Cadernos do IME - Série Matemática
DOI: 10.12957/cadmat.2020.50351
e-ISSN: *2236-2797 (online)*
Recebido em 20 Abr. 2020 | Aceito em 10 Jun. 2020

APRENDENDO SOBRE FIBONACCI DESDE CEDO: ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

LEARNING ABOUT FIBONACCI SINCE EARLY AGE: ACTIVITIES FOR MIDDLE SCHOOL

CRISTIANE O. FARIA[a] ANA CAROLINA A. FUNDO[b]
RUTH ISABELA B. GONÇALVES[c] GABRIEL G. LIMA[d]
VANESSA B. da SILVA[e] VITOR B. E. de SOUZA[f]

Resumo

Neste artigo apresentamos uma coletâna de abordagens em forma de atividades para a sequência de Fibonacci, utilizando materiais concretos que professores de Matemática do Ensino Fundamental II possam aplicá-las em sala de aula. O objetivo destas atividades é apresentar o tema de uma maneira expositiva, divertida e curiosa, e assim, aguçar o interesse do alunado pela Matemática. Além disso, busca relacionar a sequência de Fibonacci com conteúdos programáticos do Ensino Fundamental II, como geometria plana, raciocínio lógico, operações em diferentes conjuntos numéricos, razão e proporção. E assim, mostrando como os conteúdos matemáticos se interligam e podem ser muito mais interessantes quando estudados juntos.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci, Ensino de Matemática, Educação Básica, Matemática no Cotidiano.

Abstract

On this article, we exhibit a set of teaching approaches designed as activities for the Fibonacci Sequence using concrete materials which Math teachers of Middle School can manage in their classrooms. The objective of these

[a]Departamento de Análise Matemática, Instituto de Matemática e Estatística – IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0402-7185 **E-mail: cofaria@ime.uerj.br**
[b]IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; **E-mail: carol-norfolk@hotmail.com**
[c]IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; **E-mail: ruthisabelab@gmail.com**
[d]IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; **E-mail: gabrielgonzaga@outlook.com**
[e]IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; **E-mail: vanessabarretodasilva@gmail.com**
[f]IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; **E-mail: vitorbueno311@gmail.com**

activities is to present the theme in a curious, expositive and fun way and, consequently, make the students excited about studying Mathematics. Moreover, it aims at relating the Fibonacci Sequence to the contents of Midde School syllabuses, such as plane geometry, logical reasoning, operations in different number sets, ratio and proportion. Showing, therefore, how the contents are interconnected and may be much more interesting when they are studied together.

Keywords: Fibonacci sequence, Mathematics teaching, Basic education.

1 Introdução

O italiano Leonardo de Pisa, nascido na segunda metade do século XII, é tido como um dos matemáticos mais ilustres da história. Por ser filho de Guilielmo Bonacci, Leonardo se tornou mais conhecido pelo codinome *Fibonacci*, diminutivo para filho de Bonacci [10]. Dentre suas célebres contribuições para a Matemática, a mais conhecida delas é a sequência que carrega seu nome, que é o assunto que motiva este artigo: a sequência de Fibonacci.

Este é um tema bastante versátil - já que pode ser profundamente explorado em discussões do Ensino Superior, mas também pode ser facilmente abordado em aulas do Ensino Fundamental - e com um forte potencial para atrair a atenção dos alunos deste nível, pois possui grande apelo visual e pode ser abordado por meio de atividades lúdicas e interativas, tanto pelo viés geométrico, quanto pelo aritmético ou ainda algébrico.

Este artigo tem por finalidade ser um compêndio de sugestões de atividades para professores de Matemática do Ensino Fundamental II que abordam a sequência de Fibonacci em sala de aula utilizando materiais concretos. Estas atividades foram criadas de modo que o professor que se interessar possa escolher diferentes abordagens pensadas para diferentes faixas etárias. Todas elas são feitas com materiais didáticos concretos e lúdicos (além de fácil construção e acesso de materiais), de modo que o aprendizado do aluno seja mais ativo e interessante. Com estas sugestões pode-se contemplar assuntos já aprendidos em sala de aula ou que ainda serão ensinados, e assim, pode-se servir como uma espécie de revisão de alguns tópicos ou como motivação inicial para aprendê-los. Dentre as atividades coletadas e adaptadas apresentadas neste artigo temos um quebra-cabeça feito com E.V.A.[1], um relógio utilizando padrões da sequência e, até mesmo a construção da sequência

[1]Espuma Vinílica Acetinada

ultilizando uma planilha eletrônica ou um software educacional como o GeoGebra.

Três das atividades (encontradas nas Seções 3.1, 3.5 e 3.6) foram aplicadas e os resultados foram apresentados em forma de painel no XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional [5] comprovando a eficiência de utilizar jogos em sala de aula. Como continuação do trabalho mencionado anteriormente, o presente artigo traz essas e outras atividades de forma detalhada para mostrar aos professores que atuam no Ensino Fundamental II como elas podem ser trabalhadas, propostas de materiais didáticos, como confeccioná-los e aplicá-los.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 será abordado a ideia da sequência de Fibonacci, uma contextualização histórica mais detalhada e como a sequência é apresentada aos alunos. Na Seção 3 será apresentado mais detalhadamente as atividades propostas, como elas foram concebidas, seus objetivos e como apresentá-las aos alunos. Por fim, as conclusões obtidas serão expostas na Seção 4.

2 Como surgiu a sequência de Fibonacci? Onde a encontramos?

Na segunda metade do século XII, na cidade de Pisa, nasceu o matemático Leonardo Fibonacci que apresentou uma das sequências numéricas mais ilustres da Matemática até hoje. Devido à sua proximidade com o mundo comercial, Fibonacci desenvolveu habilidades com negócios e, consequentemente, desenvolveu sua capacidade de calcular, o que desencadeou no seu interesse pela Matemática. Desenvolveu muitos trabalhos e pesquisas, mas foi em seu livro “Liber Abaci”, publicado em 1202, que contribuiu com a sequência mencionada acima, que atualmente leva seu nome: *sequência de Fibonacci* [11].

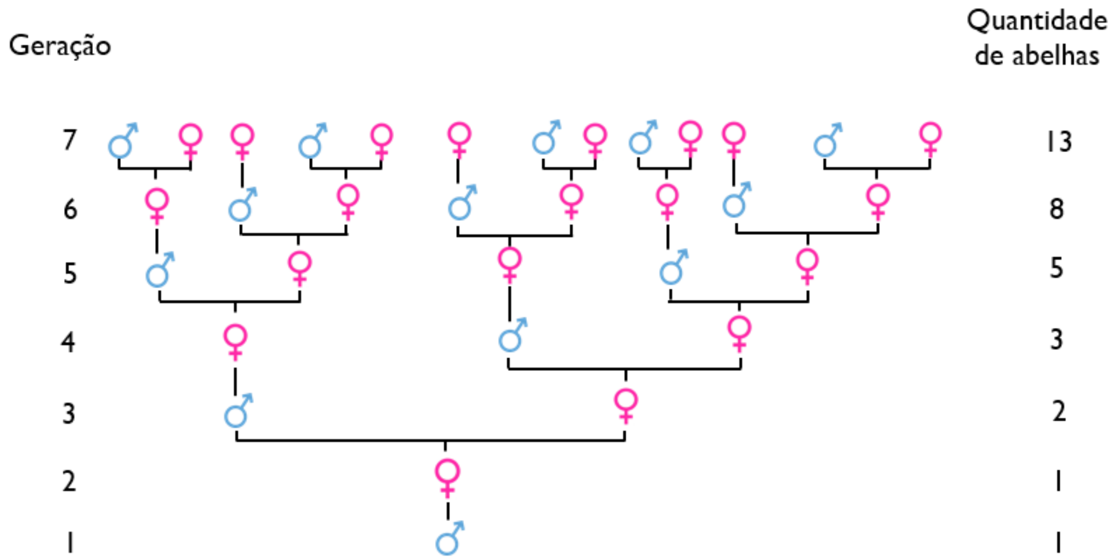
Para poder explicar esta sequência, Fibonacci propôs um problema no qual um casal de coelhos se reproduzem a cada mês, sob a condição de que apenas um casal se reproduziria inicialmente e que cada casal só se tornaria fértil após o segundo mês de vida. Porém para resolver esse problema, são propostas condições iniciais que não condizem com a realidade, já que coelhos atingem a maturidade sexual aproximadamente aos quatro meses de vida [3], não têm necessariamente apenas um casal de filhos e nem obrigatoriamente se reproduzem a cada dois meses.

Um problema mais condizente com o que acontece na realidade e que é descrito pela sequência de Fibonacci é a árvore genealógica das abelhas do sexo masculino da espécie *apis*, como citado por Knott [8]. Em uma colônia de abelhas, há uma fêmea especial chamada rainha e outras abelhas operárias que são fêmeas também, mas ao contrário da abelha rainha, elas não produzem nenhum óvulo. As abelhas-rainhas são abelhas que foram alimentadas com uma substância especial chamada geléia real, que as fazem crescer como rainhas prontas para começar uma nova colônia. Já as abelhas-operárias são aquelas que não consumiram tal substância. As abelhas-rainhas formam um enxame e saem de sua casa (uma colméia) em busca de um lugar para construir um novo ninho.

Os machos são produzidos pelos ovos não fertilizados da rainha, então os machos só têm mãe, sem pai. Todas as fêmeas são produzidas quando a rainha acasala com um macho e, portanto, estas têm dois progenitores.

Em suma, as abelhas do sexo masculino têm apenas um progenitor (uma fêmea), enquanto as do sexo feminino tem dois progenitores (um macho e uma fêmea). Com estas informações, pode-se construir a árvore genealógica do zangão como pode ser vista na Figura 1. Inicialmente os machos só tem um pai, uma abelha fêmea. No entanto, ele vai ter dois avôs, pois a abelha fêmea veio da fecundação de um macho e uma fêmea. Em seguida, ele vai ter três bisavôs, pois sua avó tem dois pais e seu avô tem um pai. Esta análise pode ser repetida sucessivamente, e assim, a árvore genealógica aparecerá.

Figura 1: Árvore Genealógica de um Zangão



Fonte: Autoral.

Dessa maneira, a quantidade de ancestrais de um zangão forma uma sequência numérica. Mas o que torna essa sequência tão especial? A resposta para essa pergunta é composta de diversos fatos. O primeiro deles é que é possível reparar que, estabelecidos os dois primeiros termos da sequência, todos os outros termos são gerados a partir da soma dos seus dois antecessores imediatos (por exemplo, 2 é o resultado da soma de 1 e 1, assim como 3 é o resultado da soma de 1 e 2).

Diante disso, pode-se encontrar os números da sequência de Fibonacci (veja a Tabela 1) de modo que a fórmula de recorrência (2.1) seja obtida:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \in \mathbb{N}, \text{com } n \geq 3 \tag{2.1}$$

onde F_n indica o n-ésimo termo da sequência e $F_1 = F_2 = 1$.

Tabela 1: Tabela com os termos da sequência de Fibonacci

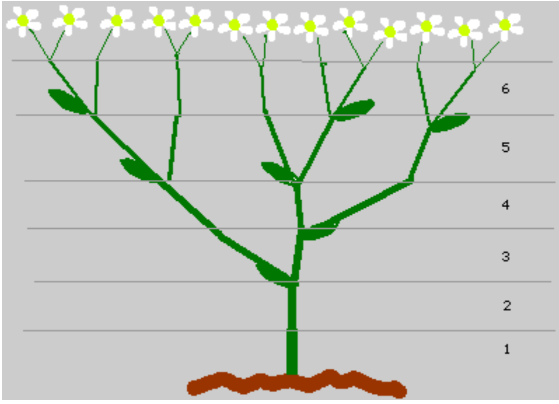
Posição do termo (n)	Valor do termo (F_n)
1	1
2	1
3	$1 + 1 = 2$
4	$2 + 1 = 3$
5	$3 + 2 = 5$
6	$5 + 3 = 8$
7	$8 + 5 = 13$
8	$13 + 8 = 21$
...	...
n	$F_{n-1} + F_{n-2}$

Fonte: Autoral.

Após a construção da sequência, torna-se possível encontrar diversas aplicações em outros recursos naturais. Por exemplo, nos elementos da flora do planeta, ao se procurar modelos e padrões para classificar plantas, flores, folhas e galhos. Diante da abordagem do tema feita por [8], o primeiro caso que destacamos é o processo de ramificação da uma planta cujo nome científico é *Achillea Ptarmica*, uma vez que seus galhos se bifurcam a cada dois meses. Com isto, a quantidade de galhos desta planta a cada mês é expressa por um número de Fibonacci, como é ilustrada na Figura 2. Na parte de baixo da planta é possível ver o tronco principal, que corresponde ao primeiro e segundo estágio com apenas um galho em cada um. No terceiro estágio ocorreu a primeira ramificação dando um total de dois galhos. Quando ela se ramifica mais uma vez, haverá três galhos e assim por diante. Desse modo, a cada estágio do crescimento da planta o número de galhos obedece à sequência de Fibonacci, de forma que sempre que os galhos se ramificam, são gerados novos galhos, em uma quantidade representada por um dos termos da sequência de Fibonacci.

Um outro fato curioso na natureza é que a quantidade de pétalas de inúmeras espécies de flores é um número de Fibonacci. A Figura 3 ilustra alguns dos exemplos

Figura 2: Ramificação da planta *Achillea Ptarmica*



Fonte: [8].

coletados na Tabela 2. Os lírios possuem três pétalas, embora pareçam seis, há apenas três pétalas. Os botões-de-ouro, cinco pétalas e as tasneiras, treze pétalas. Embora não seja um padrão para todas as espécies de flores existentes, a tentativa de encontrar uma prova matemática que comprove esta relação da natureza e os números de Fibonacci é um tema de interesse de vários matemáticos nos últimos anos, como podemos ver em [9].

Figura 3: Exemplos de flores cuja quantidade de pétalas é um número da sequência de Fibonacci

Fonte: [8].

No corpo humano também se encontra a sequência. Na mão humana, pode-se encontrar os termos da sequência de Fibonacci medindo a distância da ponta do dedo médio até as articulações, de modo que da ponta do dedo até a primeira articulação, é possível ver o terceiro termo da sequência, 2. Quando mede-se a distância entre a primeira articulação até a segunda, obtém-se o quarto termo da sequência, 3, e assim por diante até o punho, como mostra a Figura 4.

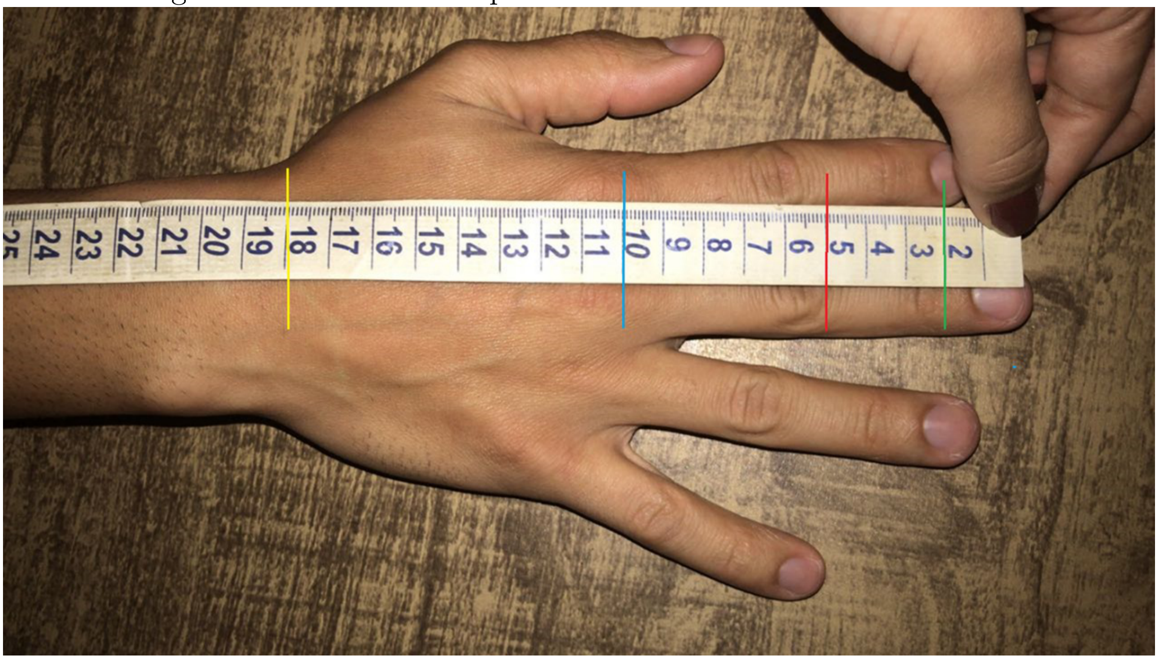
Além de todas essas relações com a natureza essa famosa sequência também compartilha uma relação com a proporção áurea. Como descrito em [1], quando são utilizados os números da sequência de Fibonacci para construir um retângulo, de modo que os termos da sequência correspondem ao valor dos lados, forma-se o

Tabela 2: Flores que possuem a quantidade de pétalas sendo um número da sequência de Fibonacci.

Quantidade de pétalas	Espécie de flores
3	Lírios, Flores-de-Íris
5	Botões-de-ouro, Rosas Selvagens
8	Delfínios
13	Algumas espécies de margaridas, Tasneiras, Cinerarias
21	Flores de Chicória, Ásteres
34	Flores de Pé de Banana-da-terra, Piretro
55, 89	Margaridas de Michaelmas

Fonte: Autoral.

Figura 4: Números da sequência de Fibonacci na mão humana



Fonte: Autoral.

chamado retângulo de ouro. A razão entre os lados desse retângulo se aproxima cada vez mais (quanto maior for o termo da sequência) do número de ouro ou proporção áurea.

Diante de tantas possibilidades de encontrar a sequência de Fibonacci em nosso cotidiano, neste trabalho serão apresentadas algumas atividades com o intuito de fazer com que os alunos aprendam mais sobre como a sequência de Fibonacci pode ser utilizada; e também mostrar as várias aplicações da Matemática para assim fomentar o interesse pela disciplina.

3 Atividades usando a sequência de Fibonacci

Nesta seção serão apresentadas seis propostas de atividades para a introdução da sequência de Fibonacci em sala de aula, o material que será usado e um pequeno roteiro em cada uma delas que poderá ser usado pelo professor. Estas são:

- **Atividade 1:** Quebra-cabeça com E.V.A.

- **Atividade 2:** Vendo as horas

- **Atividade 3:** Construindo uma parede de tijolos

- **Atividade 4:** Completando os tabuleiros

- **Atividade 5:** Construindo a sequência com o GeoGebra

- **Atividade 6:** Encontrando o número de ouro

Cada atividade é sugerida para um determinado ano escolar. As duas primeiras são propostas para o sexto ano, uma vez que podem ser confeccionadas com materiais simples e trabalham o conceito de forma intuitiva. Estas dinâmicas envolvem um quebra-cabeças e um relógio, respectivamente.

Logo em seguida, a terceira proposta é voltada para uma construção com tijolos figurativos, podendo assim mostrar ao alunado que essa sequência pode aparecer no dia a dia. Por precisar de conteúdos como área, volume e raciocínio lógico, a atividade seria ideal para se trabalhar no sétimo ano. E com uma caracterização semelhante, a quarta dinâmica é apresentada também para o sétimo ano utilizando peças retangulares para serem encaixadas em um determinado tabuleiro.

Para finalizar, as duas últimas práticas são voltadas para o oitavo ano com a utilização de recursos tecnológicos. Sendo a **Atividade 5**, uma nova roupagem do quebra-cabeças da **Atividade 1**, para ser trabalhada num software educacional como o GeoGebra com conceito geométricos. Enquanto a sexta, propõe o uso de uma planilha eletrônica para chegar na razão áurea.

3.1 Atividade 1: Quebra-cabeça com E.V.A.

O público-alvo desta atividade é o 6º ano, tendo como objetivo principal construir a sequência de Fibonacci através da fórmula de recorrência e trabalhar conceitos como perímetro, propriedades das operações, unidades de medida de comprimento e superfícies. Esta atividade foi desenvolvida pelos autores após o estudo sobre os retângulos áureos e uma versão dela pode ser encontrada em [4]. Ela consiste de um quebra-cabeça (Figura 5) feito de E.V.A. no qual, as peças são quadrados com diferentes tamanhos seguindo a sequência de Fibonacci. O quebra-cabeça será formado 2 peças com lados medindo 1 cm, 1 peça com lado de 2 cm, 1 peça com lado de 3 cm, 1 peça com lado de 5 cm e assim sucessivamente. Vale resaltar que fica a cargo do leitor decidir quantas peças terá o quebra-cabeça, mas os autores sugerem que tenha 9 peças no máximo, para uma atividade no 6º ano.

Figura 5: Peças do quebra-cabeça de E.V.A.

Fonte: Autoral.

O intuito do jogo é encaixar as peças de forma que construa retângulos cujas medidas dos lados distintos são os números consecutivos da sequência de Fibonacci. Para iniciar a atividade, sugere-se que os alunos trabalhem em duplas ou individualmente. Posteriormente, é entregue a cada grupo um kit do jogo com as peças do quebra-cabeça. Em seguida, os alunos são convidados a encaixar os dois quadrados unitários, as duas peças que são necessárias para que o jogo comece, como mostra a Figura 6. Observamos que as medidas dos lados das peças quadradas fornecidas pelo professor aos alunos, já correspondem aos números da sequência de Fibonacci; porém, os alunos do 6º ano desconhecem este fato, uma vez que não adquiriram ainda a noção de sequência numérica (ou uma vez que o objetivo do jogo é, precisamente, de introduzir de uma maneira concreta e construtiva a noção de sequência numérica).

As peças seguintes serão colocadas conforme as indagações do docente, e assim os

Figura 6: Quadrados unitários

Fonte: Autoral.

alunos serão conduzidos a construir a sequência. Algumas sugestões de perguntas:

1. Entre as peças que não foram utilizadas, qual é o quadrado que possue o lado igual ao lado maior do retângulo que foi formado?

2. Qual é a medida dos lados da peça formada no quebra-cabeça nesta etapa?

3. Qual é a área da nova peça formada nesta etapa?

4. Qual é o perímetro dessa nova peça formada nesta etapa?

Repetindo essas perguntas o estudante é levado a montar cada etapa do jogo e no final terá formado o quebra-cabeça completo, mostrado na Figura 7, alcançando o objetivo proposto.

Figura 7: Quebra cabeça montado

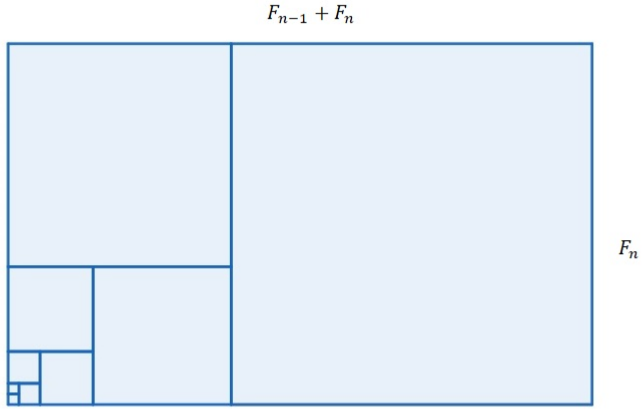
Fonte: Autoral.

A quantidade de etapas do jogo depende da quantidade de peças que o kit contém. Se o professor regente tiver confeccionado kits com n peças, os alunos passarão por *n - 1* etapas[2]. Para encontrar o perímetro e a área do quebra-cabeça em cada etapa, tem-se que a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 2 \cdot F_n + 2 \cdot (F_{n-1} + F_n), && (3.2) \\ \text{Área} &= F_n \cdot (F_{n-1} + F_n), && (3.3) \end{aligned}$$

[2]Sugere-se que o professor confeccione kits com 9 peças, porém isso fica a seu cargo.

Figura 8: Lados do quebra-cabeça na etapa n.



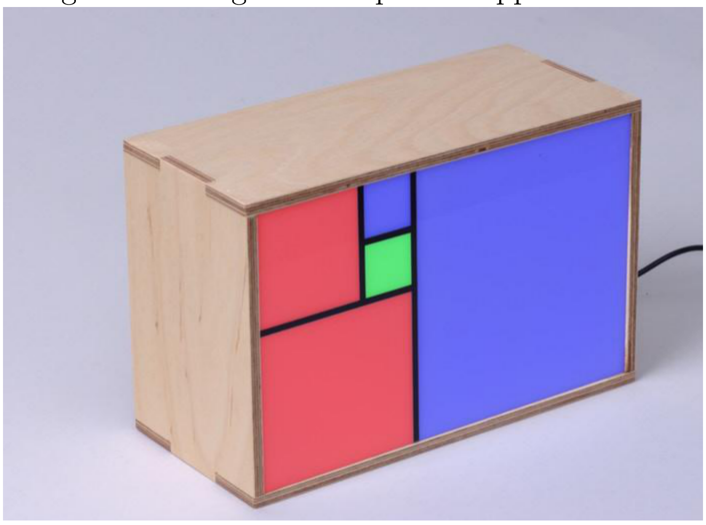
Fonte: Autoral.

para $n \geq 2$, onde os números F_n e F_{n-1} da sequência de Fibonacci são as medidas dos lados da última e da penúltima peças do kit, respectivamente, conforme é visto na Figura 8.

3.2 Atividade 2: Vendo as horas

Em nossa busca por atividades diferenciadas encontramos um site de um engenheiro de computação, chamado Philippe Chrétien, que mora em Montreal (Canadá) e em 2015 divulgou o relógio que inspira esta atividade (mostrado na Figura 9), indicada para o 6º ano. Ele mostra as horas utilizando o retângulo formado por quadrados encaixados uns nos outros que obedecem os números da sequência de Fibonacci [7].

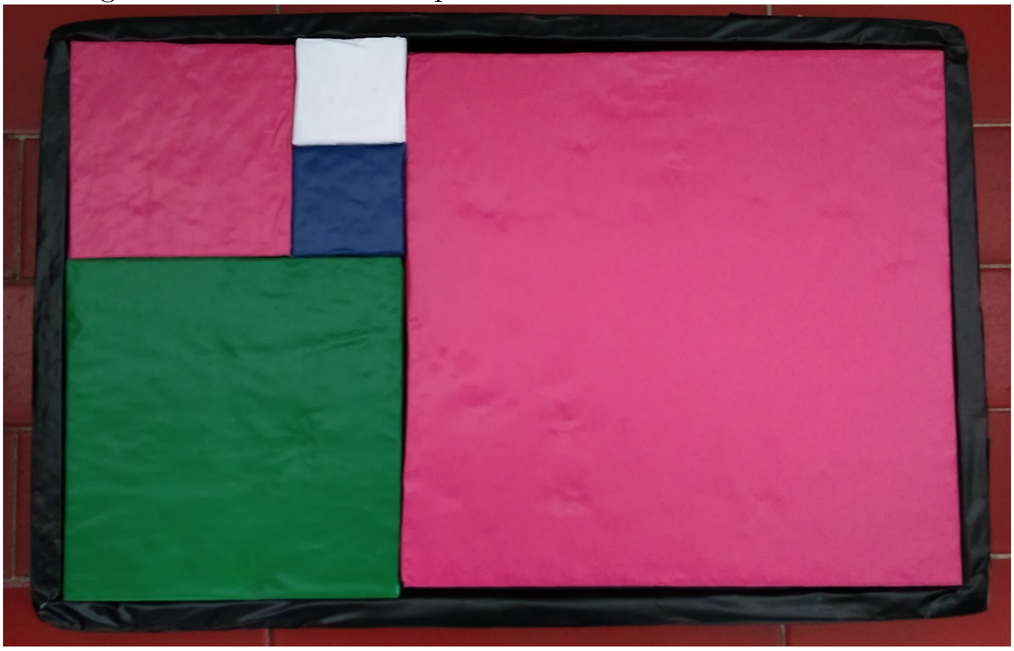
Figura 9: Relógio criado por Philippe Chrétien



Fonte: [7].

A versão original deste relógio funciona eletronicamente, porém para abordá-lo com os estudantes, foi feita uma adaptação que utiliza materiais mais economicamente acessíveis (isopor, palito de dente e papel adesivo contact). Nesta versão os horários são alterados manualmente para que o relógio possa ser utilizado como um jogo, como ilustrado na Figura 10.

Figura 10: Números da sequência de Fibonacci na mão humana



Fonte: Autoral.

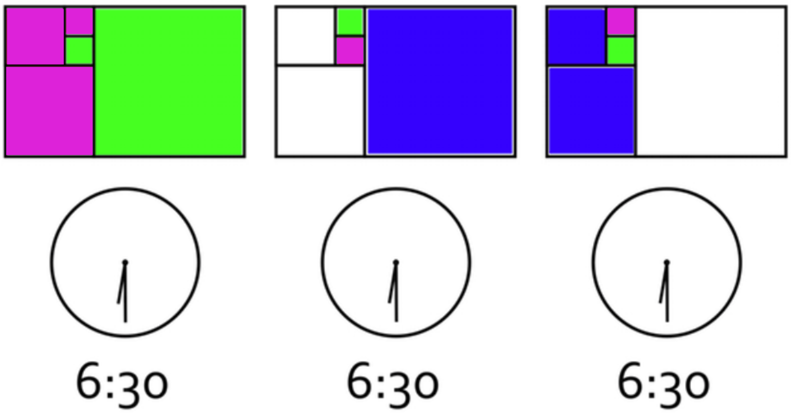
O objetivo deste jogo é utilizar o relógio para explorar a sequência de uma forma dinâmica, trabalhando-se as operações fundamentais, o cálculo mental e a relação interpessoal dos alunos. Para execução do jogo, sugere-se que os alunos se dividam em equipes, onde cada uma tem o objetivo de descobrir o horário exibido pelo professor.

Nessa atividade, para determinar as horas, utiliza-se a medida dos lados de quadrados que são os primeiros termos da sequência de Fibonacci, que são 1, 1, 2, 3 e 5. Para o relógio feito, as cores escolhidas foram branca, azul, verde e rosa e para melhorar a visualização e manuseio dos quadrados, estes foram construídos utilizando uma escala de ampliação de 5:1, em que cada 5cm corresponde a uma unidade de medida.

O relógio funciona da seguinte forma:

- Para saber a hora, soma-se o valor correspondente do lado dos quadrados rosas e azuis.
- Já para saber os minutos, multiplica-se a soma dos valores do lado dos quadrados azuis e verdes por cinco. E os quadrados brancos não são considerados.

Figura 11: Possíveis configurações de hora



Fonte: [7]

Ou seja:

HORAS: Valores dos quadrados rosas + Valores dos quadrados azuis
MINUTOS: 5 x (Valores dos quadrados azuis + Valores dos quadrados verdes)

A partir do exemplo, visto na Figura 11, pode-se perceber que cada hora possui mais de uma maneira de ser exibida. Também é possível representar todas as horas do dia com esse relógio no modelo de 12 horas, porém os minutos só podem ser representados por múltiplos de 5. De acordo com o elaborador do relógio, para representar 6:30 existem 16 maneiras distintas [7], podendo ser mais um desafio para o alunado encontrar outras formas de obter um determinado horário. Outro fator interessante que pode ser trabalhado com os alunos, é que não existe apenas uma resposta correta já introduzindo conceitos que serão vistos em análise combinatória de uma forma lúdica.

3.3 Atividade 3: Construindo uma parede de tijolos

Esta atividade, proposta por Knuth (1989), tem como objetivo trabalhar com os conceitos de área e volume de paralelepípedos [6]. Ela sugere a construção de uma parede com tijolos no formato de um prisma quadrangular cuja medida da altura corresponde ao dobro da medida da largura, como é visto na Figura 12:

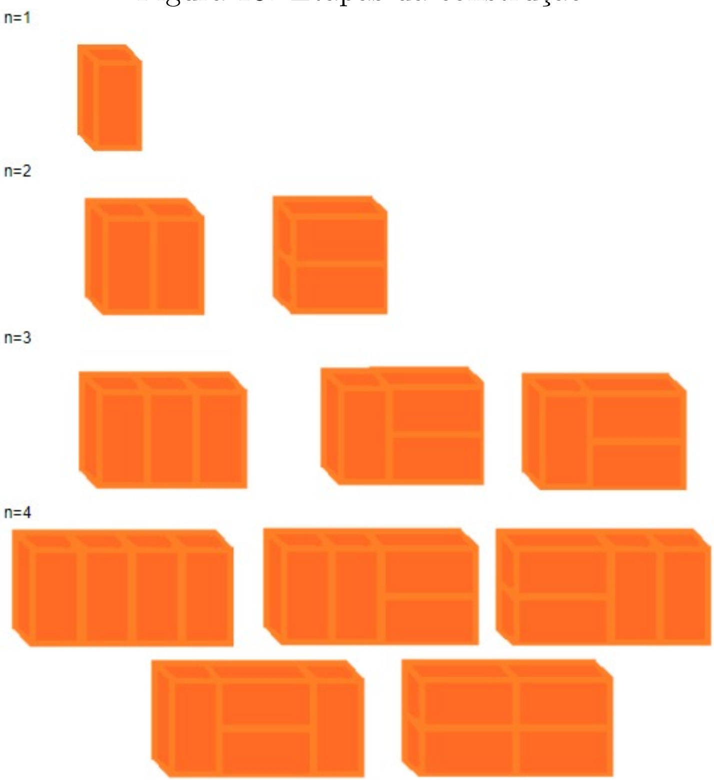
A dinâmica desta atividade consiste em aglutinar tijolos para formar um muro. Inicialmente, fixamos o primeiro tijolo, de modo que o menor lado dele (compri-

Figura 12: Tijolo inicial

Fonte: Autoral.

mento) fique sobre uma superfície e que o maior lado dele (altura) fique perpendicular a esta superfície. Para fazer o agrupamento com os tijolos seguintes, apenas é permitido alterar o comprimento do muro e nunca a altura do mesmo, isto é, a altura do muro será sempre igual à altura do tijolo, indepedentemente do número de tijolos que esse muro possuir. É permitido também mudar a direção (horizontal ou vertical) de cada um dos tijolos com o passar das etapas. Em cada uma das n etapas da construção, serão utilizados exatamente n tijolos. Contudo, conforme o número de tijolos aumenta com o passar das etapas, aumenta-se o número de combinações de dispô-los para formar o muro.

Figura 13: Etapas da construção



Fonte: Autoral.

Por exemplo, de acordo com a Figura 13, na etapa 1 há apenas uma possibilidade de dispor o tijolo. Na etapa 2, há duas possibilidades de agrupar os tijolos. Na etapa 3, há três formas de agrupá-los. Na etapa 4, há cinco maneiras. Se houvesse uma quinta etapa, haveria oito tijolos. Analisando estas construções, consegue-se perceber um padrão que corresponde aos números da sequência de Fibonacci, pois começa no segundo termo da sequência (observe a Figura 13).

Com algumas perguntas elaboradas, o professor consegue levar o aluno a perceber isto, sendo uma forma lúdica e construtiva de trabalhar a Matemática. Exemplos de perguntas que podem ser feitas:

1. Qual o volume de cada tijolo?
2. Qual a área da superfície do muro formada pela altura e pelo comprimento em cada etapa?
3. A área da superfície do muro formada pela altura e pelo comprimento muda conforme a disposição dos tijolos?

3.4 Atividade 4: Completando os tabuleiros

Nesta atividade, baseada em [2, 12], trabalha-se os conceitos de comparação de figuras geométricas planas, área, perímetro e raciocínio lógico. Ela tem o objetivo de completar diversos tabuleiros usando dois tipos de peças, uma quadrada com dimensões 1×1 e a outra retangular, 1×2, denominadas de Peça1 e Peça2 respectivamente, conforme a Figura 14.

Figura 14: Peças iniciais

Fonte: Autoral.

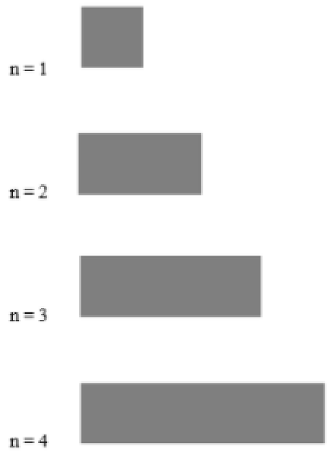
Os tabuleiros têm as medidas $1 \times n$, sendo n um número natural desejado:

Assim constrói-se tabuleiros de diversos tamanhos, Figura 15, o que traz para a atividade um desafio maior. A princípio, os materiais pensados para a confecção do tabuleiro foram MDF [3] cru e cola universal, enquanto as peças podem ser feitas com folhas de E.V.A. Sendo assim, devem ser utilizados em sala para responder à pergunta

"De quantas maneiras diferentes é possível completar cada tabuleiro usando estas peças?"

[3]Medium Density Fiberboard.

Figura 15: Passos seguintes da construção



Fonte: Autoral.

Com isto, o jogo inicia a partir do tabuleiro 1×1, onde os alunos conseguem chegar à conclusão que só tem uma maneira de completá-lo. Passando para o tabuleiro 1×2, os alunos tornam a visualizar a quantidade de maneiras de completá-lo de forma simples por tentativas. Semelhantemente, os alunos chegam a resposta para os tabuleiros 1×3, 1×4 e 1×5. A partir de então, deve-se desafiar os alunos a achar uma fórmula que responda essa pergunta, sem que sejam feitas todas as tentativas. Neste momento, é desejado que os alunos percebam que o valor de opções para preencher um tabuleiro de tamanho $1 \times n$ é a soma do número de opções que preencheram os tabuleiros $1 \times (n-1)$ e $1 \times (n-2)$, para $n \geq 3$. Abaixo, é apresentado todas as opções para preencher o tabuleiro nos casos que $n = 1, 2, 3$ e 4 e percebe-se que a quantidade total em todos os casos são números de Fibonacci.

- Para $n = 1$, há apenas uma forma de completar o tabuleiro:
  - 1 Peça1
- Para $n = 2$, há duas opções:
  - 2 Peça1
  - 1 Peça2
- Para $n = 3$, existem três opções:
  - 3 Peça1
  - 1 Peça1 + 1 Peça2
  - 1 Peça2 + 1 Peça1

– Para $n = 4$, consegue-se cinco maneiras:

  * 4 Peça1
  * 2 Peça1 + 1 Peça2
  * 1 Peça2 + 2 Peça1
  * 1 Peça1 + 1 Peça2 + 1 Peça1
  * 2 Peça2

Para reforçar e analisar o conceito observado, após os alunos perceberem esta recorrência e a relação com a sequência de Fibonacci, devem ser feitas indagações como: *"Quantas maneiras de completar o tabuleiro* 1×10 *existiria? Vocês conseguem dizer sem ter que montar todas as opções?"*

3.5 Atividade 5: Construindo a sequência com o GeoGebra

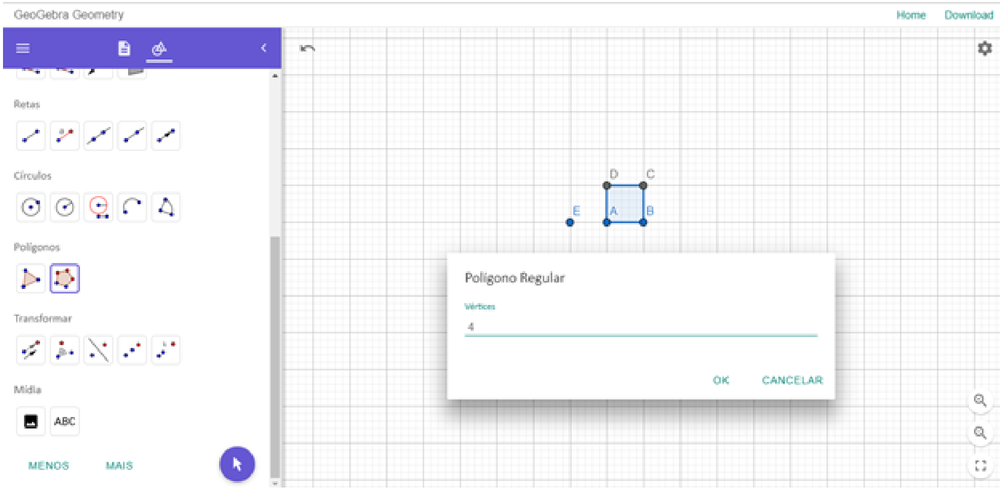
Esta atividade possui um objetivo semelhante ao da **Atividade 1**, com uma outra abordagem: construir a sequência de Fibonacci geometricamente utilizando o software GeoGebra, a partir de dois quadrados unitários colocados um ao lado do outro, formando um retângulo[4]. Para que o aluno consiga fazer esta atividade, paralelamente serão trabalhados os conceitos de segmento de reta e polígonos regulares para a construção dos quadrados no GeoGebra. Aqui também pode-se trabalhar os conceitos de área e perímetro. Para isso, deve-se construir os dois quadrados utilizando a função polígonos regulares e digitando 4 vértices (veja Figura 16).

Para os próximos passos, o professor deve fazer algumas perguntas para construir os quadrados seguintes, Figura 17, como:

1. Qual é o quadrado que deve ser colocado em um dos lados do retângulo?
2. Qual é a medida do lado dessa peça?
3. Qual é a área da nova peça?
4. Qual é o perímetro dessa nova peça?

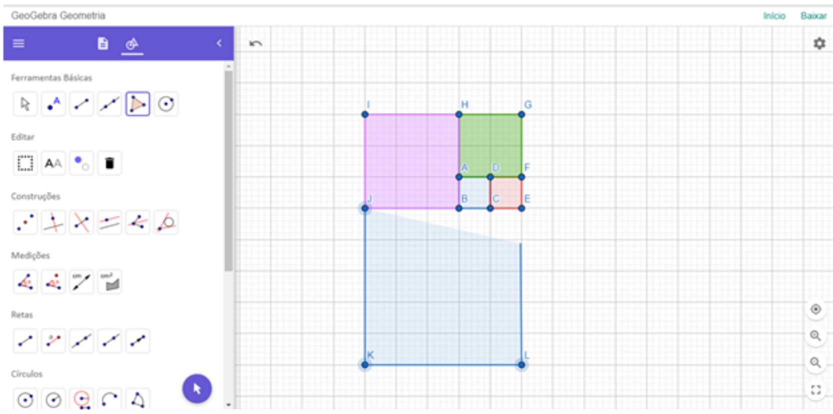
[4]Para saber como construir essa atividade no GeoGebra, veja o Apêndice I

Figura 16: Primeiro passo da construção



Fonte: Autoral.

Figura 17: Quebra-cabeça em construção



Fonte: Autoral.

3.6 Atividade 6: Encontrando o número de ouro

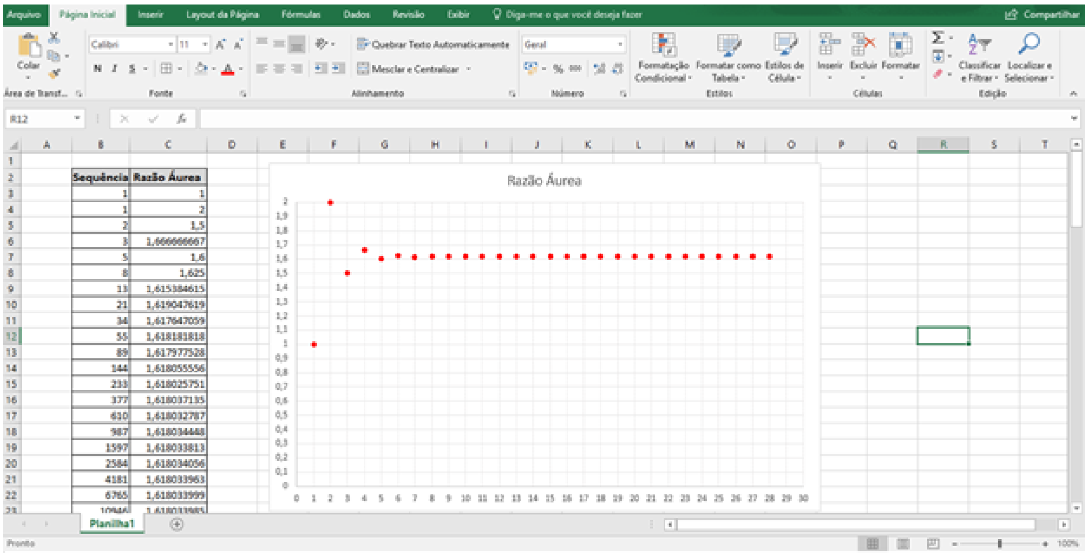
Na **Atividade 6** os alunos começam a se familiarizar com a informática, além de aprenderem um pouco mais sobre algumas propriedades da sequência de Fibonacci e trabalhar os conceitos de razão e proporção[5]. Esta atividade foi proposta por Oliveira em [10] e pode ser proveitosa para ensinar aos alunos como trabalhar com uma planilha eletrônica e como fazer um gráfico nela. Além de conseguir explicitamente ver a convergência da razão entre os números da sequência para o número de ouro.

Durante a aula, deve-se explicar os elementos básicos da planilha eletrônica, colocando-se os dois pimeiros termos e a fórmula da sequência de Fibonacci na planilha para que os alunos consigam construir os 50 primeiros números. Em seguida,

[5]Para saber como construir essa atividade na planilha eletrônica, veja o Apêndice II

faz-se a divisão de um termo qualquer pelo seu antecessor e mostrando o gráfico para que os estudantes intuitivamente notem que a sequência converge para o número de ouro (1,61), conforme é visto na Figura 18.

Figura 18: Construção da tabela e o gráfico numa planilha eletrônica.



Fonte: Autoral.

4 Conclusão

Este trabalho traz um compilado de ideias de aplicações da sequência de Fibonacci para a Educação Básica feitas, na maioria delas, por materiais acessíveis, com o intuito de apresentar ao professor formas de abordagens que motivem os alunos ao estudo da Matemática. As atividades selecionadas foram encontradas na literatura relacionada ao tema e foram adaptadas com o intuito de utilizarem materiais mais acessíveis para um grupo maior de estudantes.

É importante frisar que o docente necessita avaliar as condições das quais seus alunos se enquadram pedagógica e socialmente. Além disso, essas atividades podem ser executadas para revisar conteúdos, para motivar a aprendizagem de novos e para ilustrar a presença da Matemática no cotidiano. Espera-se que os professores ao lerem esse texto se sintam inspirados a aplicar novas práticas em suas salas de aula, ao perceberem que de forma simples podem mudar a visão do aluno sobre a matemática e, com isto, busquem cada vez mais novos estímulos.

Referências

[1] ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, RPM 6, p. 9, Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/6/2.htm> Acesso em: 16 de maio de 2020.

[2] BRIGHAM, R. C.; CARON, R. M., CHINN, P. Z., GRIMALDI, R. P. A Tiling scheme for the Fibonacci numbers. **Journal of Recreational Mathematics**, v.28, n. 1, 1996-1997.

[3] CATARDO, F. A.; PRADO, A. C. A.; SOUZA, N. A. M.; CRUZ, A. R. Reprodução em Coelhos – Revisão Bibliográfica. **Revista Científica de Medicina Veterinária**, v. Ano X, n. 30, 2018.

[4] DASSIE, B. A.. Quebra-cabeça de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, RPM 64, Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/64/4.html> Acesso em: 16 de maio de 2020.

[5] GONÇALVES, R. I. B.; LIMA G. G.; FUNDO, A. C. A.; SILVA, V. B. da; FARIA, C. O.; MARTINO, L. S. da S. Nunca é Cedo para Aprender sobre a Sequência de Fibonacci. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v.6, n. 2, 2018.

[6] GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. **Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science**. 2nd, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1994.

[7] KICKSTARTER, **Fibonacci Clock - An open source clock for nerds with style**, 2018, Disponível em: <https://www.kickstarter.com/projects/basbrun/fibonacci-clock-an-open-source-clock-for-nerds-wit> Acesso em: 02 de dezembro de 2018.

[8] KNOTT, D. **Fibonacci Numbers and Nature**, Disponível em: <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted−sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html> Acesso em: 23 de agosto de 2018.

[9] MINAROVA, N. The Fibonacci Sequence: Nature's Little Secret. **CRIS - Bulletin of the Centre for Research and Interdisciplinary Study**, v. 2014, n. 1, 2014. DOI: 10.2478/cris-2014-0001

[10] OLIVEIRA, F. A. de; ARAÚJO CALDAS, Mayara D. de **Sequência de Fibonacci**, Campinas: UNICAMP, 2013. 11 f. Monografia, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2013.

[11] RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**, Ilhéus, Bahia, 2013, 113 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013.

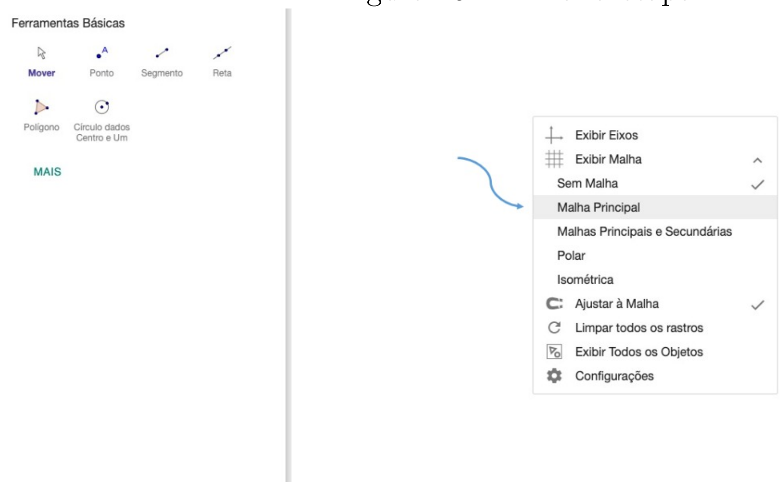
[12] SU, F. E. and et al. **Math Fun Facts**: Domino and Square Tilings, Disponível em: <https://math.hmc.edu/funfacts/domino-and-square-tilings/> Acesso em: 17 de dezembro de 2018.

Apêndice A - O uso do GeoGebra

O GeoGebra é um software matemático interativo livre, também disponível na forma de plataforma online, e dentre suas funções é possível construir formas geométricas. Ele pode ser encontrado no site: https://www.geogebra.org/geometry Na **Atividade 5**, usou-se esse software para construir os quadrados e retângulos da atividade, referentes à Sequência de Fibonacci. Para essa construção, devemos seguir as seguintes etapas:

1. Clique com o botão direito do mouse para ativar a malha quadriculada. Siga a ordem:
   Exibir Malha $\longrightarrow$ *Malha Principal*, como na Figura 19.

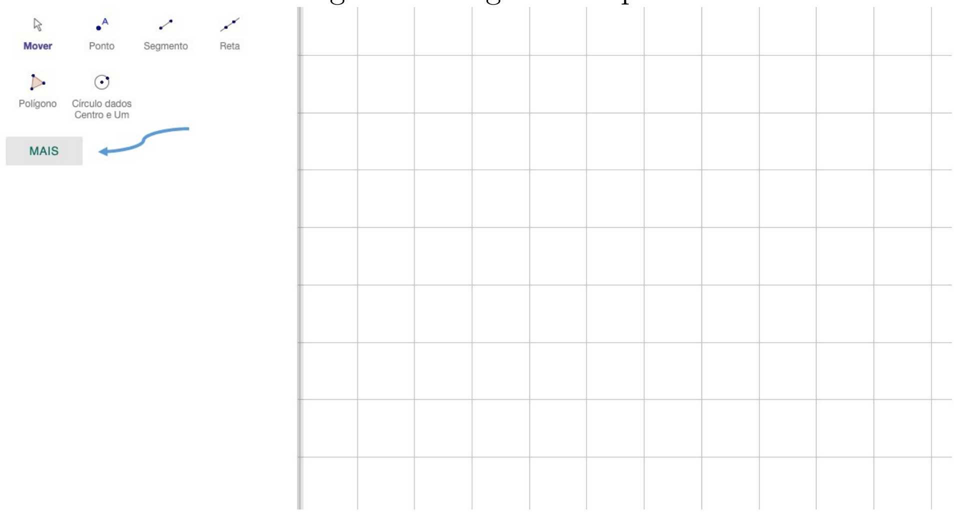
Figura 19: Primeira etapa



Fonte: Autoral.

2. No menu localizado à esquerda, clique na palavra **MAIS** para que outras ferramentas sejam exibidas, como na Figura 20.

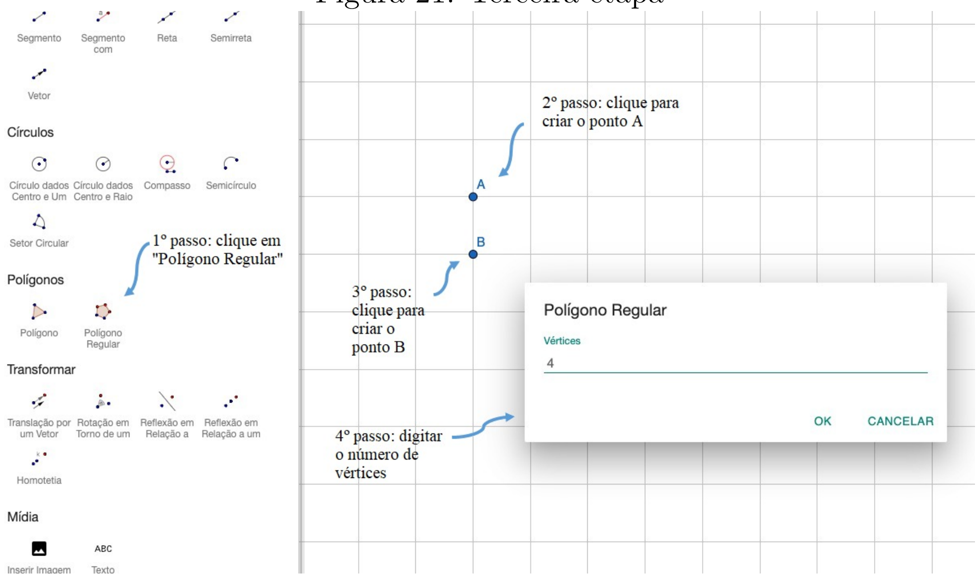
Figura 20: Segunda etapa



Fonte: Autoral.

3. Clique em *Polígono*. Em seguida, clique em dois pontos da malha para serem vértices do polígono. Posteriormente, uma caixa será exibida para saber quantos vértices o polígono desejado deve ter. Como nesta atividade, sempre serão construídos quadrados, digite 4, como na Figura 21. Lembre-se que o primeiro quadrado deve ter 1 unidade de comprimento, logo os dois pontos escolhidos inicialmente devem ter essa distância.

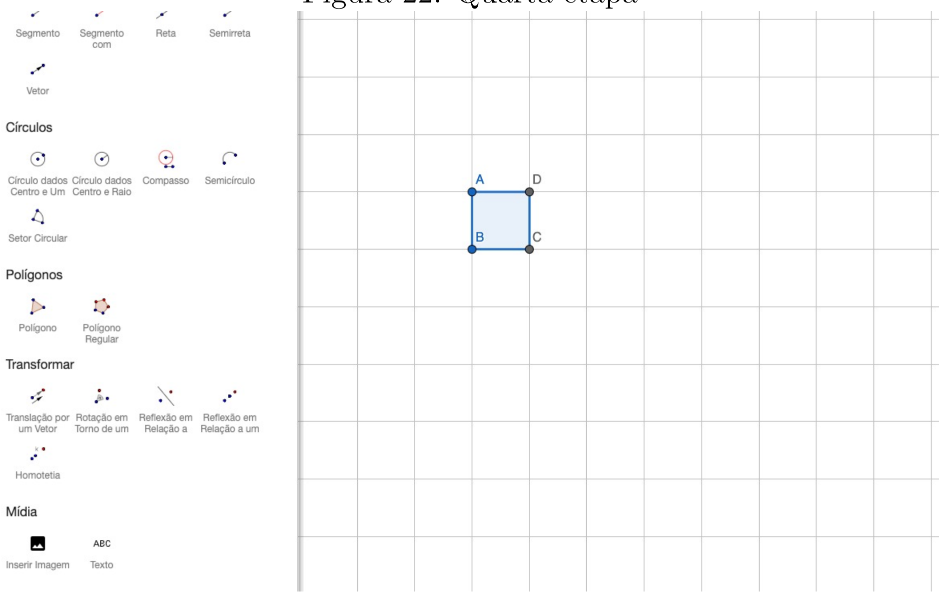
Figura 21: Terceira etapa



Fonte: Autoral.

4. Repita a etapa 3, como na Figura 22, alterando a distância entre os dois pontos iniciais do quadrado de acordo com a sequência de Fibonacci. Ou seja, para o segundo quadrado, também use 1 unidade de distância; para o terceiro, use 2 unidades; para o quarto, 3 unidades de distância; para o quinto, 5 unidades; e assim, sucessivamente, de acordo com a sequência.

Figura 22: Quarta etapa



Fonte: Autoral.

Apêndice B - O uso de planilhas eletrônicas

As planilhas eletrônicas são ferramentas computacionais cuja principal função é construir tabelas e fazer análise de dados. Existem diversos programas para construi-las. Embora, haja diferenças entre eles, em geral, todos possuem letras para indicar as colunas da tabela e números para indicar as linhas. As interseções entre linhas e colunas são chamadas de *células*, onde inserimos as informações desejadas. Também há campos para inserir fórmulas e fazer cálculos. Para a **Atividade 6**, abra uma planilha eletrônica e siga os passos a seguir:

1. Digite o número 1 na célula A1.

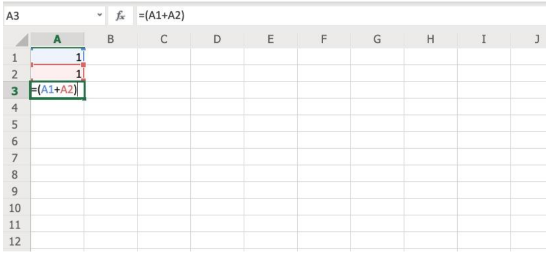
2. Digite novamente o número 1 na célula A2, para inserir o segundo número da sequência de Fibonacci.

3. Para que os dois termos da sequência sejam somados, digite, na célula A3, a fórmula

$$= (A1 + A2)$$

Ao executar os passos 1, 2 e 3, a tela estará da forma exibida na Figura 23.

Figura 23: Primeira etapa



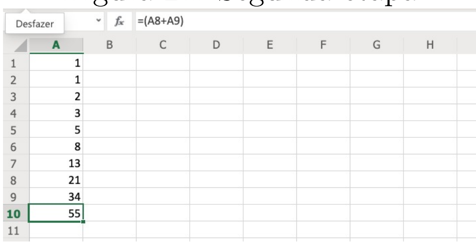
A3 =(A1+A2)

	A
1	1
2	1
3	=(A1+A2)

Fonte: Autoral.

4. Selecione a célula A3, posicione o cursor do *mouse* no canto inferior direito da célula, e, mantendo o botão esquerdo do *mouse* pressionado, arraste o cursor para baixo. Ao fazer isso, a fórmula será copiada para a células seguintes e os outros termos da sequência de Fibonacci serão exibidos em cada uma delas, como mostra a Figura 24.

Figura 24: Segunda etapa



Desfazer =(A8+A9)

	A
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

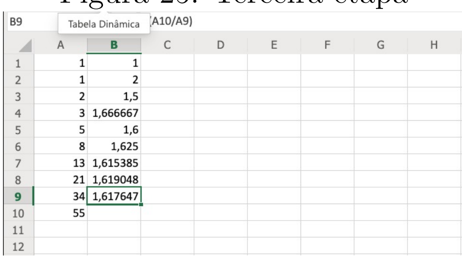
Fonte: Autoral.

5. Para a razão áurea poder ser trabalhada, insira na célula B1 a fórmula

$$= (A2/A1)$$

A cel será exibida conforme a Figura 25.

Figura 25: Terceira etapa



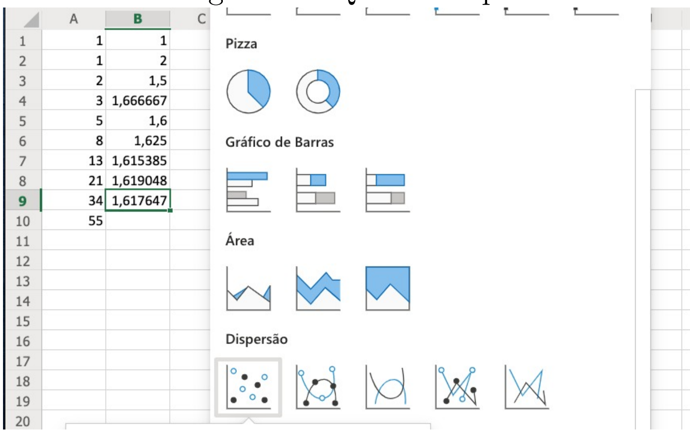
B9 Tabela Dinâmica (A10/A9)

	A	B
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
4	3	1,666667
5	5	1,6
6	8	1,625
7	13	1,615385
8	21	1,619048
9	34	1,617647
10	55	

Fonte: Autoral.

6. Selecione a célula B1, posicione o cursor do *mouse* no canto inferior direito da célula, e, mantendo o botão esquerdo do *mouse* pressionado, arraste o cursor para baixo. Ao fazer isso, a fórmula será copiada para a células seguintes e os quocientes serão exibidos nas células seguintes, como mostra a Figura 25.

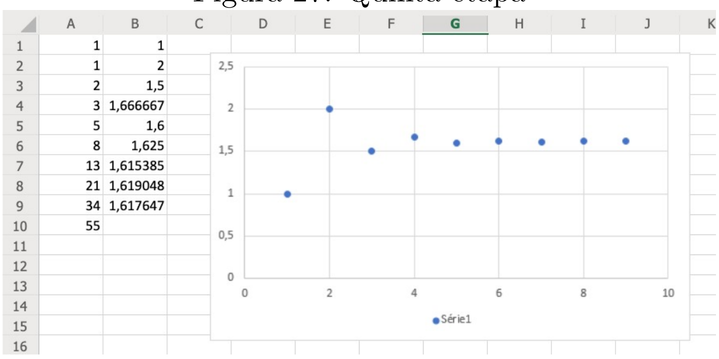
Figura 26: Quarta etapa



Fonte: Autoral.

7. Para construir o gráfico, deve-se selecionar a coluna B inteira. Em seguida, vá na aba *Inserir*, e crie um gráfico de dispersão, como na Figura 26.

Figura 27: Quinta etapa



Fonte: Autoral.

Ao analisar o gráfico, percebe-se que a partir de determinado número os pontos do gráfico se alinham e dão a ideia de que a sequência converge para um mesmo valor, que é chamado de **Número de Ouro** (ver Figura 27).