ANÁLISE GRÁFICA E ANALÍTICA DA RETA DE EULER E TRÊS PONTOS NOTÁVEIS, EM TRIÂNGULOS NO ESPAÇO R^2

P.C. SZENDRODI, J. ABRANTES, R.M. GRANADO, D. D. SOBRAL FILHA*

Resumo

Este artigo faz análises gráfica e analítica, estabelecendo uma correspondência entre Álgebra e Geometria, tanto sobre a chamada Reta de Euler, quanto de relações proporcionais destes três Pontos Notáveis, em triângulos, no Espaço Bidimensional (X, Y), ou seja, Espaço R^2. A análise gráfica, foi feita por desenhos executados com o programa AutoCAD©, versão 2015. Este artigo analisa as seguintes conclusões de Euler e outros renomados matemáticos, aplicadas aos triângulos: 1) Existe uma Reta que passa pelos seguintes Pontos Notáveis de triângulos escalenos e isósceles: Ortocentro (O), Baricentro (G) e Circuncentro (C). Esta é a chamada Reta de Euler, que não se aplica a triângulos equiláteros. 2) Na Reta de Euler, o Baricentro (G) está localizado entre o Ortocentro (O) e o Circuncentro (C). 3) A distância entre o Baricentro (G) e o Ortocentro (O) é o dobro da distância entre o Baricentro (G) e o Circuncentro (C). 4) Existe uma Circunferência com centro no encontro das Mediatrizes (o Circuncentro) e que passa pelos três vértices de um triângulo. Este artigo tem como objetivo ajudar a um melhor desenvolvimento das habilidades lógico-matemática e viso-espacial, tanto de estudantes da Licenciatura, quanto de professores de Matemática.

1 Introdução

Todo triângulo possui os chamados quatro Pontos Notáveis quais sejam: Ortocentro (O) como encontro das três alturas, Baricentro (G) como encontro das três medianas; Circuncentro (C) como encontro das três mediatrizes e Incentro (I) como encontro das três bissetrizes. Leonhard Paul Euler (1707-1783) demonstrou que, em triângulos escalenos e isósceles quaisquer, existe uma Reta (chamada de Reta de Euler) que passa pelos seguintes três Pontos Notáveis: Ortocentro (O), Baricentro (G) e Circuncentro (C). Como em triângulos equiláteros estes três pontos coincidem (bem como o Incentro), fica óbvio que, nestes casos, não existe a chamada Reta de Euler, já que por um único ponto é possível passar-se uma infinidade de Retas. Este artigo faz análises Gráfica e Analítica, estabelecendo uma correspondência entre Álgebra e Geometria, que comprovam, tanto a Reta de Euler, quanto algumas relações proporcionais relacionadas aos três Pontos Notáveis, usando um triângulo escaleno, pertencente ao Espaço R2. A análise Gráfica foi obtida com desenhos geométricos, utilizando-se o programa AutoCAD©, versão 2015.

Palavras-chave: Geometria Plana; Pontos Notáveis nos Triângulos; Geometria Analítica; Reta de Euler.

* Departamento de Representação Gráfica – IME/UERJ. pcs@ime.uerj.br, abrantes@ime.uerj.br, rmgra@ime.uerj.br e doraliceduque@ime.uerj.br

DOI: https://doi.org/10.12957/cadmat.2018.33835

2 Objetivo e justificativa

Este artigo objetiva mostrar, tanto por representação gráfica, via programa de computador, quanto por cálculos analíticos, estabelecendo uma correspondência entre Álgebra e Geometria, que existe uma Reta que passa pelos três Pontos Notáveis, bem como algumas relações proporcionais entre estes Pontos e elementos do triângulo. A principal justificativa para esta análise é um melhor desenvolvimento das habilidades lógico-matemática e viso-espacial, que em muito ajudam o ensino/aprendizado da Matemática, em especial da Geometria Analítica.

3 Resumo da imagem geométrica e das análises/conclusões deste artigo

As análises e conclusões deste artigo podem ser resumidas, segundo a Figura 1 a seguir, do triângulo ABD, utilizado neste artigo.

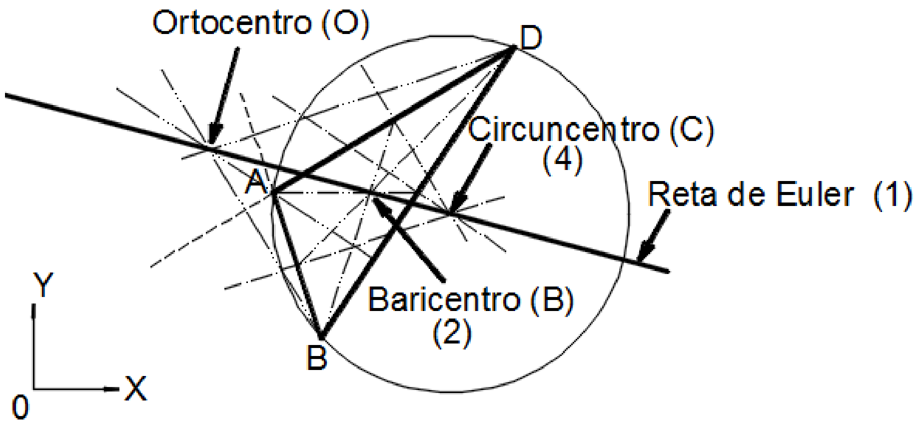
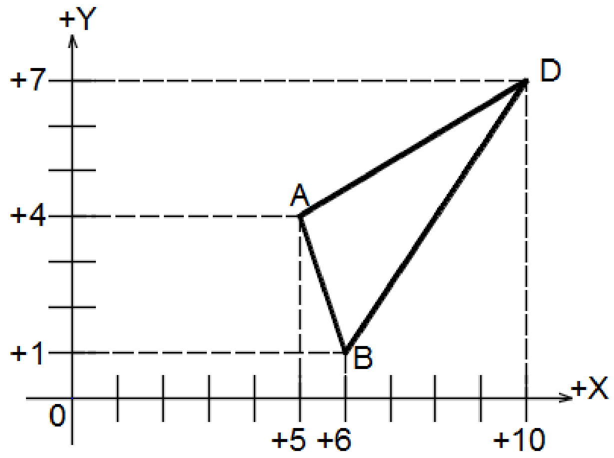


Figura 1 - Triângulo ABD.

Conclusão 1: existe uma Reta que passa pelos seguintes Pontos Notáveis de triângulos escalenos e isósceles: Ortocentro (O), Baricentro (G) e Circuncentro (C).
Conclusão 2: o Baricentro (G) está localizado entre o Ortocentro (O) e o Circuncentro (C).
Conclusão 3: a distância entre o Baricentro (G) e o Ortocentro (O) é o dobro da distância entre o Baricentro (G) e o Circuncentro, ou seja: OG = 2(GC).
Conclusão 4: existe uma Circunferência com centro no encontro das Mediatrizes (Ponto C) e que passa pelos três vértices de um triângulo, ou seja: CA = CB = CD.

4 Características geométricas e análises gráficas do triângulo estudado

Foi definido um triângulo escaleno de vértices A, B, D, com as seguintes Coordenadas Cartesianas no Espaço Bidimensional ou R2: A (+5; +4), B (+6; +1) e D (+10; +7) e representado na Figura 2 a seguir.



AB = 3,162
AD = 5,831
BD = 7,211

Lados do triângulo

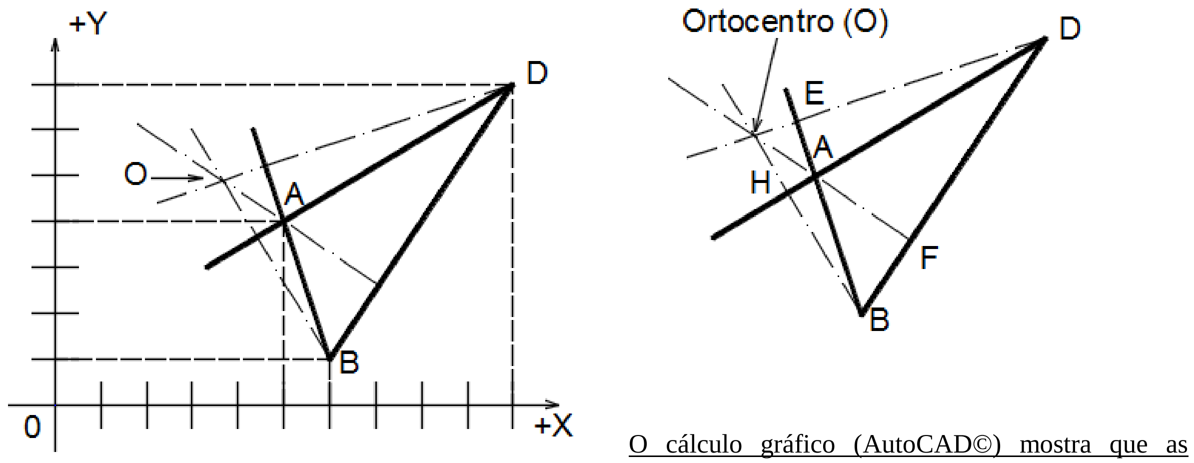
Imagem Geométrica do triângulo escaleno estudado

A (+5; +4)
B (+6; +1)
D (+10; +7)

Figura 2 - Triângulo escaleno de vértices A, B, D.

4.1 Análise Gráfica do encontro das Alturas ou Ortocentro (O)

Conforme pode ser observado na Figura 3 a seguir, em qualquer triângulo, o Ortocentro (O) é o ponto do encontro das três alturas (CARVALHO, 2005, p.25). Altura é a distância entre um lado e o vértice oposto. DE = Altura em relação a AB; BH = Altura em relação a AD e AF = Altura em relação a BD.

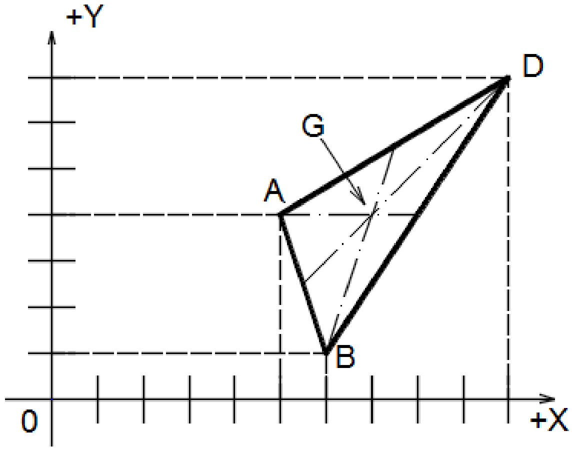


O cálculo gráfico (AutoCAD©) mostra que as Coordenadas Cartesianas do Ortocentro são:
O (+ 3,667; + 4,89).

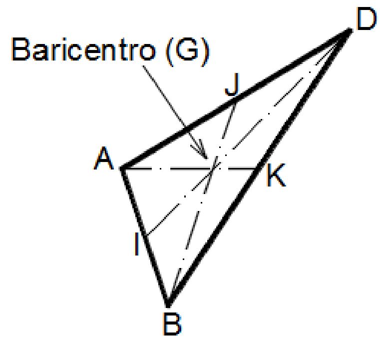
Figura 3 - Ortocentro (O) do triângulo escaleno de vértices A, B, D.

4.2 Análise Gráfica do encontro das Medianas ou Baricentro (G)

Em qualquer triângulo, o Baricentro (G) é o ponto de encontro das três medianas (CARVALHO, 2005, p.25). DI = Mediana de AB; BJ = Mediana de AD e AK = Mediana de BD. Mediana é a linha entre um vértice e o ponto médio do lado oposto. A Figura 4, a seguir, ilustra os detalhes acima apresentados.



O AutoCAD mostra que as medianas são divididas em partes proporcionais, sendo uma, dois terços da outra, ou seja:
GA = 2/3 (AK).
GB = 2/3 (BJ).
GD = 2/3 (DI).

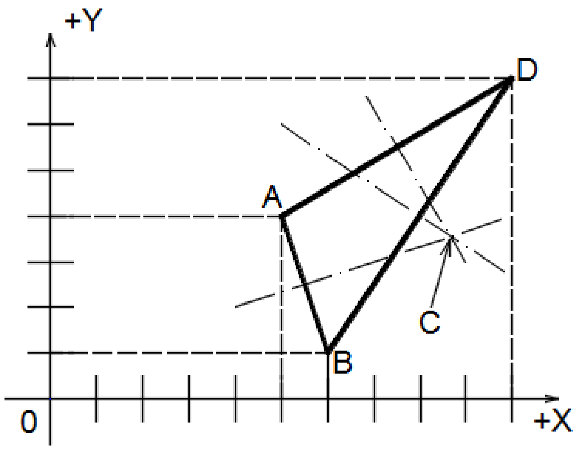


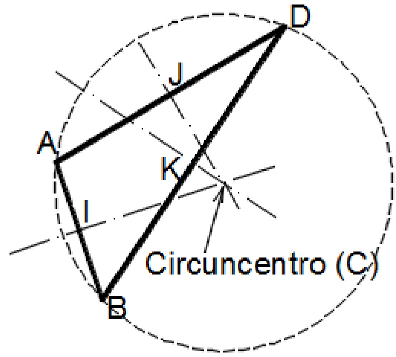
<u>O cálculo gráfico (AutoCAD©) mostra que as Coordenadas Cartesianas do Baricentro são:</u>
<u>**G (+ 7; + 4)**.</u>

Figura 4 - Baricentro (G) do triângulo escaleno de vértices A, B, D.

4.3 Análise Gráfica do encontro das Mediatrizes ou Circuncentro (C)

Conforme pode ser observado na Figura 5 a seguir, em qualquer triângulo, o Circuncentro (C) é o ponto de encontro das três mediatrizes (CARVALHO, 2005, p.25).. Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes aos extremos de um segmento de Reta. CI = Reta Mediatriz de AB; CJ = Reta Mediatriz de AD e CK = Reta Mediatriz de BD.





<u>O cálculo gráfico (AutoCAD©) mostra que as Coordenadas Cartesianas do Circuncentro são:</u>
<u>**C (+ 8,666; + 3,555)**.</u>

Figura 5 - Circuncentro (C) do triângulo escaleno de vértices A, B, D.

4.4 Análise gráfica da Reta de Euler

Uma vez definidas as Coordenadas Cartesianas dos pontos O, G e C, faz-se uma representação gráfica do conjunto, usando-se o AutoCAD©, conforme apresentado na Figura 6 a seguir. O desenho confirma que: 1) existe uma Reta que passa pelos três pontos e que o ângulo que esta Reta faz com o eixo OX é β = 14,949, com o seu suplemento, ângulo α = 165,051. A tangente deste ângulo α (= - 0,267) é o coeficiente angular "m", que será analisado e calculado pelos conceitos da Geometria Analítica, descritos mais adiante, no parágrafo 5. 2) o Baricentro (G) está localizado entre o Ortocentro (O) e o Circuncentro (C). 3) a distância entre o Baricentro (G) e o Ortocentro (O): GO = 3,445 é o dobro da distância entre o Baricentro (G) e o Circuncentro: GC = 1,7225.

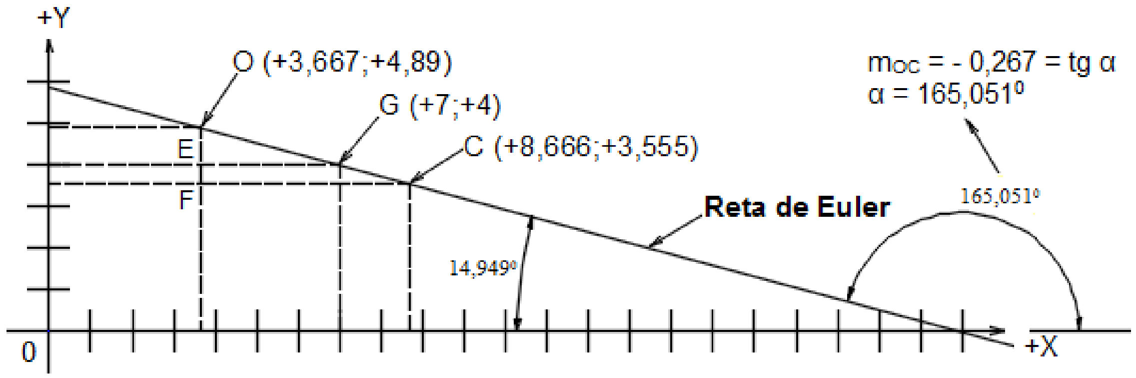
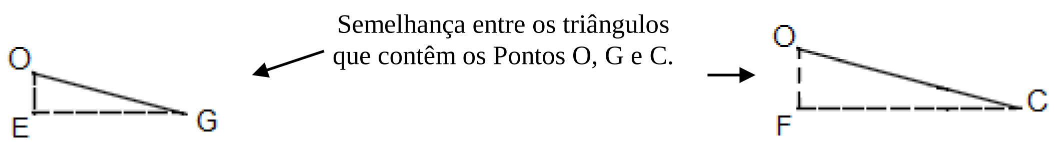


Figura 6 - Representação gráfica do conjunto, usando-se o AutoCAD©.

Esta é a Imagem Geométrica, com a comprovação da Reta de Euler, no triângulo considerado, executada pelo programa AutoCAD©, bem como duas relações proporcionais, representadas na Figura 7 abaixo:



OE = 0,89 e GE = 3,333: GE / OE = 3,744. OF = 1,335 e CF = 4,999: CF / OF = 3,744.

Figura 7 – Semelhança de triângulos – ΔOEG e ΔOFC.

A análise da confirmação da semelhança dos triângulos OEG e OFC, comprova que os três Pontos O, G e C, estão sobre a mesma Reta.

5 A Reta de Euler analisada pelos conceitos da Geometria Analítica

À luz da Geometria Analítica, a confirmação analítico-algébrica de que existe uma Reta que passa pelos três pontos notáveis, aqui estudados, exige as seguintes análises e cálculos: 1) Equação da Reta de cada um dos lados; 2) Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto médio de cada lado; 3) Equação da Reta de cada uma das Alturas; 4) Equação da Reta de cada uma das Medianas; 5) Equação da Reta de cada uma das Mediatrizes; 6) Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto de encontro das Alturas ou Ortocentro (ponto O); 7) Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto de encontro das Medianas ou Baricentro (ponto G); 8) Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto de encontro das Mediatrizes ou Circuncentro (ponto C) e 9) Determinação/confirmação de que a Reta de Euler passa pelos três pontos: O, G e C.

5.1 Determinação da equação da Reta que passa por cada lado do triângulo

Reta que passa pelo lado AB (Figura 8):

A (+5; +4), B (+6; +1).
$m_{AB} = (y_A - y_B) / (x_A - x_B)$: $m_{AB} = -3$.
$y_A - y_B = m_{AB} (x_A - x_B)$.
$y - 1 = -3 (x - 6)$: $y - 1 = -3x + 18$:
Reta AB $\longrightarrow$ $3x + y - 19 = 0$.

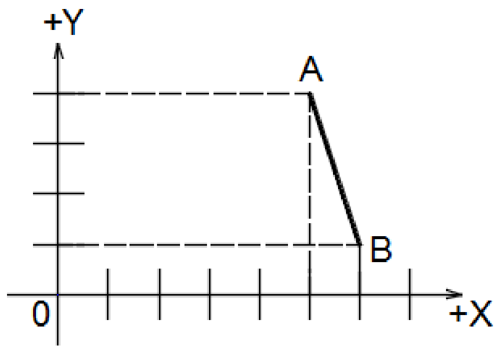


Figura 8 – Reta que passa pelo lado AB.

Reta que passa pelo lado AD (Figura 9):

A (+5; +4), D (+10; +7).
$m_{AD} = (y_A - y_D) / (x_A - x_D)$: $m_{AD} = +0,6$.
$y_A - y_D = m_{AD} (x_A - x_D)$.
$y - 7 = +0,6 (x - 10)$: $y - 7 = +0,6x - 6$:
Reta AD $\longrightarrow$ $0,6x - y + 1 = 0$.

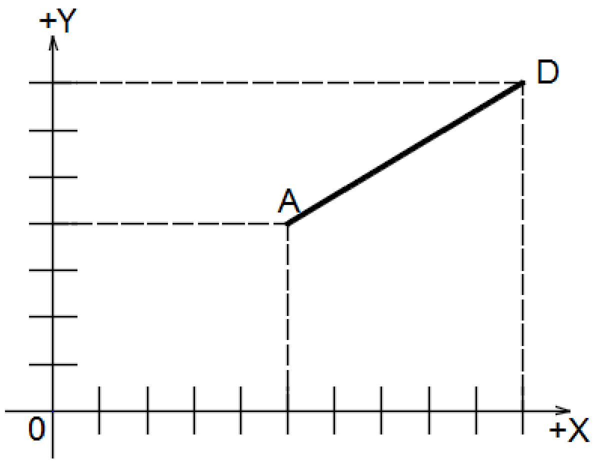


Figura 9 – Reta que passa pelo lado AD.

Reta que passa pelo lado BD (Figura 10):

B (+6; +1), D (+10; +7).
$m_{BD} = (y_B - y_D) / (x_B - x_D)$: $m_{BD} = +1,5$.
$y_B - y_D = m_{BD} (x_B - x_D)$.
$y - 7 = +1,5 (x - 10)$: $y - 7 = +1,5x - 15$:
Reta BD $\longrightarrow$ $+1,5x - y - 8 = 0$.

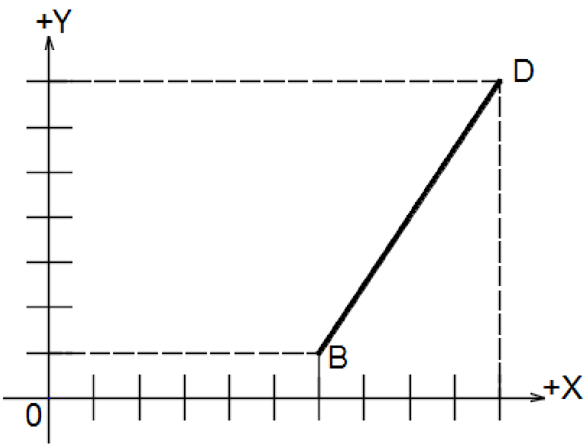


Figura 10 – Reta que passa pelo lado BD.

5.2 Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto médio de cada lado

Ponto Médio do lado AB (ponto I):

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \; ; \frac{y_A + y_B}{2} \right) \quad ; \; I = (+5,5 \; ; +2,5)$$

Ponto Médio do lado AD (ponto J):

$$J = \left(\frac{x_A + x_D}{2} \; ; \frac{y_A + y_D}{2} \right) \quad ; \; J = (+7,5 \; ; +5,5)$$

Ponto Médio do lado BD (ponto K):

$$K = \left(\frac{x_B + x_D}{2} \; ; \frac{y_B + y_D}{2} \right) \quad ; \; K = (+8 \; ; +4)$$

5.3 Determinação da equação da Reta que passa por cada uma das Alturas

Quando duas Retas são perpendiculares, o coeficiente angular de uma é igual ao oposto (sinal oposto) do inverso do outro coeficiente.

DE = Altura em relação a AB, ou seja, a Reta que passa pelo lado AB (3x + y - 19 = 0) é perpendicular à Reta que passa pela Altura DE. Como o coeficiente angular da Reta AB é mAB = - 3, o da Reta DE é: mDE = + 1/3 (+ 0,333), portanto a Reta que passa pela Altura DE, tem coeficiente angular igual a + 0,333 e passa pelo ponto D (+10; +7). Assim sendo tem-se:

mDE = (yD - yE) / (xD - xE): + 0,333 = (y - 7) / (x - 10); portanto: **+ 0,333x - y + 3,667 = 0** é a Equação da Reta que passa pela Altura DE.

BH = Altura em relação a AD, ou seja, a Reta que passa pelo lado AD (- 0,6x - y + 1 = 0) é perpendicular à Reta que passa pela Altura BH. Como o coeficiente angular da Reta AD é mAD = + 0,6, o da Reta BH é: mBH = - 1/0,6 (- 1,667), portanto a Reta que passa pela Altura BH, tem coeficiente angular igual a - 1,667 e passa pelo ponto B (+6; +1). Assim sendo tem-se:

mBH = (yB - yH) / (xB - xH): - 1,667 = (y - 1) / (x - 6); portanto: **- 1,667x - y + 11 = 0** é a Equação da Reta que passa pela Altura BH.

AF = Altura em relação a BD, ou seja, a Reta que passa pelo lado BD (+ 1,5x - y - 8 = 0) é perpendicular à Reta que passa pela Altura AF. Como o coeficiente angular da Reta BD é mBD = + 1,5, o da Reta AF é: mAF = - 1/1,5 (- 0,667), portanto a Reta que passa pela Altura AF, tem coeficiente angular igual a – 0,667 e passa pelo ponto A (+5; +4). Assim sendo tem-se:

mAF = (yA - yF) / (xA - xF): - 0,667 = (y - 4) / (x - 5); portanto: **- 0,667x - y + 7,335 = 0** é a Equação da Reta que passa pela Altura AF.

5.4 Determinação da equação da Reta de cada uma das Medianas

Em verdade, cada Reta desta é a que passa por um vértice, cujas Coordenadas Cartesianas foram dadas, e pelo ponto médio do lado oposto ao vértice, sendo que este ponto médio foi calculado no parágrafo 5.2. Ou seja, trata-se de determinar a equação de uma Reta que passa por dois pontos, com as Coordenadas Cartesianas já conhecidas.

Determinação da equação da Reta Mediana DI, sendo D (+10; +7) e I (+5,5; +2,5):

$m_{DI} = (y_D – y_I) / (x_D – x_I)$; $m_{DI} = + 1$.

$m_{DI} (x_D – x_I) = (y_D – y_I)$; $+1 (x_D – 5,5) = y_D – 2,5$; $x_D – 5,5 - y_D + 2,5 = 0$; $x – y – 3 = 0$;

Portanto: + x - y - 3 = 0 é a Reta que passa pela Mediana DI.

Determinação da equação da Reta Mediana BJ, sendo B (+6; +1) e J (+7,5; +5,5):

$m_{BJ} = (y_B – y_J) / (x_B – x_J)$; $m_{BJ} = + 3$.

$m_{BJ} (x_B – x_J) = (y_B – y_J)$; $+3 (x_B – 7,5) = y_B – 5,5$; $+ 3x_B – 22,5 – y_B + 5,5 = 0$; $+3x – y – 17 = 0$;

Portanto: + 3x - y - 17 = 0 é a Reta que passa pela Mediana BJ.

Determinação da equação da Reta Mediana AK, sendo A (+5; +4) e K (+8; +4):

$m_{AK} = (y_A – y_K) / (x_A – x_K)$; $m_{AK} = 0$.

Como m é o coeficiente angular da Reta, ou seja, a tangente do ângulo entre a Reta e o eixo OX, como m é igual a zero, significa que esta Reta AK é paralela ao eixo OX.

$m_{AK} (x_A – x_K) = (y_A – y_K)$;

$0 = y_A – 4$;

Ou seja; y = + 4 é a Reta que passa pela Mediana AK.

5.5 Determinação da equação da Reta de cada uma das Mediatrizes

Cada Reta Mediatriz é perpendicular à Reta do referido lado e passa pelo seu ponto médio. Ou seja, cada uma destas equações envolve a determinação de uma Reta perpendicular a outra (Reta do lado) e passando por um determinado e conhecido ponto (ponto médio do lado). Quando duas Retas são perpendiculares, o coeficiente angular de uma é igual ao oposto (sinal oposto) do inverso do outro coeficiente.

Determinação da Reta CI, Mediatriz de AB, onde Reta AB $\longrightarrow$ 3x + y - 19 = 0, ponto médio I (+5,5; +2,5), coeficiente angular $m_{AB} = - 3$ e coeficiente angular $m_{CI} = - (-1/3) = + 0,3333$.

$m_{CI} = + 0,3333$; $m_{CI} (x - x_I) = (y - y_I)$; $+ 0,3333 (x - 5,5) = y – 2,5$; $+ 0,3333x – 1,8332 - y + 2,5 = 0$.

Ou seja: + 0,3333x - y + 0,6668 = 0 é a Reta CI, Mediatriz de AB.

Determinação da Reta CJ, Mediatriz de AD, onde Reta AD $\longrightarrow$ + 0,6x - y + 1 = 0, o ponto médio J (+7,5; +5,5) e coeficiente angular $m_{AD} = + 0,6$ e coeficiente angular $m_{cj} = -(1/+0,6) = - 1,6667$.

$m_{cj} = - 1,6667$; $m_{CJ} (x – x_J) = (y – y_J)$; $- 1,6667 (x - 7,5) = y - 5,5$; $- 1,6667x + 12,5003 - y + 5,5 = 0$.

Ou seja: + 1,6667x + y - 18 = 0 é a Reta CJ, Mediatriz de AD.

Determinação da Reta CK, Mediatriz de BD, onde Reta BD $\longrightarrow$ + 1,5x - y - 8 = 0, o ponto médio K (+8; +4) e coeficiente angular $m_{BD} = + 1,5$ e o coeficiente angular $m_{CK} = - (1/+1,5) = - 0,6667$.

$m_{CK} = - 0,6667$; $m_{CK} (x - x_K) = (y - y_K)$; $- 0,6667 (x - 8) = y - 4$; $- 0,667x + 5,3336 - y + 4 = 0$.

Ou seja: + 0,6667x + y - 9,3336 = 0 é a Reta CK, Mediatriz de BD.

5.6 Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto de encontro das Alturas ou Ortocentro (O)

O Ortocentro será determinado pela resolução de um sistema de equações. Como são três equações (três alturas) e duas incógnitas (x e y), serão resolvidos dois sistemas, com duas equações cada, achando-se os mesmos valores de x e y, em cada sistema: 1) Sistema com: equação da Reta que passa pela Altura DE (+ 0,3333x - y + 3,6666 = 0) e equação da Reta que passa pela Altura BH (- 1,6666x - y + 11 = 0). 2) Sistema com: equação da Reta que passa pela Altura BH (-1,667x - y + 11 = 0) e equação da Reta que passa pela Altura AF (- 0,6666x - y + 7,335 = 0).

$$\begin{cases} +0{,}3333x - y + 3{,}6666 = 0;\ \text{onde } y = +0{,}3333x + 3{,}6666. \\ -1{,}667x - y + 11 = 0;\ \text{nesta equação, fazendo-se a substituição do y acima tem-se:} \end{cases}$$

- 1,667x - 0,333x - 3,667 + 11 = 0; - 2x - 3,667 + 11 = 0; - 2x = - 7,333; logo: x = + 3,666.
y = + 0,333. 3,667 + 3,667; logo: y = + 4,89.

$$\begin{cases} -1{,}667x - y + 11 = 0;\ \text{onde } y = -1{,}667x + 11 \\ -0{,}667x - y + 7{,}335 = 0;\ \text{nesta equação, fazendo-se a substituição do y acima tem-se:} \end{cases}$$

- 0,667x + 1,667x - 11 + 7,335 = 0; + x – 3,665 = 0; logo; x = + 3,666.
y = - 1,667. 3,665 + 11; logo: y = + 4,89

As Coordenadas Cartesianas do Ortocentro (O) são: **O (+ 3,667; + 4,89)**, ou seja, os mesmos valores encontrados pela análise gráfica feita no AutoCAD.

5.7 Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto de encontro das Medianas ou Baricentro (G)

Apesar de ter-se três equações, em uma delas, a Reta AK, a equação é y = +4, ou seja, basta apenas resolver um sistema com as equações das outras duas medianas: DI e BJ, para achar o valor de x e confirmar o de y, que é igual a + 4.

$$\begin{cases} +x - y - 3 = 0;\ x = y + 3. \\ +3x - y - 17 = 0 \end{cases}$$

+ 3(y + 3) - y - 17 = 0;   3y + 9 - y - 17 = 0;   + 2y = + 8;   y = +4 e x = + 7.

As Coordenadas Cartesianas do Baricentro (ponto G) são: **G (+ 7; + 4)**, ou seja, os mesmos valores encontrados pela análise gráfica feita no AutoCAD.

5.8 Determinação das Coordenadas Cartesianas do ponto de encontro das Mediatrizes ou Circuncentro (C)

O Circuncentro será determinado pela resolução de um sistema de equações. Como são três equações (três Mediatrizes) e duas incógnitas (x e y), serão resolvidos dois sistemas, com duas equações cada, achando-se os mesmos valores de x e y, em cada sistema: 1) Sistema com: equação da Reta que passa pela Mediatriz CI (+ 0,3333x - y + 0,6668 = 0) e equação da Reta que passa pela Mediatriz CJ (+ 1,6667x + y - 18 = 0). 2) Sistema com: equação da Reta que passa pela Mediatriz CI (+ 0,3333x - y + 0,6668 = 0) e equação da Reta que passa pela Mediatriz CK (**+** 0,6667x + y - 9,3336 = 0).

$$\begin{cases} +0{,}3333x - y + 0{,}6668 = 0;\ y = +0{,}333x + 0{,}6668. \\ +1{,}6667x + y - 18 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = +8{,}666 \text{ e } y = +3{,}555.$$

$$\begin{cases} +1{,}6667x + y - 18 = 0;\ y = -1{,}6667x + 18. \\ +0{,}6667x + y - 9{,}3336 = 0. \end{cases} \Longrightarrow x = +8{,}666 \text{ e } y = +3{,}555.$$

As coordenadas Cartesianas do Circuncentro são: **C (+ 8,666; + 3,555)**, ou seja, os mesmos valores encontrados pela análise gráfica feita no AutoCAD.

5.9 Determinação/confirmação de que a Reta de Euler passa pelos pontos: O, G e C

Como já foram determinadas as Coordenadas Cartesianas dos três pontos, a confirmação de que existe uma Reta (de Euler) que passa por estes pontos poderá ser feita, de duas formas: 1) determinando-se a equação de uma Reta que passa pelos pontos O (Ortocentro) e G (Baricentro) e a equação de uma Reta que passa pelos pontos O (Ortocentro) e C (Circuncentro), segundo o coeficiente angular. Como os três pontos pertencem à mesma Reta (de Euler), as duas equações terão o mesmo coeficiente angular; 2) Outra forma de confirmar que três pontos são colineares, ou seja, que estão sobre a mesma Reta, é através do Determinante de Sarrus. Neste parágrafo serão feitas as duas análises.

6 A Reta de Euler, segundo sua equação definida pelo coeficiente angular m

6.1 Reta entre O (+ 3,667; + 4,89) e G (+ 7; + 4):

$m_{OG} = (y_O - y_G) / (x_O - x_G)$; $m_{OG} = (+ 4,89 - 4) / (+ 3,667 - 7)$; $m_{OG} = - 0,267$.

$y - y_G = m_{OG} (x - x_G)$; $y - 4 = - 0,267 (x - 7)$; $y - 4 = - 0,267x + 1,869$:

$+ 0,267x + y – 5,869 = 0 \longleftarrow$ Equação da Reta OG.

6.2 Reta entre O (+ 3,667; + 4,89) e C (+ 8,666; + 3,555):

$m_{OC} = (y_O - y_C) / (x_O - x_C)$; $m_{OC} = (+ 4,89 - 3,555) / (+ 3,667 - 8,666)$; $m_{OC} = - 0,267$.

$y – y_C = m_{OC} (x - x_C)$; $y – 3,555 = - 0,267 (x - 8,666)$; $y – 3,555 = - 0,267x + 2,314$:

$+ 0,267x + y – 5,869 = 0 \longleftarrow$ Equação da Reta OC.

Como, tanto os coeficientes angulares, quanto as equações são iguais, concluí-se que os três pontos: O (+ 3,667; + 4,89), G (+7;+4) e C (+ 8,666; + 3,555), pertencem à mesma Reta, ou seja:

A equação da Reta de Euler, do triângulo citado, é: + 0,267x + y – 5,869 = 0.

Além de todas as características analisadas analiticamente, esta Reta de Euler, apresenta dois outros pontos típicos e com propriedades específicas, conforme Figura 11 a seguir: o primeiro é o ponto onde a Reta corta o eixo dos Y, ou seja, onde a abscissa x é igual a zero. Neste ponto tem-se o valor do coeficiente linear desta Reta, que é igual a + 5,869. O segundo ponto é onde a Reta corta o eixo dos X, ou seja, onde a ordenada y é igual a zero. Neste ponto tem-se x = + 21,981.

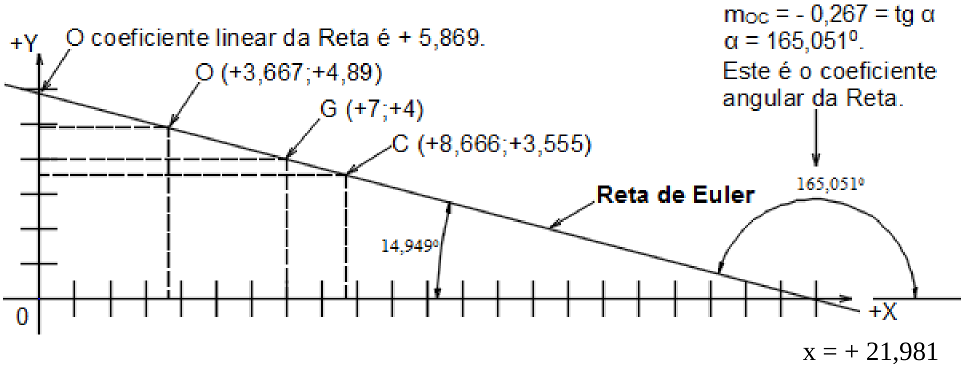


Figura 11 – Imagem Geométrica da Reta de Euler no triângulo considerado.

7 Confirmação da equação da Reta de Euler, pela Regra do Determinante (Δ) de Sarrus:

Segundo esta Regra, se o Determinante (Δ) composto pelas Coordenadas Cartesianas dos três pontos, como adiante descrito, for igual a zero, os três pontos estão alinhados, ou seja, pertencem à mesma Reta.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_G & y_G & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} +3,666 & +4,89 & 1 \\ 7+ & +4 & 1 \\ +8,666 & +3,555 & 1 \end{vmatrix}$$

Se este determinante Δ for nulo, os pontos estão alinhados

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} +3,666 & +4,89 & 1 & +3,666 & +4,89 \\ 7+ & +4 & 1 & +7 & +4 \\ +8,666 & +3,555 & 1 & +8,666 & +3,555 \end{array}\right|$$

+ (1x7x3,555) + (4,89x1x8,666) + (3,666x4x1) - (4,89x7x1) - (3,666x1x3,555) - (1x4x8,666):

+ (24,885) + (42,377) + (14,664) - (34,23) - (13,033) - (34,663) = + 81,926 – 81,926 = 0.

Como Δ = 0, os três pontos estão alinhados.

8 Considerações Finais

Considerando as análises gráfica e analítica, baseadas nas Referências a seguir, pode-se confirmar e concluir que: 1) em triângulos escalenos e isósceles existe uma Reta (de Euler) que passa pelos seguintes pontos notáveis: Ortocentro (O), Baricentro (G) e Circuncentro (C). Esta Reta é chamada de Reta de Euler. 2) Na Reta de Euler, o Baricentro (G) está localizado entre o Ortocentro (O) e o Circuncentro (C). 3) A distância entre o Baricentro (G) e o Ortocentro (O) é o dobro da distância entre o Baricentro (G) e o Circuncentro (C). 4) Existe uma Circunferência com centro no encontro das Mediatrizes (o Circuncentro) e que passa pelos três vértices de um triângulo.

Referências

ABRANTES, José. A Geometria Analítica aplicada nos espaços R_2 e R_3. Desenvolvendo o Raciocínio Lógico-Matemático, a Visão Espacial e as Habilidades Gráficas ou Pictóricas. Rio de Janeiro: Independente, 2017. ISBN: 978-85-903210-5-7.

AUTODESK, INC. AutoCAD 2015 – Software.

CARVALHO, Benjamin de Araújo. 3.ed. 32 reimp. Desenho Geométrico. Rio de Janeiro: Imperial Novo Milênio, 2005.