MÉTODO DE FORD-WALFORD APLICADO AO MODELO GENERALIZADO DE VON BERTALANFFY

CARLA DE AZEVEDO PAES NUNES[1]

MARIA HERMÍNIA DE PAULA LEITE MELLO[2]

Resumo

O método de Ford-Walford é aplicado a modelos de dinâmica populacional, cujas soluções apresentam um comportamento assintótico, tendendo a se estabilizar com o decorrer do tempo. A finalidade do método é determinar o valor para o qual uma solução irá se estabilizar, que chamaremos de valor de estabilização da solução e será denotado por P_∞*. O objetivo desse artigo é mostrar as limitações da aplicabilidade do método de Ford-Walford, quando a modelagem matemática do problema de dinâmica populacional é a equação generalizada de von Bertalanffy.*

1 Introdução

Em muitos processos de modelagem matemática de um problema real não é conhecida a fórmula da função que seria a solução do problema estudado. O que está disponível é um número finito de dados, P_j, que são obtidos experimentalmente por meio de processos estatísticos, em que o dado P_j é referente ao tempo t_j , j $= 1, \ldots,$ n. Os pontos (t_j, P_j), j $= 1, \ldots,$ n, podem ser representados em um gráfico que sugere qual seria a curva de tendência desses dados [1, p. 46-47]. A curva de tendência, também chamada de curva de ajuste ou curva de regressão, será o gráfico de uma função, $P = P(t)$, que relaciona os dados P_j e t_j, respectivamente, e que pode ser determinada por meio do método

Palavras-chave: Dinâmica Populacional, Equação de von Bertalanffy, Método de Ford-Walford, Curva de ajuste

[1] Bolsa PIBIC/UERJ e CNPq, carlaazevedo_12@hotmail.com

[2] Departamento de Matemática Aplicada – UERJ, mherminia@ime.uerj.br

DOI: 10.12957/cadmat.2017.30132

estatístico chamado método de regressão [1, p. 488-489]; ou, como solução de um modelo matemático.

Supondo que a curva de tendência, $P = P(t)$, seja contínua e se estabilize, o método de Ford-Walford é aplicado, visando determinar o seu valor de estabilização, $P_\infty = \lim_{t\to+\infty} P(t)$, sem que seja conhecida a expressão matemática da curva $P = P(t)$.

O objetivo desse artigo é apresentar as limitações quanto à aplicabilidade do método de Ford-Walford para estimar o valor de estabilização, P_∞, quando o modelo matemático adotado para descrever um problema de dinâmica populacional é a equação diferencial ordinária conhecida como equação generalizada de von Bertalanffy.

Na expressão da equação de von Bertalanffy, há uma constante ou coeficiente de alometria, γ, em que $0 < \gamma < 1$. Com essa condição sobre a constante de alometria e supondo que a taxa de variação instantânea da variável P em relação ao tempo é sempre positiva, a equação de von Bertalanffy apresenta um único ponto de inflexão, cujo valor da variável dependente, nesse ponto de inflexão, será denotado por P_I e será denominado de valor de inflexão. Para a equação generalizada de von Bertalanffy, os valores de estabilização e de inflexão devem satisfazer uma relação de desigualdade. Apresentamos os detalhes de como obter a inequação que expressa essa desigualdade, que é apenas mencionada em [7, p. 6].

2 A Equação de von Bertalanffy Generalizada

Em 1938, von Bertalanffy expôs em [4] uma equação que relacionava o crescimento de uma determinada espécie de indivíduos, tendo em vista a relação entre a taxa de variação do peso do indivíduo em relação ao tempo, a sua superfície corporal e o seu próprio peso. A equação de von Bertalanffy é utilizada como modelo matemático para análise do crescimento de várias espécies animais, como: peixes [2, p.136-140], aves [3, p. 82] e suínos [6, p. 101-109].

O peso $P = P(t)$ de cada espécie animal é expresso, em função do tempo t, através de um problema de valor inicial ou problema de Cauchy, em que a equação diferencial é chamada de Equação de von Bertalanffy, com condição inicial $P(0) = P_0$.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha S - \beta P \\ P(0) = P_0 \end{cases} . \qquad \textbf{(2.1)}$$

No problema de valor inicial (**2.1**), as constantes envolvidas são assim caracterizadas:

- S representa a superfície corporal do animal, que será dada em função do próprio peso;
- α é uma constante positiva, chamada de constante de anabolismo, que representa a taxa com a qual determinada espécie consegue ganhar massa corporal;
- β é outra constante positiva chamada de constante de catabolismo e representa a diminuição ou perda de massa.

Pode-se estabelecer uma relação de alometria entre o peso do animal e sua superfície corporal, obtendo-se uma nova constante positiva, chamada de constante alométrica ou coeficiente alométrico que, portanto, varia conforme a espécie estudada. Obtém-se, assim, uma relação do tipo $S = hP^{\gamma}$, em que $h > 0$ é a constante de proporcionalidade que será incorporada à constante de anabolismo α e γ é a constante alométrica.

Substituindo a superfície corporal por sua relação com o peso, reescrevemos o problema de Cauchy dado em (**2.1**) como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^{\gamma} - \beta P \\ P(0) = P_0 \end{cases} . \qquad \textbf{(2.2)}$$

A fim de que a modelagem matemática esteja adequada à descrição do problema real de crescimento animal, a constante alométrica, γ, deve ser tal que $0 < \gamma < 1$ [2, p. 141]. De fato, para $\gamma = 1$, a equação diferencial dada em (**2.2**) recai no modelo de Malthus e o crescimento do peso do animal seria exponencial, o que não corresponde à realidade. A análise é análoga para $\gamma = 0$, porém havendo decaimento exponencial do crescimento. Se o valor da constante alométrica fosse maior que 1, a taxa de variação instantânea do peso em relação ao tempo tenderia a crescer e o peso do animal não iria se estabilizar, visto que a parcela αP^{γ} apresenta coeficiente $\alpha > 0$.

A equação diferencial em (**2.2**) é uma equação do tipo Bernoulli [3, p.78], o que nos permite transformá-la em uma equação diferencial linear, por meio da mudança de variável: $p = P^{1-\gamma}$. Desta forma, determina-se a solução de (**2.2**):

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}e^{-(1-\gamma)\beta t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad \textbf{(2.3)}$$

DOI: 10.12957/cadmat.2017.30132

sendo o valor da constante C determinado pela condição inicial $P(0) = P_0$ dada.

De (**2.3**), o peso máximo atingido ou valor de estabilização do peso da espécie animal estudada será dado por: $P_\infty = \lim_{t\to+\infty} P(t)$.

$$P_\infty = \lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}e^{-(1-\gamma)\beta t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Supondo que a solução $P = P(t)$ possua derivada até segunda ordem, observamos que esta função possui um único ponto de inflexão. O valor do peso, nesse ponto, será chamado de peso de inflexão e denotado por P_I. De fato,

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \alpha\gamma P^{\gamma-1}\frac{dP}{dt} - \beta\frac{dP}{dt} \qquad \textbf{(2.5)}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \iff \frac{dP}{dt}(\alpha\gamma P^{\gamma-1} - \beta) = 0 \qquad \textbf{(2.6)}$$

Em um problema real, supondo que o animal esteja recebendo alimentação adequada, a taxa de variação instantânea do peso em relação ao tempo, $\frac{dP}{dt}(t)$, será sempre positiva. Assim, de (**2.6**) temos um único valor P_I para o qual a derivada de segunda ordem se anula. Analisando o sinal da derivada segunda em (**2.5**), o ponto (t_I, P_I) é o único ponto de inflexão da função $P = P(t)$, sendo t_I o tempo em que o peso P_I é atingido.

É possível estabelecer uma relação entre a constante de alometria, γ, e os valores de inflexão, P_I, e de estabilização, P_∞, da solução $P = P(t)$. De (**2.6**) temos a relação entre o valor de inflexão e as constantes da equação de von Bertalanffy:

$$\frac{P_I^{1-\gamma}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \quad . \qquad \textbf{(2.7)}$$

De (**2.4**), $\frac{\alpha}{\beta} = {P_\infty}^{1-\gamma}$ e substituindo na expressão (**2.7**) acima, temos:

$${P_\infty}^{1-\gamma} = \frac{P_I^{1-\gamma}}{\gamma} \iff \left(\frac{P_\infty}{P_I}\right)^{1-\gamma} = \frac{1}{\gamma}.$$

Obtemos a seguinte relação entre γ, P_I e P_∞:

$$\ln\left(\frac{P_\infty}{P_I}\right) = \frac{1}{1-\gamma}\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad . \qquad \textbf{(2.8)}$$

3 O Método de Ford-Walford

O método de Ford-Walford, apresentado em [2, p. 72-73], é aplicado a modelos de dinâmica populacional, cujas soluções $P = P(t)$ apresentam um comportamento assintótico, estabilizando com o decorrer do tempo, o que, matematicamente, é expresso pelo limite: $P_\infty = \lim_{t\to\infty} P(t)$. O método tem como objetivo determinar o valor de estabilização, P_∞, a partir de um número finito de dados experimentais e sem que a expressão matemática da função $P = P(t)$ seja conhecida.

O método de Ford-Walford é, também, um método de ajuste de curva que considera valores subsequentes de dados experimentais (P_t, P_{t+1}), onde, $P_t = P(t)$, e visa estabelecer uma função de ajuste, $P_{t+1} = g(P_t)$, relacionando os dados (P_t, P_{t+1}).

Próximo ao valor de estabilização, P_∞, observa-se que P_t é aproximadamente igual a P_{t+1} $(P_t \approx P_{t+1})$. Assim, supondo que a função de ajuste, $P_{t+1} = g(P_t)$, seja contínua, o valor de estabilização é um ponto fixo da função g; isto é, $P_\infty = g(P_\infty)$.

De fato, $P_\infty = \lim_{t\to\infty} P_t = \lim_{t\to\infty} P_{t+1}$. Sendo a função de ajuste, g, contínua,

$$P_\infty = \lim_{t\to\infty} P_{t+1} = \lim_{t\to\infty} g(P_t) = g(\lim_{t\to\infty} P_t) = g(P_\infty).$$

Portanto, pelo método de Ford-Walford, o peso de estabilização P_∞ é determinado achando a função de ajuste g e resolvendo o sistema:

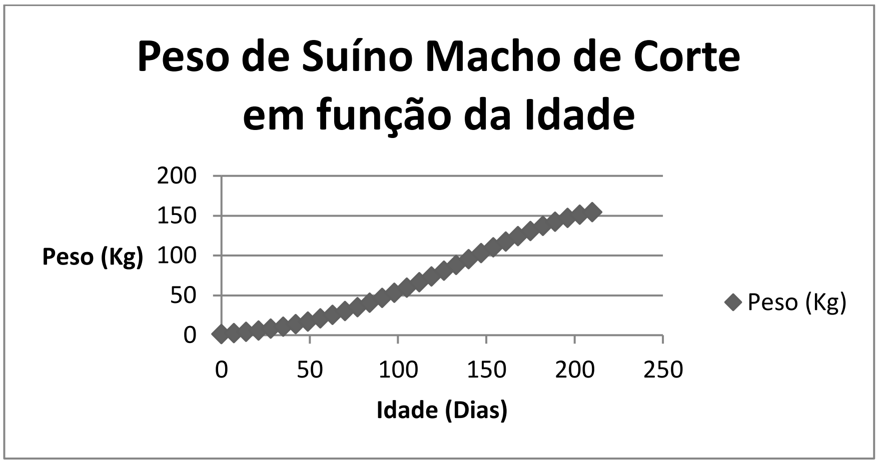
$$\begin{cases} P_{t+1} = g(P_t) \\ P_{t+1} = P_t \end{cases} \quad \textbf{(3.1)}$$

Como o método de Ford-Walford será aplicado a dados (t, P_t) para os quais a curva de tendência, $P = P(t)$, irá se estabilizar com o tempo, para a determinação da função g em (**3.1**), não há a necessidade de considerar todos os dados P_t disponíveis, mas somente aqueles para os quais a tendência a estabilização já possa ver observada. Dessa forma, o método de Ford-Walford se mostrará mais eficiente, quanto maior for o número desses dados.

DOI: 10.12957/cadmat.2017.30132

Exemplo 3.1 Consideremos os dados sobre os pesos de suínos machos de corte, dados em Kg, e mensurados semanalmente, obtidos em [6, p. 104]. A Figura 3.1, cujo gráfico foi traçado usando as funções de Estatística do programa *Excel*, indica a tendência de estabilização dos dados $P = P(t)$.

Figura 3.1: Gráfico de Dispersão Idade x Peso Suíno Macho de Corte



Para a estimativa do valor de estabilização serão utilizados os pesos mostrados na Tabela 3.1, que correspondem aos treze últimos dados disponíveis sobre o peso do animal da tabela encontrada em [6, p. 104].

Tabela 3.1: Suíno Macho de Corte – Peso corporal (Kg), mensurado semanalmente.

P_t	P_{t+1}
73,96	81,18
81,18	88,48
88,48	95,81
95,81	103,16
103,16	110,47
110,47	117,65
117,65	124,59
124,59	131,15
131,15	137,22
137,22	142,68
142,68	147,48
147,48	151,54
151,54	154,83

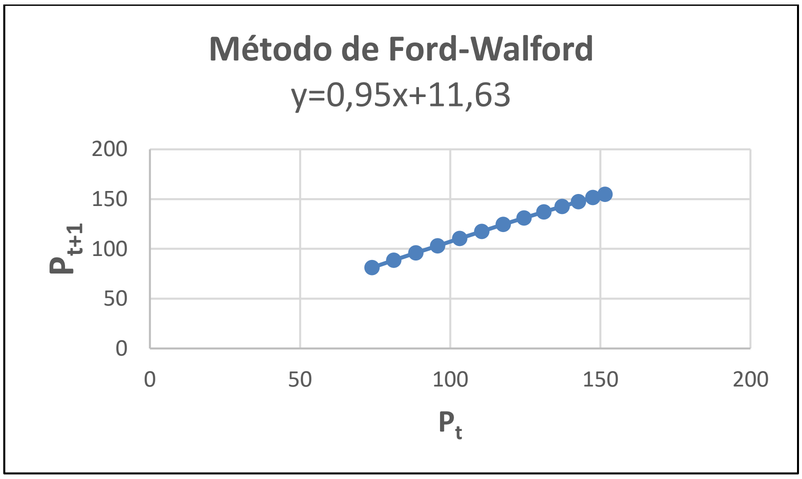
Fonte: Agroceres PIC de Ponta Nova/MG, apud OLIVEIRA, L. de et al. [6, p. 104].

O coeficiente de Pearson [1, 102-104] calculado para esses treze dados é próximo de 1, o que indica que esses dados podem ser ajustados por meio de uma função linear. A equação da reta de ajuste, usando uma aproximação com duas casas decimais, será:

$$P_{t+1} = 0{,}95P_t + 11{,}63 \quad . \qquad \textbf{(3.2)}$$

Na Figura 3.2, é mostrado o gráfico de dispersão desses treze dados $(P_t,\ P_{t+1})$.

Figura 3.2: Método de Ford-Walford

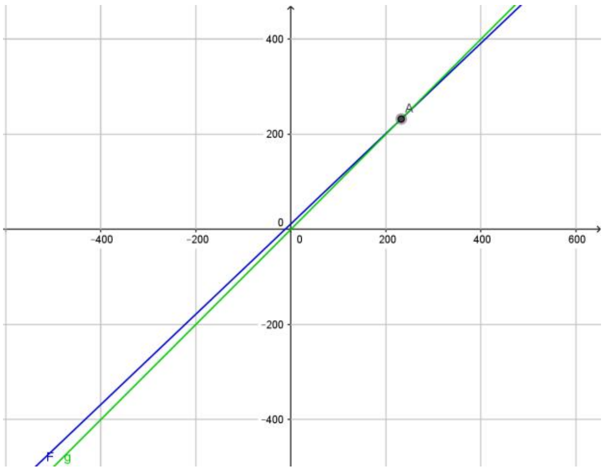


O peso de estabilização, P_∞, é a solução do sistema:

$$\begin{cases} P_{t+1} = 0{,}95P_t + 11{,}63 \\ P_{t+1} = P_t \end{cases} \quad . \qquad \textbf{(3.3)}$$

A solução do sistema (**3.3**) fornece $P_\infty = 232{,}61$ Kg, usando aproximação com duas casas decimais. A solução gráfica do sistema (**3.3**) pode ser visualizada na Figura 3.3, obtida através do programa *Geogebra*.

Figura 3.3: Determinação do Ponto de Estabilização do Peso – Estimativa 1



4 Limitações do Método de Ford-Walford quando aplicado à Equação Generalizada de von Bertalanffy

Mesmo que o modelo generalizado de von Bertallanfy, dado em (**2.2**), seja bastante adequado para a análise de crescimento de alguma espécie animal, em problemas reais as constantes de anabolismo, catabolismo e de alometria nem sempre são conhecidas, devendo ser determinadas utilizando o número finito de dados experimentais levantados sobre a variável P, em certos intervalos de tempo. Essa é a razão de se aplicar, primeiramente, o método de Ford-Walford; lembrando que o método permite determinar, a partir dos dados levantados, o valor de estabilização P_∞, através da resolução do sistema (**3.1**). Para o crescimento de aves de corte, Bassanezi sugere, em [3, p. 82], utilizar o valor da constante alométrica como sendo $\gamma = 2/3$, o mesmo valor usado por von Bertalanffy para crescimento de peixes. Porém as constantes de anabolismo e catabolismo, α e β respectivamente, não são conhecidas. Seus valores serão determinados, com o conhecimento do valor estabilização P_∞ . Já, pela fórmula (**2.8**), é possível avaliar o valor da constante alométrica, quando esta não é conhecida, usando o valor de estabilização e uma estimativa do valor de inflexão, como em [5, p. 52-57] e [2, p. 296-300].

A proposição seguinte estabelece qual a condição que deve ser satisfeita pelos valores de estabilização e de inflexão de uma solução da equação de von Bertalanffy, com constante γ, tal que $0 < \gamma < 1$, apresentando os detalhes da citação de [7, p. 6].

Proposição 4.1 Seja $P = P(t)$ uma solução da equação generalizada de von Bertalanffy:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^{\gamma} - \beta P$$

em que as constantes α, β são positivas e $0 < \gamma < 1$. Sejam P_I o valor da função no ponto de inflexão da curva e $P_\infty = \lim_{t\to+\infty} P(t)$. Então $P_\infty > eP_I$, sendo e o número de Euler.

Demonstração

Consideremos a equação (**2.8**):

$$\ln\left(\frac{P_\infty}{P_I}\right) = \frac{1}{1-\gamma}\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

Como $0 < \gamma < 1$, consideramos o limite do segundo membro da equação, para $\gamma \to 1^-$.

Temos que: $1 - \gamma \to 0^+$, $\frac{1}{\gamma} \to 1^+$ e $\ln(\frac{1}{\gamma}) \to 0^+$.

O limite:

$$\lim_{\gamma\to 1^-} \frac{1}{1-\gamma}\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \lim_{\gamma\to 1^-} \frac{\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{1-\gamma}$$

apresenta uma indeterminação, mas pode ser resolvido pela regra de l´Hôpital. Assim,

$$\lim_{\gamma\to 1^-} \frac{\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{1-\gamma} = \lim_{\gamma\to 1^-} \frac{\gamma.\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)}{-1} = \lim_{\gamma\to 1^-} \frac{1}{\gamma} = 1.$$

Assim, quando $\gamma \to 1^-$, temos que a função $f(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) \to 1^+$ e o valor de $ln\left(\frac{P_\infty}{P_I}\right)$ também se aproxima de 1.

Como as populações são sempre positivas, temos:

$$\ln\left(\frac{P_\infty}{P_I}\right) > 1 \Leftrightarrow \frac{P_\infty}{P_I} > e \Leftrightarrow P_\infty > eP_I.$$

Portanto os valores de estabilização e de inflexão devem satisfazer a desigualdade:

$$P_\infty > eP_I \tag{4.1}$$

■

DOI: 10.12957/cadmat.2017.30132

Em [5, p.54-55] são apresentadas estimativas do valor de estabilização de uma curva que descreve o crescimento de suínos, usando o Método de Ford-Walford e utilizando dados obtidos em [6, p. 104]. Em uma delas, o valor de estabilização encontrado não se mostra adequado à realidade, por não satisfazer a condição (**4.1**).

5 Conclusão

Para uma curva que seja uma solução da equação de von Bertalanffy, a desigualdade (**4.1**) estabelece que o valor de estabilização deve ser bem maior que o valor de inflexão dessa curva. Portanto, se for possível modelar o problema real por meio da equação de von Bertalanffy, essa condição indica uma limitação à aplicabilidade do método de Ford-Walford, que pode não apresentar um resultado adequado para o valor de estabilização. Conforme observado em [2, p. 77], não é conveniente aplicar o método de Ford-Walford quando dispomos de poucos os dados experimentais, com valores superiores ao valor de inflexão da curva.

Referências

[1] ANDERSON, D. R.; SWEENEY, D. J. ; WILLIAMS, T. A.: **Estatística Aplicada à Administração e Economia**. Tradução: José Carlos Barbosa dos Santos. 2. ed., São Paulo: CENGAGE Lerning, 2007.

[2] BASSANEZI, R. C.: **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3ª ed.. 3ª reimpressão, São Paulo: Contexto, 2011.

[3] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C.: **Equações diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Habra, 1988.

[4] BERTALANFFY, L. von : A quantitative theory of organic growth (inquires on growth laws II). **Human Biology**, v. 10, nº 2, p. 181-231, 1938. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/41447359>. Acesso em: mar. 2016 e set. 2016.

[5] NUNES, C. A. P.: **O Modelo Generalizado de von Bertalanffy.** 2016. 61f. Trabalho e Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística,Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2016.

[6] OLIVEIRA, L. de; BRANDÃO,A. J. V. ; BASSANEZI, R. C.: Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. **Biomatemática,** v. 17, p. 101–109, 2007. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio17_art10.pdf . Acesso em: 2016 e ago. 2017.

[7] SCAPIM, J. ; BASSANEZZI, R. C. : Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado a curvas de crescimento animal. **Biomatemática,** v. 18, p.1-14, 2008. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio18.pdf. Acesso em: 2016 e ago. 2017.

.

DOI: 10.12957/cadmat.2017.30132