemática *DOI: 10.12957/cadmat.2020.52651*
***e-ISSN**: 2236-2797 (online)* *Recebido em 11 Jul. 2020 | Aceito em 22 Ago. 2020*

UMA RELEITURA DA ORIGEM GEOMÉTRICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA O AUXÍLIO NO ENSINO SUPERIOR

A REVIEW OF THE GEOMETRIC ORIGIN OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS FOR HELP IN HIGHER EDUCATION

ROGERIO LUIZ QUINTINO DE OLIVEIRA JUNIOR [a]

Resumo

Este trabalho pretende apresentar a origem do mais importante resultado do Cálculo Diferencial e Integral: o Teorema Fundamental do Cálculo, em sua versão geométrica como concebida por Isaac Barrow, como meio facilitador de ensino da disciplina de Cálculo para cursos superiores. A História da Matemática e a maneira como os matemáticos do século XVII pensavam, neste caso, tencionam dirimir a dificuldade que os alunos desses cursos têm em entender como os processos de derivação e integração são inversos. Para alcançar este objetivo, apresentamos, também, um exemplo prático de aplicação da prova feita por Barrow usando a notação de funções e a matemática atual.

Palavras-chave: Ensino, Cálculo, História da Matemática, Teorema Fundamental.

Abstract

This work intends to present the origin of the most important result of the Differential and Integral Calculus: the Fundamental Theorem of Calculus, in its geometric version as conceived by Isaac Barrow, as a means of facilitating the teaching of Calculus for higher education courses. The History of Mathematics and the way in which 17th century mathematicians thought, in this case, intend to resolve the difficulty that students of these courses have in understanding how the processes of derivation and integration are reversed. To achieve this goal, we also present a practical example of applying the proof made by Barrow using function notation and current mathematics.

Keywords: Teaching, Calculus, History of Mathematics, Fundamental Theorem.

MSC2010: 97D10

1. Introdução

[a] Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil; ORCID: 0000-0002-9894-9980. **E-mail**: roger.quintino@hotmail.com

Não é inteiramente correto acreditar que Newton e Leibniz tenham criado o Cálculo Diferencial e Integral de forma independente e de uma maneira totalmente espontânea e nova para a época. O próprio Newton, em uma carta para Robert Hooke, escreveu a famosa frase: “Se avistei mais longe, é por que estava sobre os ombros de gigantes”. [6, p. 315]

O que aconteceu, de fato, foi uma conjunção de ideias e métodos que esses matemáticos acabaram agregando ao que hoje conhecemos como CDI. Eles são considerados os “inventores” do Cálculo pois [1, p. 251]:

1. Desenvolveram uma notação própria, cada um com a sua notação individual e única, onde puderam expressar os diversos problemas que envolviam propriedades de curvas como tangentes, arcos, áreas e outros;

2. Com essa notação, eles puderam tratar os diversos problemas de Cálculo que apareciam como cálculo de máximos e mínimos de funções, retas tangentes à uma determinada curva em um ponto dado, problemas de área sob o gráfico de uma função etc., que eram tratados de forma isolada ou em métodos particulares, sem ter que particularizar o problema que enfrentavam;

3. Observaram e mostraram a relação que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo e sua extrema importância: este Teorema que afirma que derivação e integração são processos inversos e este é um problema central e geral do Cálculo, não acontecendo somente para funções ou casos particulares [1, p. 5].

Claramente, para eles conseguirem esse feito, muitos matemáticos os precederam e fizeram suas contribuições à Matemática desde a Antiguidade. Entre eles, podemos citar Arquimedes, Aristóteles, Fermat, Descartes, Kepler, Cavalieri, Saint Vincent, James Gregory e Issac Barrow [2].

O que queremos destacar, primeiramente, é que a relação entre derivação e integração já havia sido observada anteriormente por James Gregory, em sua obra de 1668 intitulada *Geometriae Pars Universalis* [8, p. 565], e por Issac Barrow, de quem Newton foi pupilo, na sua obra-prima *Lectiones Geometricae*, publicada apenas dois anos depois, em 1670 [1, p. 240].

É interessante observar que, como hoje em dia, para um aluno de CDI, achar uma tangente à curvas sempre foi um processo mais rotineiro do que encontrar àreas sob os gráficos das curvas, e o mesmo era verdade em 1659, época precedente às visões de Gregory e Barrow sobre a relação derivação *versus* integração [4, p. 19].

No entanto, como vimos no outro parágrafo, alguns matemáticos começaram a perceber a relação entre esses dois tipos de problemas: tangentes e áreas. Mas o que faltava a eles para "descobrirem" o CDI?

Podemos destacar três tipos de embaraços principais para isso: a falta de uma linguagem matemática adequada que traduzisse o que eles estavam fazendo, "o conflito das exigências ou rigor matemático impostos pela lógica dedutiva e pela natureza essencial ou o infinitamente grande e o infinitamente pequeno perpetuamente levando ao paradoxo e à anomalia"[b] [1, p. 2-3], e, por último, o fato de que nem James Gregory nem Issac Barrow deram muita importância ao que eles haviam "notado" na "nova" relação entre tangentes e áreas, achando-a apenas um fato curioso sem mais a ser discutido sobre ele.

Para diferenciar melhor os feitos de Newton e Leibniz daqueles obtidos por seus antecessores, Charles Henry Edwards Jr. (1979) nos diz que:

> O que está em questão aqui é a diferença entre a mera descoberta de um fato importante e o reconhecimento de que ele é importante – isto é, que este fato estabelece a base para progressos futuros. Em Matemática, o reconhecimento do significado de um conceito ordinariamente envolve a sua incorporação em nova terminologia ou notação que facilite sua aplicação em futuras investigações.[c] [3, 189]

Este artigo não se propõe a tratar do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) na forma como foi concebido por Newton ou Leibniz, mas justamente ver como ele era visto na sua forma geométrica. Apesar de James Gregory ter sido o primeiro a vê-lo desta maneira, a sua prova para o TFC é bastante complicada e requer uma série de transformações geométricas que fogem do escopo deste trabalho. Desta forma, veremos o TFC, na sua forma geométrica, como provado por Barrow. Veremos a sutileza da prova dada por este matemático relacionando tangentes e áreas no seu formato original, mas de uma maneira mais detalhada do que originalmente ele fez.

---

[b] […] the conflict between the demands or mathematical rigour imposed by deductive logic and the essential nature of the infinitely great and the infinitely small perpetually leading to paradox and anomaly.

[c] What is involved here is the difference between the mere discovery of an important fact, and the recognition that it is important – that is, that it provides the basis for further progress. In mathematics, the recognition of the significance of a concept ordinarily involves its embodiment in new terminology or notation that facilitates its application in further investigations.

Por último, daremos um exemplo prático de aplicação do método de prova de Barrow usando funções e a notação matemática que conhecemos atualmente.

É importante notar que o uso da História da Matemática pode ser um meio moderador no ensino não só de Cálculo, mas de outras disciplinas da Matemática, pois

> Nos nossos dias, o ensino da matemática tende frequentemente para a aplicação "mecanicista" de técnicas apoiada numa notação eficiente, orientada para a resolução de exemplos e problemas, sem estimular uma compreensão suficientemente profunda das ideias e dos conceitos. O estudo da história da matemática é uma excelente forma de mitigar esta deficiência. Permite-nos compreender a génese e o desenvolvimento das grandes ideias, tal como surgiram e tomaram forma na mente dos grandes matemáticos. [7, p. 66]

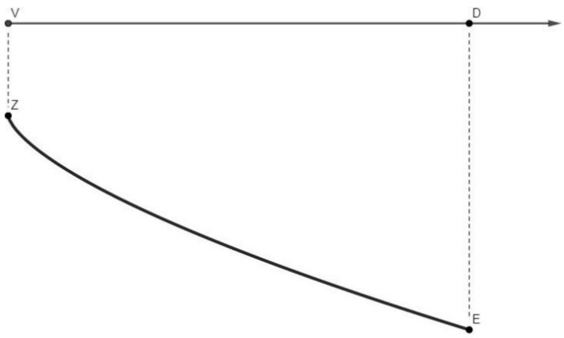
Desta maneira, apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo como concebido por Barrow em 1670 e mostrar um exemplo de aplicação do seu método de demonstração com a notação que os alunos de cursos superiores conhecem se revela uma maneira potencializadora de aprendizagem desse resultado fundamental da Matemática para esses estudantes.

1 O Teorema Fundamental do Cálculo como concebido por Issac Barrow

É interessante observar que este resultado não foi apresentado, por Barrow, como um Teorema ou uma Proposição. Portanto, vamos mostrá-lo da mesma forma que ele [5, p. 378-379], mas com mais explicações e detalhamento para uma melhor compreensão do leitor.

Considere, primeiramente, uma semirreta horizontal $\overrightarrow{VD}$ e seja dada ZE uma curva qualquer, cujo eixo (horizontal) seja $\overrightarrow{VD}$, esteja abaixo dele e tal que esta curva tenha coordenadas perpendiculares a este eixo, como, por exemplo, Z sendo a coordenada perpendicular relativa a V e E sendo a coordenada perpendicular relativa a D. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as coordenadas perpendiculares da curva ZE são continuamente crescentes. Assim, por exemplo, $\overline{VZ} < \overline{DE}$.

Figura 1: Curva ZE qualquer com eixo $\overrightarrow{VD}$.



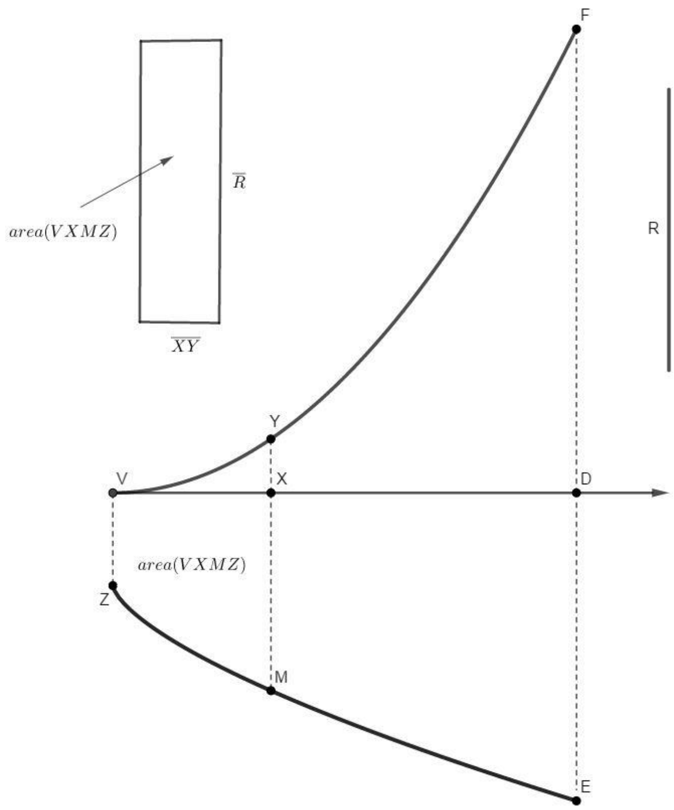
Fonte: Autoral.

Vamos, agora, construir uma curva VF, com eixo $\overrightarrow{VD}$, que esteja situada acima dele e tenha origem em V, da seguinte maneira: para cada ponto X do eixo $\overrightarrow{VD}$, se M for a coordenada perpendicular da curva ZE em relação a X e R for um segmento com comprimento fixo dado, então a coordenada perpendicular Y da curva VF que estamos construindo, relativa ao ponto X, deve satisfazer a condição:

$$\overline{XY} \times \bar{R} = area(VXMZ), \tag{1}$$

onde estamos denotando por $area(VXMZ)$ a área da figura com fronteira dada pela união dos segmentos VZ, VX, XM, e a parte ZM contida na curva inicial dada ZE.

Figura 2: Curva VF construída.



Fonte: Autoral.

Desta forma, vemos que, com esta definição, de fato a curva construída VF terá origem em V. Além disso, considerando que F seja a coordenada perpendicular da curva VF relativa ao ponto D, temos, por exemplo, que

$$\overline{DF} \times \bar{R} = area(VDEZ).$$

Agora, seja T um ponto sobre o eixo $\overrightarrow{VD}$ de tal forma que ele satisfaça a condição

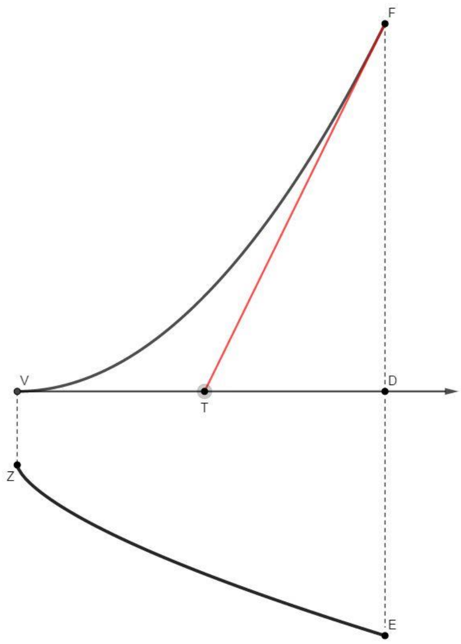
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\bar{R}}{\overline{DT}}. \tag{2}$$

Observe que, necessariamente, pela condição acima, o ponto T deve estar situado entre os pontos V e D, pois $area(VDEZ) = \overline{DF} \times \bar{R} = \overline{DE} \times \overline{DT}$. Se T estivesse situado num ponto tal que $\overline{VT} \geq \overline{VD}$, então teríamos $\overline{DE} \times \overline{DT} \geq \overline{DE}^2$, ou seja, concluiríamos que $area(VDEZ) \geq \overline{DE}^2$. Mas isto é uma contradição, visto que a figura com área igual a $area(VDEZ)$ está contida no quadrado de lado DE.

Feita esta observação, ligue os pontos T e F. Com isso, vamos mostrar que:

Afirmação: a reta que contém o segmento TF é tangente, no sentido grego[d], à curva construída VF no ponto F.

Figura 3: ponto T e segmento TF.



Fonte: Autoral.

[d] Isto quer dizer que TF é uma linha reta que toca a curva VF em um só ponto. Por isso dizemos que esta é uma prova geométrica e não analítica. [3, p. 140]

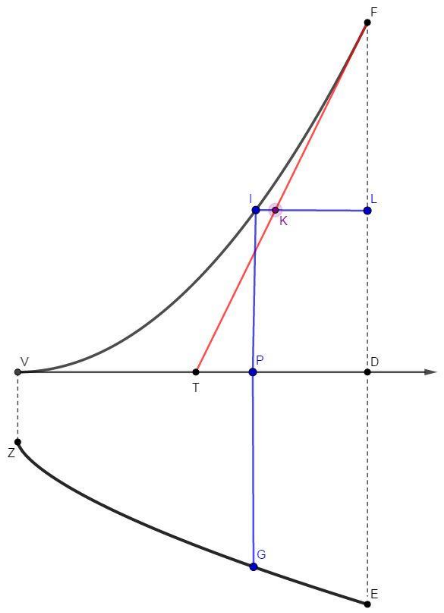
Para provarmos esta afirmação, considere I um ponto qualquer da curva VF situado, por exemplo, entre V e F, mas não coincidente com F. A partir disso, considerando a perpendicular ao eixo $\overrightarrow{VD}$ que passa por I, sejam P e G as suas interseções com o eixo $\overrightarrow{VD}$ e a curva inicial dada ZE, respectivamente.

Considere L um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que o segmento IL seja paralelo ao eixo $\overrightarrow{VD}$. Com isso, teremos que, como a curva VF é crescente e I está entre V e F, então o ponto L está entre os pontos D e F. Seja K a interseção entre os segmentos TF e IL.

Vamos mostrar que o ponto K está situado abaixo da curva VF. Para isto, note, primeiramente, que, por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{\overline{LF}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DT}}. \tag{3}$$

Figura 4: pontos I e K.



Fonte: Autoral.

Por outro lado, da definição do ponto T, temos que $\frac{\overline{DF}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{DE}}{\bar{R}}$. Juntando isso à (3), chegamos à conclusão que $\frac{\overline{LF}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{DE}}{\bar{R}}$, ou, equivalentemente, que

$$\bar{R} \times \overline{LF} = \overline{LK} \times \overline{DE}. \tag{4}$$

Agora, da definição de construção da curva VF, temos que

$$\overline{PI} \times \bar{R} = \bar{R} \times \overline{LD} = area(VPGZ).$$

Assim, como temos que $\overline{DF} \times \bar{R} = area(VDEZ)$, segue-se, portanto, que

$$\bar{R} \times \overline{LF} = \bar{R} \times (\overline{DF} - \overline{LD}) = area(VDEZ) - area(VPGF) = area(PDEG). \quad (5)$$

Então, de (4) e (5), vemos que $\overline{LK} \times \overline{DE} = \bar{R} \times \overline{LF} = area(PDEG) < \overline{PD} \times \overline{DE}$, pois a figura cuja área é $area(PDEG)$ está contida no retângulo de lados PD e DE, por construção.

Desta última desigualdade, concluímos, finalmente, que $\overline{LK} < \overline{PD} = \overline{IL}$, o que mostra que, de fato, o ponto K está situado abaixo da curva VF, como havíamos afirmado anteriormente.

Com isso, como o ponto I tomado era um ponto qualquer da curva VF, situado entre V e F, mas não igual a F, acabamos de mostrar que todos os pontos do segmento TF estão abaixo da curva construída VF, com exceção de F, onde TF e VF se interceptam.

Agora, se consideramos um ponto qualquer I da curva VF situado além de F, concluímos, com uma demonstração análoga a que foi feita, que todos os pontos da reta que contém o segmento TF e estão depois de F também estão situados abaixo da curva construída VF. Sendo assim, de fato, esta reta é tangente á curva VF no ponto F, como queríamos demonstrar.

Como uma última observação desta seção, se a curva inicial dada ZE tivesse coordenadas perpendiculares continuamente decrescentes, chegaríamos à mesma conclusão sobre a reta que contém o segmento TF. A única distinção entre os dois casos para a curva ZE é que, pela construção da curva VF, se ZE tem coordenadas perpendiculares continuamente crescentes, então a curva VF é côncava para cima e, no outro caso, ela é côncava para baixo.

Para vermos isto, consideremos o caso em que a curva ZE tem coordenadas perpendiculares continuamente crescentes. Então, pela definição de construção da curva VF, temos que $area(VPGZ) < area(VDEZ)$, donde $\overline{PI} \times \bar{R} < \overline{DF} \times \bar{R}$, ou seja, $\overline{PI} < \overline{DF}$, para todo ponto I da curva VF situado entre D e F, mas não igual a F. Se, por outro lado, I estiver além de F, então $area(VDEZ) < area(VPGZ)$, o que implica que $\overline{DF} \times \bar{R} < \overline{PI} \times \bar{R}$, ou seja, neste caso, $\overline{DF} < \overline{PI}$. Assim, isto mostra que as coordenadas perpendiculares da curva construída VF são continuamente crescentes, o que não permite que VF tenha um ponto de inflexão e deva ser, necessariamente, côncava para cima.

2 Um exemplo prático da prova de Barrow usando a notação matemática atual

Nesta seção, veremos um exemplo prático com uma função $f(x)$ no lugar da curva ZE dada no método de demonstração de Barrow, que vimos na seção anterior, para percebermos melhor o que ele realmente provou: o Teorema Fundamental do Cálculo. Da mesma maneira, nos permitiremos manter a notação matemática atual dentro deste exemplo para uma melhor compreensão do leitor.

Vamos considerar o plano cartesiano xy com a restrição $x \geq 0$ e com as coordenadas y sendo positivas e crescentes a partir da origem, tanto no sentido para cima quanto no sentido para baixo do eixo y. O eixo x representará o eixo $\overrightarrow{VD}$ da demonstração de Barrow, sendo $V = (0{,}0)$ e $D = (6{,}0)$.

Considere a função

$$f(x) = \frac{x^2}{32} + 2,$$

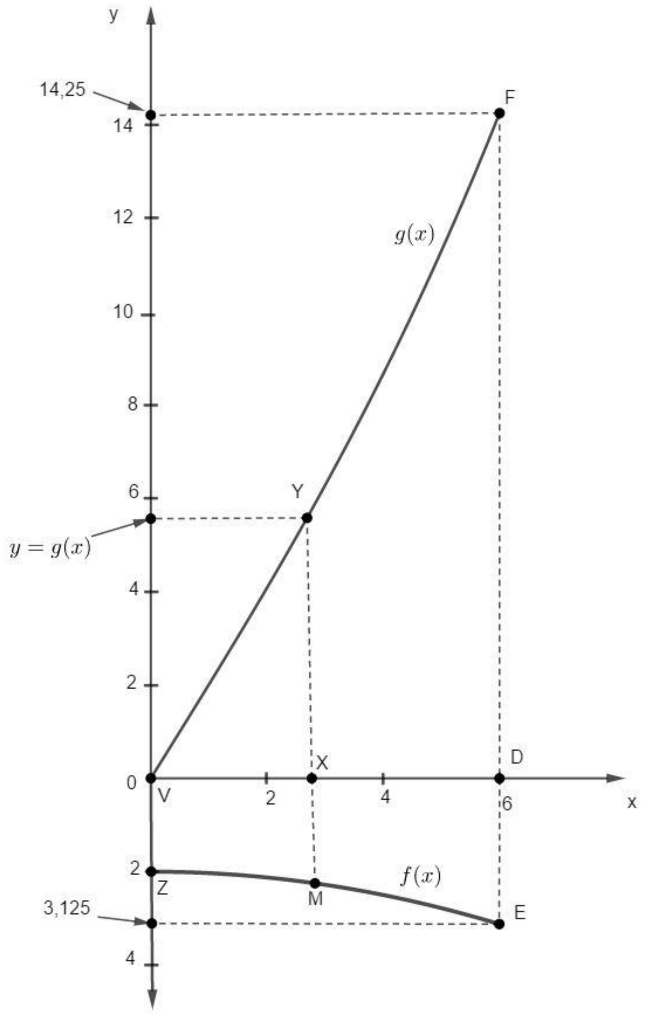
de tal forma que as coordenadas $y = f(x)$ estejam situadas abaixo do eixo x. Esta representará a curva ZE dada na demonstração de Barrow cujas coordenadas verticais são continuamente crescentes. Então, neste caso, temos que $Z = (0{,}2)$ e $E = \big(6, f(6)\big) = (6; 3{,}125)$, onde as ordenadas destes dois pontos estão situadas abaixo do eixo x.

Agora, a função $y = g(x)$ que representará a curva construída VF da demonstração de Barrow será obtida considerando-se $\bar{R} = 1$. Com isso, suas coordenadas verticais y devem satisfazer a condição (1), isto é, considerando $X = (x, 0)$, com $0 \leq x \leq 6$, $M = \big(x, f(x)\big)$ e $Y = (x, g(x))$, temos que

$$\overline{XY} \times \bar{R} = area(VXMZ) \Rightarrow g(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \frac{x^3}{96} + 2x.$$

Desta forma, teremos, para este caso, que $F = \big(6, g(6)\big) = (6; 14{,}25)$. As funções f e g são mostradas abaixo.

Figura 5: curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



Fonte: Autoral.

Agora, seja T um ponto sobre o eixo $\overrightarrow{VD}$ (= eixo x) satisfazendo a condição (2). Assim, segue-se que

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\bar{R}}{\overline{DT}} \Rightarrow \frac{3{,}125}{14{,}25} = \frac{1}{\overline{DT}} \Rightarrow \overline{DT} = 4{,}56 \Rightarrow T = (6 - 4{,}56\,;0) \Rightarrow T = (1{,}44\,;0).$$

Com isso, temos, pela demonstração de Barrow, que a reta que contém o segmento TF é tangente à curva $y = g(x)$ no ponto F, que é aquela que representa a curva construída VF de Barrow.

De fato, a reta acima passa pelos pontos $T = (1{,}44\,;0)$ e $F = (6\,;14{,}25)$, ou seja, tem equação

$$y = 3{,}125\,x + 1{,}44.$$

Por outro lado, sabemos que o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = g(x)$ no ponto F é $a = g'(6)$. Como $g'(x) = \frac{x^2}{32} + 2$, segue-se que $a = 3{,}125$. Observe que este é o mesmo coeficiente da reta acima. Considerando o ponto T pelo qual ela passa, chegamos à conclusão que, de fato, a afirmação feita por Barrow está correta, ou seja, em termos de hoje, ele teria demonstrado, para este exemplo que demos, que $g'(6) = f(6)$. Isto significa, pela construção de g, que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = f(x) \quad \text{no ponto } x = 6,$$

que é o Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a $x = 6$. Obviamente, este ponto $x = 6$ apareceu somente pelo exemplo que usamos. Como Barrow não particularizou o ponto F na curva construída VF, vemos que, na verdade, ele demonstrou que $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = f(x)$, para todo $x > 0$, considerando uma função f qualquer monótona. Logo, ele percebeu claramente que problemas de áreas estavam intimamente relacionados a problemas de retas tangentes a curvas. Observe que a condição (2) para o ponto T equivale a dizer que T deva satisfazer

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{R}},$$

ou seja, a condição (2) tratava de tangentes de fato, pois $\frac{\overline{DF}}{\overline{DT}}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva VF no ponto F e a condição era que T fosse tal que este coeficiente da reta $\overleftrightarrow{TF}$ fosse um múltiplo positivo qualquer da coordenada vertical $\overline{DE}$ da curva ZE inicialmente dada.

Este exemplo poderia ter sido feito considerando o ponto D como sendo $(x, 0)$, com $x > 0$ qualquer, evitando restrições para x no resultado final. No exemplo, optamos fazer $x = 6$ para torná-lo menos abstrato e mais acessível aos alunos.

3 Comentários e conclusões

Vimos até aqui o quanto que a História da Matemática pode ser útil na explicação da dualidade integração-diferenciação que é estudada no Teorema Fundamental do Cálculo para alunos de universidades.

De fato, trabalhar primeiramente com a demonstração geométrica dada por Barrow pode ser um fator mais estimulante para relacionar a questão dos problemas de áreas e tangentes para os estudantes. Em seguida, aplicar esta demonstração num exemplo prático usando funções e a notação matemática atual acaba por levar o aluno a perceber que diferenciação e integração são processos inversos.

Desta forma, o aluno tem um apelo geométrico na percepção da dualidade área-tangente para depois observar, no exemplo prático, a dualidade integração-diferenciação. Esta maneira de abordagem pode se revelar muito útil na aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo, desmistificando este importante teorema matemático para o aluno.

Outra coisa a ser observada é que o fato de mostrar, para os estudantes, como os matemáticos do século XVII pensavam e faziam a demonstração dos seus resultados usando geometria plana também pode ser um elemento motivador no ensino-aprendizagem de Cálculo.

Uma possibilidade também seria dar um exemplo mais simples para os próprios alunos desvendarem a demonstração de Barrow, como utilizar uma reta no lugar da curva ZE inicialmente dada. Com isso, os alunos podem chegar bem mais facilmente à conclusão que Barrow havia provado e observar que há uma relação relevante entre os processos de diferenciação e integração. Isto poderia ser dado em uma aula anterior à aula sobre o TFC, fazendo com que os alunos, por eles mesmos, já tivessem obtido o resultado deste Teorema antes de sua visualização no formato que vemos hoje nos cursos de Cálculo. Por este motivo, para os alunos terem um exemplo mais perceptível já feito, como dito no final da seção anterior, escolhemos fazer um exemplo prático considerando o ponto D não sendo igual a $(x, 0)$, com $x > 0$ qualquer.

Referências

[1] BARON, M.: **The origins of the infinitesimal calculus**. New York: Dover Phoenix Editions, 1969.

[2] BOYER, C.: **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. Dover Publications, Inc., New York, 1949.

[3] C. H. EDWARDS, Jr.: **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer -Verlag, 1979.

[4] GRAY J.: **The Route to the Calculus - Unit 9**. The Open University Course, 1987.

[5] FAUVEL, J.; GRAY J.: **The History of Mathematics: A Reader**. The Open University, 1987.

[6] KOYRÉ, A. **An Unpublished Letter of Robert Hooke to Isaac Newton**. *Isis*, v. 43, n. 4, 1952, p. 312–337. JSTOR. Disponível em <www.jstor.org/stable/227384>. Acesso em: 13 Mai. 2020.

[7] LEMOS, C. M.: **Os Logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas – um apontamento histórico**. Boletim da SPM 66, maio, Lisboa, 2012, p. 65-104.

[8] VELASCO E. A. G.: **James Gregory's Calculus in the Geometriae Pars Universalis**. The AMM, vol. 114, n. 7, ago-set, 2007, p. 565-576.