Investigações em geometria plana através de problemas*

D.P. SOUSA†, R.C. COSTA, P.N. SILVA‡

Resumo

Objetivando fornecer um melhor entendimento na construção do raciocínio sistêmico de resolução de problemas em geometria, compartilhamos algumas experiências oriundas do esforço empregado na busca de soluções para problemas desafiadores, bem como um melhor esclarecimento na forma de escolher as palavras e o encadeamento lógico, a fim de expor uma argumentação suficiente para o entendimento do exposto. O objetivo central deste trabalho é discutir e explicitar o que nos leva a determinados movimentos em busca de soluções de problemas em geometria, diversas vezes vistas como artificiais e "mágicas".

1 Introdução

Por um lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) ressaltam a importância de os alunos desenvolverem o pensamento geométrico. Por outro, Clemente e Bedim (2015) nos mostram que diversos autores apontam para a deficiência na formação do professor de Matemática para o ensino de geometria e para a dificuldade em desenvolver nos alunos o pensamento geométrico. De uma maneira geral, o ensino de geometria desenvolve mais habilidades mecânicas do que reflexivas. Entendemos que um mecanismo efetivo para interferir neste cenário seja a formação continuada de professores. Buscamos entrelaçar experiências adquiridas no decorrer da formação, a fim de corroborar com a formação continuada, elucidando algumas situações-problema que necessitam de cautela na exposição, visando demonstrar todo um fundamento no pensamento que se segue. Esta preocupação decorre do fato de que muitas soluções apresentadas para problemas mais elaborados, ou até mesmo determinadas demonstrações, parecem surgir sem fundamento algum, sendo apenas impostas. Entendemos que estes "procedimentos mágicos" constituem um dos obstáculos do aprendizado de geometria durante a formação do professor de matemática. Nossa proposta é desmistificar estes procedimentos e através de resoluções comentadas de problemas propiciar que o professor se aproprie de ferramentas que ampliem sua capacidade de resolução de problemas e desenvolvam seu pensamento geométrico. Na próxima seção, ilustramos nossa abordagem através da apresentação de dois problemas propostos em Neto (2013).

* *Palavras chave:* Geometria, pensamento geométrico, PCN
† Colégio e Curso PEC, diopecmesquita@gmail.com
‡ UERJ, raphaelconstant@ime.uerj.br, nunes@ime.uerj.br

DOI: https://doi.org/10.12957/cadmat.2019.46993

2 Problemas Modelos

Problema 1: O triângulo ABC, isósceles de base BC, é tal que $\angle BAC = 20°$. Marcamos pontos $D \in AC$ e $E \in AB$ tais que $\angle DBC = 60°$ e $\angle ECB = 50°$. Calcule $\angle BDE$.

Resolução comentada: queremos calcular o ângulo θ na Figura 1. Vamos explorar triângulos isósceles presentes ou construídos em ABC. Dado que ABC é isósceles de base BC, então $\angle C = \angle B = 80°$. Consequentemente: (i) em BCE, temos $CEB = 50°$ e ele é isósceles de base CE e $BE = BC$; (ii) em BCD, temos $\angle BDC = 40°$; e $DBE = 20°$.

Tracemos a ceviana BF de modo que o triângulo BFD seja isósceles de base BD (basta tomar $F \in AC$, interseção da perpendicular a BD que passa por seu ponto médio). Assim, $\angle FBD = 40°$ e $\angle CBF = 20°$. Além disso, o triângulo CFB é isósceles de base CF, portanto $BF = BC$. Podemos observar que no triângulo BFE, $BE = BF$, portanto é isósceles. Como $\angle FBE = 60°$, o triângulo BFE é equilátero, logo $BE = BF = FE$. Sabemos que o triângulo BFD é isósceles de base BD, portanto $BF = FD$. Sendo assim, o triângulo DFE é isósceles de base DE, pois $FE = FD$ e é possível calcular $\angle DEF = 40°$. Concluímos então que

$$40° + \theta + 40° + \theta + 40° = 180°.$$

Portanto, $\theta = 30°$.

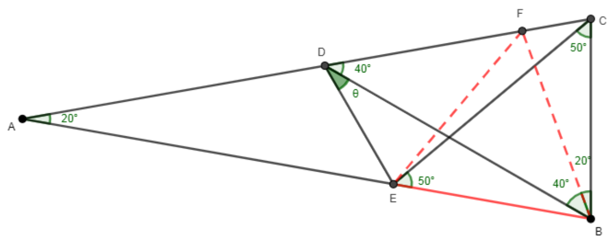

Figura 1: Construção do Problema 1

Problema 2: Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, prove que o ponto P do plano para o qual a soma $PA + PB + PC + PD$ é mínima é o ponto de concurso das diagonais de $ABCD$.

Resolução comentada: a estratégia aqui será explorar sistematicamente a desigualdade triangular e o fato de termos nela igualdade apenas quando há colinearidade. Seja P um ponto do plano (ver Figura 2). Analisando os pontos P, B e D, temos

$$PB + PD \geq BD, \tag{2.1}$$

e a igualdade ocorre somente quando P pertence ao segmento BD. Analisando os pontos P, A e C, temos

$$PA + PC \geq AC, \tag{2.2}$$

e a igualdade ocorre somente quando P pertence ao segmento AC. Assim, segue de (2.1) e (2.2) que

$$PA + PB + PC + PD \geq BD + AC,$$

e a igualdade ocorre somente quando ocorrem as igualdades em (2.1) e (2.2), ou seja, quando P é o ponto de interseção das diagonais.

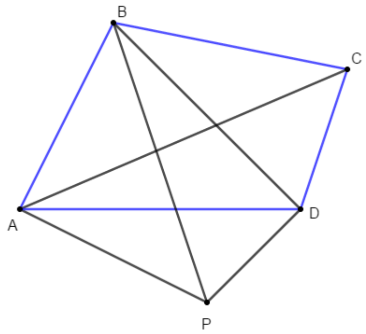

Figura 2: Referência para o Problema 2

3 Considerações finais

Alguns problemas exigem caminhos mais elaborados em suas resoluções, necessitando de uma abstração que ultrapasse apenas as aplicações básicas. Sendo assim, encontrar relações ou figuras notáveis na resolução de um problema constitui uma ferramenta poderosa para os casos mais complexos, pois pelo fato de serem notáveis fornecem uma gama de informações e resultados já conhecidos. Assim, explorar e justificar os caminhos que nos conduzem a uma sofisticação no pensamento torna-se um ponto fundamental em geometria plana. Em diversas situações vale desconfiar que determinado encaminhamento leva à solução de um problema e podemos tentar provar que o mesmo fornece os resultados esperados. Assim, aprimorar a abstração geométrica implica diretamente em boas justificativas dos passos a seguir e uma boa dose de intuição preconizados pelos resultados importantes já conhecidos. Buscar informações notáveis torna-se objeto de interesse quando um problema parece muito complexo, como por exemplo o aparecimento de paralelas, perpendiculares, triângulos equiláteros, isósceles e muitos outros.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPERJ, CAPES e CNPq a este trabalho.

Referências

[1] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[2] CLEMENTE, João Carlos; BEDIM, Acácia. Ensino e aprendizagem da Geometria: Um estudo a Partir dos periódicos em Educação Matemática. Juiz de Fora: UFJF, 2015.

[3] NETO, A. C. M. Geometria, Coleção PROFMAT, 2013.