Sobre a Noção de Valorização em um Anel de Divisão *

dinamérico p. pombo jr.†

Resumo

Nesta nota provamos que o primeiro multiplicador e o segundo multiplicador de uma valorização em um anel de divisão estão fortemente relacionados e provêm de dois valores da valorização.

1 Introdução

Uma função real $|\cdot|$ definida em um anel de divisão $\mathbb{K}$ é uma valorização em $\mathbb{K}$ [5] se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $|\lambda| > 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ e $|0| = 0$;

(b) $|\lambda\mu| = |\lambda|\,|\mu|$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

(c) existe um número real C tal que $|1 + \lambda| \leq C$ se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$.

Neste caso, como $|1| = 1$, tem-se $C \geq 1$. Não é difícil mostrar [2, p. 403] que, para uma função $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (a) e (b) e para um número real C, a condição "$|1 + \lambda| \leq C$ se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$"equivale à condição "$|\lambda + \mu| \leq C \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$". A condição (c), amplamente adotada na literatura, foi introduzida no contexto dos corpos por E. Artin [1].

Para uma função $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (a) e (b), consideremos a condição

(c') existe um número real d tal que $|\lambda + \mu| \leq d(|\lambda| + |\mu|)$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

que pode ser encontrada em [4, p. 51] no caso em que $\mathbb{K}$ é um corpo. Quando $d = 1$, (c') é precisamente a desigualdade triangular, a qual aparece no artigo inaugural de Kürschák [3] sob a forma "$|1+\lambda| \leq 1+|\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$". Se (c) é válida para C, (c') também é válida para C; e, se (c') é válida para d, (c) é válida para $2d$. Logo, (c) e (c') são equivalentes.

Admitamos que $|\cdot|$ seja uma valorização em $\mathbb{K}$ e ponhamos

$$M = \inf\{C \in \mathbb{R};\text{ (c) é satisfeita por } C\} \text{ e } m = \inf\{d \in \mathbb{R};\text{ (c') é satisfeita por } d\}.$$

Então (c) é satisfeita por M, (c') é satisfeita por m e

$$1 \leq m \leq M \leq 2m.$$

O objetivo desta nota é provar que m (o primeiro multiplicador de $|\cdot|$) e M (o segundo multiplicador de $|\cdot|$) estão fortemente relacionados e dependem exclusivamente de $1 = |1|$ e $|2|$.

* *O autor é professor titular do IME/UFF*

Palavras-chave: anel de divisão, valorização

†Departamento de Análise, dpombojr@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.12957/cadmat.2018.33915

2 Os Resultados

O primeiro resultado equivale ao teorema provado em [6].

Teorema 2.1 Se $|\cdot|$ é uma valorização em um anel de divisão $\mathbb{K}$, então

$$M = \max\{1, |2|\}.$$

Demonstração. O teorema ao qual acabamos de nos referir afirma que a condição (c) é satisfeita por $\max\{1, |2|\}$. Por outro lado, suponhamos que (c) seja satisfeita por um número real C.

Então

$$1 \leq C \quad \text{e} \quad |2| = |1+1| \leq C,$$

o que fornece $C \geq \max\{1, |2|\}$. Portanto, $M = \max\{1, |2|\}$.

O segundo resultado é uma extensão ao caso não comutativo da Proposição 3, p. 56 de [4]. Sua demonstração se espelha naquela da referida proposição, exceto na maneira pela qual o teorema do binômio é aplicado.

Teorema 2.2 Se $|\cdot|$ é uma valorização em um anel de divisão $\mathbb{K}$, então

$$m = \max\left\{1, \frac{M}{2}\right\}.$$

Mais precisamente, $m = 1$ se $1 \leq M \leq 2$ e $m = \dfrac{M}{2}$ se $M > 2$.

Demonstração. Ponhamos $\ell = \max\left\{1, \dfrac{M}{2}\right\}$. Como $M \leq 2\ell$, temos

$$|\lambda + \mu| \leq 2\ell \, \max\{|\lambda|, |\mu|\}$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Consequentemente, por indução,

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{2^r}| \leq 2^r \, \ell^r \, \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_{2^r}|\}$$

para todo inteiro $r \geq 1$ e para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^r} \in \mathbb{K}$. Em particular, $|2^r| \leq 2^r \, \ell^r$ para todo inteiro $r \geq 1$. Sejam r um inteiro ≥ 1, $n = 2^r$ e $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$.

Afirmação 1. $\quad |1+\lambda|^{n-1} \leq 2n \, \ell^{n+r-1} \big(1 + |\lambda|\big)^{n-1}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
&|1+\lambda|^{n-1} = |(1+\lambda)^{n-1}| \\
= &\underbrace{|1 + \binom{n-1}{1}\lambda + \binom{n-1}{2}\lambda^2 + \cdots + \binom{n-1}{n-3}\lambda^{n-3} + \binom{n-1}{n-2}\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}|}_{2^r \text{ parcelas}} \\
&\leq 2^r \, \ell^r \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \binom{n-1}{k} \lambda^k \right| = n \, \ell^r \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \binom{n-1}{k} \lambda^k \right|.
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, provemos a

Afirmação 2. Para $r = 1, 2, \ldots$ e $0 \leq p < 2^r$, $|p| \leq 2p\,\ell^r$.

Mostraremos a validade da Afirmação 2 por indução sobre $r \geq 1$. Realmente, a afirmação é óbvia para $r = 1$. Admitamos $r > 1$ e suponhamos a afirmação válida para $r - 1$. Devemos então mostrar que $|p| \leq 2p\,\ell^r$ se $0 \leq p < 2^r$, o que é verdadeiro se $0 \leq p < 2^{r-1}$. Suponhamos $2^{r-1} \leq p < 2^r$ e escrevamos $p = 2^{r-1} + (p - 2^{r-1})$. Então

$$|p| \leq 2\ell \max\{|2^{r-1}|, |p - 2^{r-1}|\} = \max\{2\ell|2^{r-1}|, 2\ell|p - 2^{r-1}|\}.$$

Se $|p| \leq 2\ell|2^{r-1}|$, como $|2^{r-1}| \leq 2^{r-1}\,\ell^{r-1}$ vem

$$|p| \leq 2\ell\, 2^{r-1}\,\ell^{r-1} = 2^r\,\ell^r \leq (2p)\ell^r,$$

pois $2^r \leq 2p$. Admitamos agora $|p| \leq 2\ell|p - 2^{r-1}|$. Como $p - 2^{r-1} < 2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1}$, a hipótese de indução fornece $|p - 2^{r-1}| \leq 2(p - 2^{r-1})\ell^{r-1}$. Como $2(p - 2^{r-1}) < p$, vem

$$|p| \leq 2\ell|p - 2^{r-1}| \leq (2\ell)2(p - 2^{r-1})\ell^{r-1} < 2\ell\, p\,\ell^{r-1} = 2p\,\ell^r.$$

Retomemos a demonstração da Afirmação 1. De fato, lembrando a igualdade

$$2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

e aplicando a Afirmação 2, obtém-se

$$\begin{aligned}|1+\lambda|^{n-1} &\leq n\,\ell^r \max_{0\leq k\leq n-1} \left|\binom{n-1}{k}\right| |\lambda|^k \leq n\,\ell^r \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|\binom{n-1}{k}\right| |\lambda|^k\right) \\ &\leq 2n\,\ell^r\,\ell^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} |\lambda|^k\right) = 2n\,\ell^{n+r-1}\big(1+|\lambda|\big)^{n-1},\end{aligned}$$

provando a Afirmação 1. Logo,

$$|1+\lambda| \leq 2^{\frac{r+1}{2^r-1}}\ \ell^{\frac{2^r+r-1}{2^r-1}}\ (1+|\lambda|)$$

para todo inteiro $r \geq 1$. Como $\lim_{r\to\infty} 2^{\frac{r+1}{2^r-1}} = 1$ e $\lim_{r\to\infty} \ell^{\frac{2^r+r-1}{2^r-1}} = \ell$, segue que

$$|1+\lambda| \leq \ell(1+|\lambda|).$$

Finalmente, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, com $\mu \neq 0$ e $|\lambda| \leq |\mu|$, substituindo λ por $\lambda\mu^{-1}$ na desigualdade imediatamente acima (que é óbvia se $\lambda = 0$) obtém-se

$$|\lambda + \mu| \leq \ell(|\lambda| + |\mu|),$$

de onde resulta que $m \leq \ell$. Por outro lado, já sabemos que $m \geq 1$ e $m \geq \dfrac{M}{2}$, o que implica $\ell = \max\left\{1, \dfrac{M}{2}\right\} \leq m$. Portanto, $m = \max\left\{1, \dfrac{M}{2}\right\}$, como queríamos demonstrar.

Observação 2.3 Se $|\cdot|$ é não arquimediana, $M = 1$; logo, $m = 1$. E, se $|\cdot|$ é arquimediana, o Teorema 2.1 fornece $M = |2|$. Portanto, se $|\cdot|$ é arquimediana, o Teorema 2.2 fornece $m = 1$ se $|2| \leq 2$ e $m = \dfrac{|2|}{2}$ se $|2| > 2$.

Referências

[1] ARTIN, E. Algebraic Numbers and Algebraic Functions. New York: New York University, 1950.

[2] BOURBAKI, N. Commutative Algebra. Paris and Reading: Hermann and Addison-Wesley, 1972.

[3] KÜRSCHÁK, J. Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. J. Reine Angew. Math., v. 142, 1913, pp. 211-263.

[4] NACHBIN, L. Espaços Vetoriais Topológicos. Rio de Janeiro: Notas de Matemática nº 4, Livraria Boffoni, 1948.

[5] POMBO JR., D. A noção de valorização em um anel de divisão. Bol. Soc. Port. Mat., v. 69, 2013, pp. 21-26.

[6] POMBO JR., D. Sobre um resultado de Emil Artin. Bol. Soc. Port. Mat., v. 72, 2015, pp. 19-21.