O CONCEITO DE INFINITÉSIMOS ASSOCIADO AO SOFTWARE GEOGEBRA EM UMA AULA EXPERIMENTAL DE CÁLCULO

ROGERIO LUIZ QUINTINO DE OLIVEIRA JUNIOR*

Resumo

O presente artigo teve como motivação o desejo do autor de ensinar os conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1) de uma maneira mais tangível aos alunos, principalmente aqueles que estão vindo do Ensino Médio. Observando a dificuldade que os estudantes encontram em entender o significado de limites, elaborou-se uma aula experimental de CDI 1 baseada no conceito de infinitésimos e apoiada pelo software de Matemática GeoGebra. Foi abordada, primeiramente, a operação de derivação, depois a integral definida e, por último, o cálculo de alguns limites usando séries de potências e infinitésimos. Este trabalho foi fundamentado na dificuldade do processo de significação dos conceitos de CDI 1 encontrada no ensino atual.

1 Introdução

A aspiração do autor em trazer uma abordagem não-usual dos tópicos de CDI 1 se justifica pelo grande número de estudantes que abandonam esta disciplina e/ou repetem na mesma, sempre alegando a imensa dificuldade de entender o conteúdo e resolver os exercícios propostos. Na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, nos últimos períodos em que o professor-autor ministrou esta disciplina foi constatado um índice de reprovação de mais de 60% em todas as suas turmas, algumas delas chegando a passar de 80%. Este fato não é um caso particular da UERJ ou do professor em questão, pois em outras instituições de ensino superior brasileiras ocorre situação semelhante (WROBEL, ZEFERINO, CARNEIRO, 2013; BARUFI 1999 apud REZENDE 2003).

Alguns estudos centram o referido problema no aluno e em sua formação deficiente advinda do Ensino Fundamental e Médio (MENDES & GIOSTRI, 2008). Para tentar minimizar este quadro, em algumas instituições é ofertada uma disciplina de Pré-Cálculo onde são vistos conceitos básicos do ensino fundamental e médio necessários para a aprendizagem de CDI 1. Na UERJ, no entanto, ainda não se tem uma disciplina semelhante nos cursos trabalhados pelo autor. Mesmo assim, dentro da própria disciplina de CDI 1, passou-se a dar uma revisão sobre números e funções reais nas primeiras aulas antes de introduzir

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, infinitésimos, GeoGebra, ensino de matemática.

* Departamento de Análise – UERJ, roger.quintino@hotmail.com

DOI: https://doi.org/10.12957/cadmat.2018.37248

o programa de Cálculo. Mesmo com este esforço, não foi constatada uma mudança real na realidade de reprovação de CDI 1. Isto reforça o fato de se repensar a abordagem desta disciplina para torná-la mais acessível aos alunos.

O uso de softwares de Matemática para o ensino de Cálculo tem se mostrado bastante útil, sendo uma ferramenta atraente aos alunos. Na UERJ, o autor teve a oportunidade de trabalhar com o software Maple na disciplina de Laboratório de Cálculo para o curso de Matemática. Nesta disciplina, apesar de não terem sido cobrados muitos cálculos algébricos para resolução dos problemas e existir o recurso gráfico do programa, inclusive contendo gráficos animados, a maioria dos estudantes ainda não conseguiu entender o porquê de certas respostas. Foi observado que suas dúvidas recaíam sobre o significado das noções básicas do Cálculo, como o de derivada e integral definida.

Em sua tese de Doutorado, Rezende (2003) destaca a “prevalência da técnica sobre o significado” quando ensinamos, por exemplo, o cálculo de limites de funções, primeiro conteúdo a ser ensinado nos cursos de CDI 1. Perdemos muito tempo ensinando fatoração de polinômios, relações trigonométricas e outros cálculos algébricos do que apresentando o real significado de limite. E, para piorar, tudo que é feito depois disso se baseia em limites!

Originalmente, Newton e Leibniz desenvolveram o Cálculo Diferencial e Integral trabalhando com o conceito de infinitésimos. Apesar de existir um problema em sua concepção formal com “aparentes inconsistências e contradições” (DE CARVALHO & D'OTTAVIANO, 2006), parece mais natural trabalhar os conceitos de Cálculo dessa forma:

> Há de se ressaltar o importante papel que tiveram as quantidades infinitesimais nesse empreendimento de construção do Cálculo Diferencial e Integral: os infinitésimos se constituíram, a partir de então, como a fonte de “inspiração” e o ponto de partida das investigações e produções de todos os matemáticos que se aventuraram pelo domínio do Cálculo. (REZENDE, 2003)

Com base no exposto acima, procuramos elaborar uma aula sobre tópicos importantes de CDI 1 usando o conceito de infinitésimos apoiada pelo software de geometria dinâmica GeoGebra, fugindo dessa forma do ensino tradicional via limites, amplamente difundido nas instituições de ensino atuais devido ao rigor teórico que trouxe ao Cálculo (PICKOVER, 2011). O programa computacional em questão foi escolhido por se tratar de um software grátis e com uma versão online que exclui a necessidade de sua instalação no computador.

Esta aula foi aplicada para alguns alunos selecionados por sorteio de uma turma de Cálculo 1 do curso de Química da UERJ ministrada pelo professor-autor. Os tópicos trabalhados usando infinitésimos já haviam sido dados em sala de aula da maneira tradicional. Dessa forma, procurou-se analisar a reação e a concepção desses alunos percorrendo conceitos já vistos de Cálculo, mas sob outra abordagem. A experiência e o conteúdo trabalhado estão descritos abaixo.

2 A experiência com a turma

Foram selecionados 8 alunos da turma de Cálculo 1 do curso de Engenharia Química / Licenciatura em Química da Universidade do Estado do Rio de Janeiro para participarem da experiência. A seleção se deu através de um sorteio com os alunos que queriam participar do projeto. Decidiu-se por não trabalhar com toda a turma pelo tamanho reduzido do Laboratório do Instituto de Matemática e Estatística da UERJ, o LABIME.

O objetivo da experiência foi ensinar alguns conteúdos pertinentes à disciplina de CDI 1 usando infinitésimos e o software de geometria dinâmica GeoGebra, fugindo da tendência de usar o conceito de limites e apostando na abordagem intuitiva dos infinitésimos (REZENDE, 2003).

Primeiramente, foi definido o conceito de infinitésimo de uma forma que trouxesse uma rápida e razoável assimilação pelos alunos: um infinitésimo é uma quantidade positiva muito pequena, tão pequena quanto se queira tomar, sendo menor, portanto, que qualquer número real positivo (MILANI, 2002). Não nos preocupamos com uma definição rigorosa de infinitésimo, como por exemplo aquela advinda da análise não-standard de Abraham Robinson (D'OTTAVIANO & BERTATO, 2015), mas sim com o conceito intuitivo de quantidades "desprezíveis". Os alunos pareceram não se incomodar com a definição dada, inclusive com exemplos como "um infinitésimo é menor que 0,1, que 0,01, que 0,001, etc."

Em segundo lugar, foram definidos os conceitos de quase-diferencial, diferencial, derivada e quase-derivada em termos de infinitésimos seguindo o proposto por Milani (2002): se dx é um infinitésimo (a ser somado ao número x) e se f é uma função de x cujo gráfico possua uma reta tangente no ponto $\big(x, f(x)\big)$, então

- $dy = f(x + dx) - f(x)$ é o quase-diferencial de f;
- $\frac{dy}{dx}$ é a quase-derivada de f;
- $f'(x) = \text{re}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ é a derivada de f, onde $\text{re}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ é a parte real de $\frac{dy}{dx}$, que desconsidera os infinitésimos;
- $f'(x)dx$ é o diferencial de f.

Observa-se que considerar $\frac{dy}{dx}$ desta maneira e não da maneira tradicional é mais vantajoso para o que se pretendia trabalhar dentro do contexto deste artigo:

> Ao identificar $dy = f'(x)dx$ no afã de conservar a tradição da matemática do século 20 para a qual $\frac{dy}{dx}$ e $y'(x)$ são sinônimos, perdemos a vantagem dos cálculos algébricos diretos Leibnizianos e ficamos com as desvantagens dos livros didáticos modernos que constituem quebra-cabeças para os alunos. (CABRAL & BALDINO, 2006)

Junto com as definições acima, foi mostrada uma figura no quadro contendo o gráfico de uma função f, a sua reta tangente no ponto $P = \big(x, f(x)\big)$ e as quantidades dadas acima. Percebeu-se, junto aos alunos que, sendo a derivada o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P, as definições dadas nos mostram que a quase-derivada é um quociente de dois infinitésimos e que a derivada e a quase-derivada diferem por um infinitésimo E_f, isto é, $\frac{dy}{dx} = f'(x) + E_f$. Foi também dito que também podemos escrever $\frac{df}{dx}$ no lugar de $\frac{dy}{dx}$ quando o primeiro termo for mais apropriado.

O primeiro exercício da aula experimental foi mostrar alguns cálculos simples de derivadas, no caso as derivadas das funções polinomiais $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$, usando o conceito intuitivo de infinitésimos e as definições dadas anteriormente. Por exemplo, para a função $f(x) = x^3$, calculamos primeiramente dy pela definição:

$$dy = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3.$$

Dividindo a igualdade acima por dx, obtemos

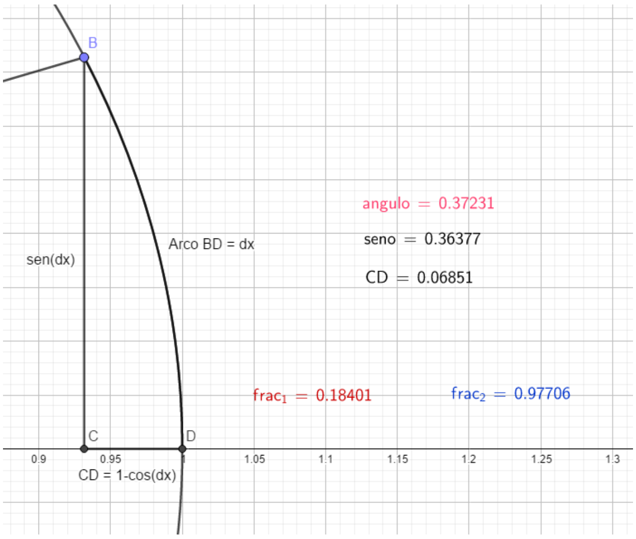
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3xdx + dx^2.$$

Finalmente, considerando a parte real de $\frac{dy}{dx}$, isto é, desprezando os infinitésimos, obtemos a derivada $f'(x) = 3x^2$. Neste momento, observou-se que o termo dx^2 é um infinitésimo de segunda ordem, pois o quociente dele por dx é um infinitésimo. Ficou claro para os alunos que a quantidade $3xdx$ é também um infinitésimo e que a soma de dois infinitésimos ainda é um infinitésimo.

Ainda dentro do cálculo de derivadas de funções básicas, realizou-se a apreciação da derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ seguindo os passos acima e chegando à fórmula da quase-derivada

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(x) \cdot \left(\frac{1 - \cos dx}{dx}\right) + \frac{\operatorname{sen} dx}{dx} \cdot \cos(x).$$

Para "entender" o que significavam as quantidades $\frac{1-\cos dx}{dx}$ e $\frac{\operatorname{sen} dx}{dx}$, utilizou-se a seguinte figura construída no GeoGebra:



Nesta figura, temos o arco BD no ciclo trigonométrico compreendendo o ângulo central dx. Também estão assinaladas as medidas $BC = \operatorname{sen} dx$ e $CD = 1 - \cos dx$. Os quocientes $\operatorname{frac}_1 = \frac{1-\cos dx}{dx}$ e $\operatorname{frac}_2 = \frac{\operatorname{sen} dx}{dx}$ na ilustração são calculados pelo programa. Pediu-se para os alunos moverem o ponto B, na figura, até o ponto D, diminuindo assim o ângulo dx, e observarem os valores destes dois quocientes. Prontamente, eles disseram que o primeiro quociente ficava cada vez mais perto de zero e o segundo, de um. Dessa forma, como o movimento de um ponto ao outro significa estarmos tomando dx tão pequeno quanto se queira, eles puderam comprovar que

$$\frac{1 - \cos dx}{dx} = E_1 \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} dx}{dx} = 1 - E_2,$$

onde E_1 e E_2 são infinitésimos. Substituindo esses termos no quociente da quase-derivada, obteve-se

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot E_1 - \cos(x) \cdot E_2,$$

donde $f'(x) = \operatorname{re}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos(x)$.

Em seguida, foram provadas três regras de derivação: a derivada da soma de duas funções, a derivada do produto de duas funções e a regra da cadeia para a composição de duas funções. Para a primeira regra, sendo f e g duas funções deriváveis em x, e considerando $h(x) = f(x) + g(x)$, $\frac{df}{dx} = f'(x) + E_f$ e

$\frac{dg}{dx} = g'(x) + E_g$, onde E_f e E_g são infinitésimos e df e dg são os quase-diferenciais de f e g, respectivamente, calculou-se

$$dh = h(x + dx) - h(x) = f(x + dx) + g(x + dx) - f(x) - g(x) = df + dg,$$

o que mostra que

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = f'(x) + g'(x) + (E_f + E_g).$$

Assim, $h'(x) = \mathrm{re}\left(\frac{dh}{dx}\right) = f'(x) + g'(x)$. Para esta regra não foi usado o software.

Para mostrar a regra do produto, considerou-se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ e as quase-derivadas de f e g como antes. Com isso,

$$dh = f(x + dx) \cdot g(x + dx) - f(x) \cdot g(x) =$$
$$= [f(x + dx) - f(x)] \cdot g(x + dx) + f(x) \cdot [g(x + dx) - g(x)] = df \cdot g(x + dx) + f(x) \cdot dg,$$

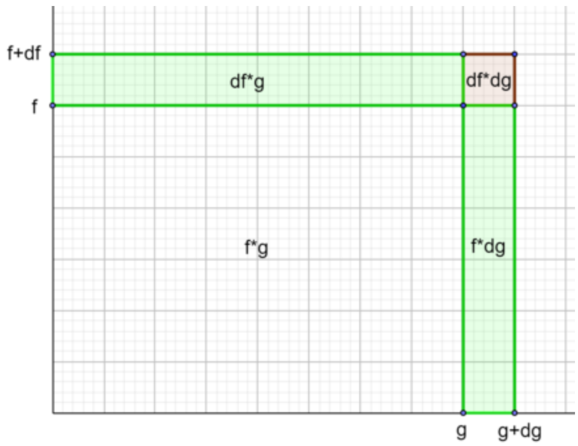
donde

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g(x + dx) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx} =$$
$$= (f'(x) + E_f) \cdot (g(x) + dg) + f(x) \cdot (g'(x) + E_g) =$$
$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot dg + g(x) \cdot E_f + E_g \cdot dg + f(x) \cdot E_g \ .$$

Assim,

$$h'(x) = \mathrm{re}\left(\frac{dh}{dx}\right) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\,.$$

No intuito de justificar porque a fórmula do produto fica assim, mostrou-se a seguinte figura feita no GeoGebra para os alunos, onde o eixo das abscissas contém os valores de f (sendo $f = f(x)$ e $f + df = f(x + dx)$) e o eixo das ordenadas, os valores de g (onde $g = g(x)$ e $g + dg = g(x + dx)$):



Foi constatado pelos alunos que o quase-diferencial dh é, portanto, igual à diferença entre as áreas do retângulo maior de lados $f + df$ e $g + dg$ e o retângulo de lados f e g. Como a área do retângulo de lados df e dg é um infinitésimo de segunda ordem, os alunos perceberam que quanto menor for o termo dx, e portanto, os termos df e dg, a área desse retângulo (pintada em vermelho na figura) se torna desprezível em relação à soma das áreas dos retângulos pintados em verde acima, fazendo "sentido", então, a regra do produto.

Posteriormente, verificou-se a regra da cadeia sem o uso do software tomando-se $h(x) = f(g(x))$ e $u = g(x)$. Assim, $\frac{du}{dx} = g'(x) + E_g$ e $\frac{dh}{du} = f'(u) + E_f$, com E_g e E_f infinitésimos, e, também, temos $h = f(u)$. Com isso, da fórmula para a quase-derivada de h tem-se a expressão $dh = f'(u)du + E_f du$. Dividindo essa equação por dx e substituindo a fórmula para a quase-derivada de u, viu-se que

$$\frac{dh}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} + E_f\frac{du}{dx} = f'(u)\big(g'(x) + E_g\big) + E_f\big(g'(x) + E_g\big) =$$
$$= f'\big(g(x)\big)g'(x) + f'\big(g(x)\big)E_g + g'(x)E_f + E_fE_g\,.$$

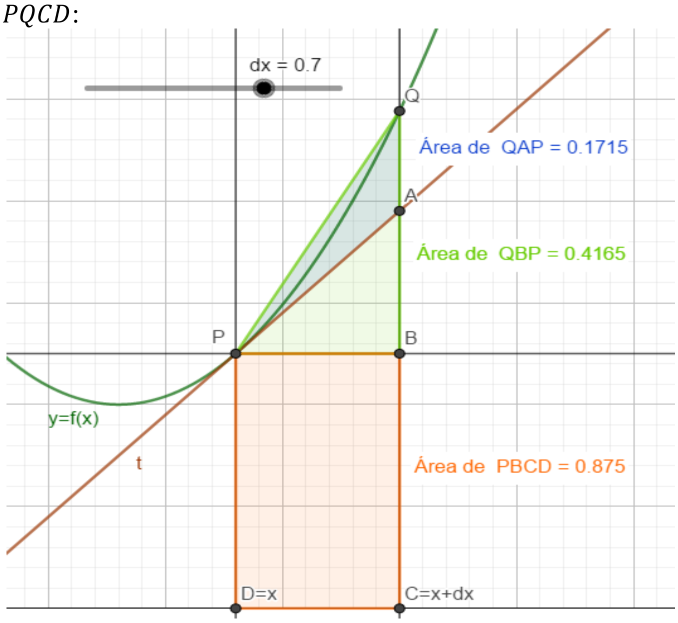
Esta última igualdade implica que

$$h'(x) = \mathrm{re}\left(\frac{dh}{dx}\right) = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

O próximo passo da aula experimental foi tentar entender a notação da integral definida de uma função f e a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo usando infinitésimos e o GeoGebra.

Sendo a integral definida a área compreendida entre o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$, explicou-se para os alunos que esta área poderia ser obtida pela soma "contínua" dos elementos infinitesimais de área dA, onde dA corresponde à área da região acima restrita ao intervalo $[x, x + dx]$. Os estudantes puderam perceber que esta maneira de calcular a área era bem parecida com aquela dada pelas somas de Riemann. Com isso, não se teve problema para dizer que a área requerida era igual a $\int_a^b dA$, onde o símbolo da integral representa a soma "contínua" dos elementos infinitesimais de área no intervalo considerado.

Em seguida, mostrou-se a seguinte figura contendo um elemento infinitesimal dA sendo aproximado pela área do trapézio $PQCD$:



Perguntou-se para os alunos como podíamos calcular a área desse trapézio dividindo-a em figuras mais simples e chegou-se à conclusão que se podia somar a área do retângulo $PBCD$ com a área do triângulo PQB para tanto. Com isso, eles viram que a área dA era igual à soma destas duas áreas menos a área compreendida entre o segmento PQ e o arco PQ na figura, que foi representada por E_A. Como $CD = dx$, $P = \big(x, f(x)\big)$, $Q = \big(x + dx, f(x + dx)\big)$ e $BQ = dy$, a fórmula para calcular dA ficou

$$dA = f(x)dx + \frac{dxdy}{2} - E_A.$$

Para calcular a área total que queríamos, os alunos imediatamente responderam que se podia somar "continuamente" cada parcela do lado direito da igualdade acima e obter

$$\int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \frac{dxdy}{2} - \int_a^b E_A.$$

Afirmou-se para os alunos que a soma contínua de infinitésimos de segunda ordem ainda é um infinitésimo, isto é, que a segunda parcela do lado direito da última igualdade é um infinitésimo. Não se teve o trabalho de deduzir este fato, mas falou-se que poderíamos prová-lo considerando um limite de somatório e que isto fugiria do contexto sugerido para a aula. Além disso, como a área E_A é menor que a área do triângulo PQB, segue-se que a última parcela do lado direito desta mesma igualdade também é um infinitésimo.

Para convencer os alunos dos dois fatos discorridos acima, recorreu-se à figura anterior e pediu-se para eles moverem o controle deslizante dx para a esquerda, o que correspondia a tornar dx cada vez menor. Eles observaram que as áreas QAP e QBP calculadas pelo programa se tornavam muito pequenas quando comparadas à área do retângulo $PBCD$. Descontando, portanto, os infinitésimos, chegou-se à conclusão que a área pedida era

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx,$$

justificando, portanto, a notação que eles conheciam.

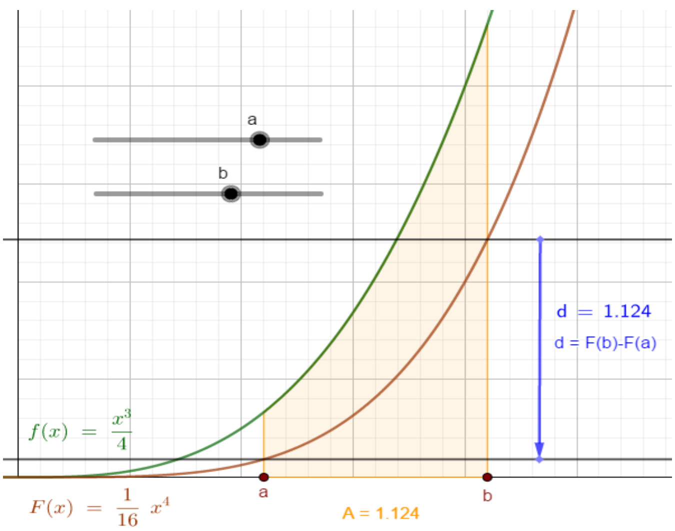
Partiu-se, em seguida, para o entendimento da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, o qual nos dá uma maneira de calcular a integral definida de uma função usando os valores de uma primitiva (anti-derivada) sua calculada nos extremos do intervalo de integração. Considerando $f = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e $F = F(x)$ uma primitiva de f, isto é, uma função tal que $F'(x) = f(x)$, e notando que $F'(x) = \frac{dF}{dx} + E_F$, onde E_F é um infinitésimo, viu-se que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \left(\frac{dF}{dx} + E_F\right) dx = \int_a^b dF + \int_a^b E_F dx.$$

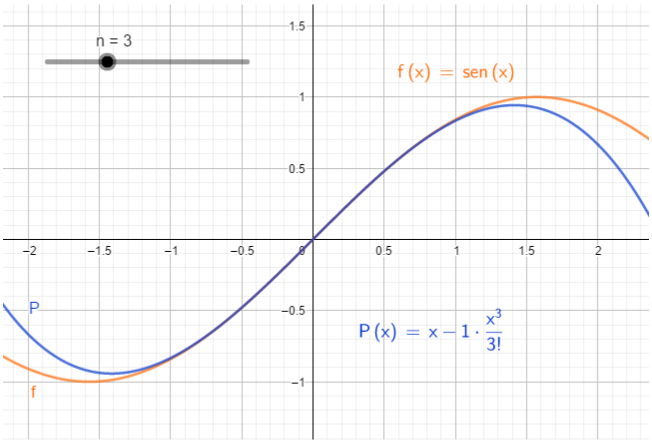
Como o infinitésimo $E_F dx$ é, pelo menos, de ordem 2, os alunos prontamente disseram que a última parcela do lado direito na igualdade acima ainda é um infinitésimo.

Para entender a soma correspondente à primeira parcela do mesmo lado desta igualdade, desenhou-se no quadro o gráfico de uma função crescente e dividiu-se o intervalo $[a, b]$ em pequenos intervalos igualmente espaçados, onde cada comprimento desses intervalos corresponderia a dx. Sendo $dF = F(x + dx) - F(x)$, os alunos puderam perceber com esse exemplo que a soma de todos os elementos dF correspondia à variação total da função F dada por $F(b) - F(a)$. Dessa forma, eles se convenceram do resultado dado pela segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Como um exemplo para aplicação desse resultado, recorreu-se à figura abaixo mostrando a função $f(x) = \frac{x^3}{4}$, sua primitiva F e o intervalo $[a, b]$, que podia ser alterado. Foi pedido para os alunos moverem os controles deslizantes a e b para variarem o intervalo de integração. Eles observaram que a área sob o gráfico de f e a diferença $d = F(b) - F(a)$ permaneciam iguais.



A última parte desta aula experimental se deu com o cálculo de alguns limites usando infinitésimos. Para tanto, foi explicado para os alunos que as funções $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, e^x, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ e outras podem ser dadas em termos de uma série de potências de x, a chamada Série de Taylor, e escreveu-se as fórmulas desenvolvidas em torno de 0 (a série de Maclaurin) no quadro para essas quatro funções considerando os seus primeiros termos. Os alunos pareceram estranhar bastante essa proposição. Explicou-se que, quanto mais termos tomamos na série, mais próximo essa soma será do resultado exato da função para pontos próximos de 0. Usando, novamente, o software GeoGebra, para cada função foi mostrada uma figura onde o programa desenhava o gráfico da função e o gráfico de seu Polinômio de Taylor até ordem 10, tendo um controle deslizante n que dava a ordem do Polinômio. Pediu-se para os alunos moverem esse controle para a direita, aumentando a ordem do polinômio, e observarem como o gráfico do mesmo aproximava cada vez mais o gráfico da função para valores próximos de 0, como mostra a figura abaixo para a função $f(x) = \text{sen}(x)$:



Com o convencimento dos alunos de que, de fato, havia a aproximação dita, partiu-se para o cálculo do limite $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}$, observando para os alunos que x neste limite era, portanto, um infinitésimo. Usando a notação $o(x^n)$ para representar a soma dos termos com potências iguais ou superiores a x^n, com n inteiro positivo, escreveu-se

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{x + o(x^3)}{x} = 1 + o(x^2).$$

Como os termos da forma $o(x^n)$ são infinitésimos, os alunos concluíram que o limite pedido era, portanto, igual a 1.

Para um segundo exemplo de limite, calculou-se $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$. Pela expansão da série de $\cos(x)$, temos que

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{1 + o(x^2) - 1}{x} = o(x).$$

Dessa forma, como o termo do lado direito da última igualdade acima é um infinitésimo, segue-se que o limite acima é zero.

Foi mostrado, em seguida, o cálculo do limite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\text{sen}(x)-x(1+x)}{x^2}$ da mesma maneira. Assim, escreveu-se no quadro

$$\frac{e^x\text{sen}(x) - x(1+x)}{x^2} = \frac{\left(1 + x + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right) - x - x^2}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^5) - \frac{x^4}{3!} + o(x^6) + o(x^3)}{x^2} = \frac{o(x^3)}{x^2} = o(x),$$

donde os alunos concluíram que o valor do limite era, portanto, zero. Nesse ponto, um dos alunos perguntou por que não se havia ensinado o cálculo de limites desse jeito antes, já que lhe parecia mais fácil. Respondeu-se que o intuito era usar a ideia de aproximação e não de infinitésimos, além da expansão de funções por séries de potências ser somente dada em uma outra disciplina de Cálculo.

Por último, calculou-se o limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ usando esse mesmo mecanismo. Assim,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x^2) - 1}{x} = \frac{1}{2} + o(x),$$

e, portanto, o limite deveria ser igual a $1/2$.

3 Comentários e conclusões

Esta é a última parte do trabalho a qual contempla algumas ponderações sobre o que foi feito na experiência de aula descrita e nossas conclusões.

Primeiramente, é inegável observar que os estudantes participantes mostraram um maior interesse e participação revendo os tópicos de CDI 1 escolhidos baseados no conceito de infinitésimos do que quando viram pela primeira vez, junto com toda a turma de Cálculo, da maneira tradicional via limite. É claro que o auxílio do software de Matemática empregado foi de grande valia para este efeito.

O emprego de séries de potências, que é dado somente em um curso de Cálculo posterior, se mostrou interessante para os alunos, pois eles puderam entender como se obtém valores (aproximados) das funções elementares que eles conheciam há tanto tempo e viram como, dentre outros, os chamados "pais" do Cálculo, Newton e Leibniz, trabalhavam com as mesmas sem o uso do computador (BOYER & MERZBACH, 1989).

O uso de infinitésimos trouxe uma mudança na ordem dos tópicos de Cálculo revistos, onde começamos pelo cálculo de derivadas. A computação de limites ficou para o final da aula, desconectada da parte de derivação e integração e apoiada pelas séries de potências.

Finalmente, os alunos tiveram a oportunidade de entender alguns objetos do Cálculo que lhe pareciam um tanto estranhos, como a notação da integral definida de uma função. A facilidade e rapidez de se justificar, ao menos de forma intuitiva, a veracidade das regras de derivação e integração vistas foram notórias.

A partir dos comentários supracitados, constatamos o benefício que esta aula experimental trouxe aos alunos. A dificuldade epistemológica investigada por Rezende (2003) foi vista durante a execução dos exercícios, em especial se existe ou não a "necessidade" de, em um curso inicial de Cálculo, utilizarmos tão massivamente o cálculo de limites:

> Em que sentido as dificuldades de aprendizagem em relação à operação de limite interferem na aprendizagem dos demais conceitos do Cálculo? Teria a operação de limite algum "grau" de responsabilidade pelo fracasso do ensino de Cálculo? Em que "medida" queremos que nossos estudantes universitários façam uso da noção de limite em um curso inicial de Cálculo? Como Leibniz ou Newton usavam? Como Cauchy? Ou, como Weierstrass? (REZENDE, 2003)

Trabalhar bem os conceitos de derivada e integral é fundamental para qualquer aluno que curse e venha a concluir a disciplina de CDI 1 e isto parece ficar obscurecido pela imposição de se ensinar limites para mostrar de forma rigorosa a validade dos resultados de Cálculo usados nos diversos problemas que emergem desta disciplina. Claramente, o conceito de limites também é importante, mas parece melhor aceito pelos alunos após se trabalhar com a ideia de quantidades infinitesimais aplicadas à derivação e integração. Finalmente, a introdução de temas que não pertencem à disciplina de CDI 1, como foi o caso das séries de potências, pode ser interessante na medida em que os alunos possam usá-los de forma descomplicada e não tenham que entender, para isso, toda a teoria que os cerca.

Referências

BOYER, C. B., MERZBACH, U. C. A History of Mathematics. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

CABRAL, T. C. B., BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal para um Curso de Engenharia. Revista de Ensino de Engenharia, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

DE CARVALHO, T. F. D'OTTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. Educação Matemática Pesquisa, v. 8, n. 1, 2006.

D'OTTAVIANO, I. M. L., BERTATO, F. M. George Berkeley e os Fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 4, v. 1, n.1, p. 33-73, 2015.

MENDES, K. B., GIOSTRI, E.C.O Ensino de cálculo I e a realidade dos alunos de engenharia e tecnologia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 36, 2008, Recife. Anais. Porto Alegre: ABENGE, 2008.

MILANI, R. Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo. Dissertação (Mestrado). São Paulo: UNESP, 2002.

PICKOVER, C. A. O livro da matemática. Kerkdriel, Holanda: Librero, 2011.

REIS, F. S. A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2001.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003, 450f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação de São Paulo, São Paulo, 2003.

WROBEL, J. S.; ZEFERINO, M. V. C.; CARNEIRO, T. C. J. Um mapa do ensino de Cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE. In: XLI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Gramado – RS, 2013.