Uma desigualdade do tipo Wirtinger*

jonathan cardoso reis† patrícia nunes da silva‡ José Luiz Boldrini§

Resumo

Apresentaremos neste artigo a demonstração de uma desigualdade do tipo Wirtinger – uma desigualdade que envolve integrais de funções do $\mathbb{R}^n$ que estima a norma de uma função u através da norma de seu gradiente ∇u. Iniciaremos com um pouco da história da própria desigualdade de Wirtinger e em seguida partiremos para a demonstração a qual nos propusemos inicialmente e, para tal, utilizaremos alguns importantes conceitos, corolários e teoremas de análise funcional e de medida e integração. Vale ressaltar aqui que a desigualdade apresentada não é um caso particular da desigualdade de Poincaré.

Abstract

We present in this article the demonstration of a type Wirtinger inequality – an inequality that involves integrals of functions of $\mathbb{R}^n$ estimating one function u through its gradient ∇u. We'll start with a little history of Wirtinger's inequality. We prove the inequality we initially set out by means of important concepts, corollaries and theorems of functional analysis and integration measures. It is worth mentioning here that inequality presented is not a particular case of inequality of Poincaré.

1 Introdução

A desigualdade de Wirtinger pode ser enunciada assim:

> Seja f uma função periódica de período 2π e tal que sua derivada f' é de quadrado integrável. Se $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$, então
>
> $$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx \tag{1.1}$$
>
> com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $f(x) = A\cos x + B \operatorname{sen} x$, onde A e B são constantes.

Vale destacar que esta desigualdade torna-se importante pelo fato de dar uma estimativa da função f através da sua derivada.

* *Palavras chave:* Desigualdades Integrais, Desigualdades de Wirtinger

†bolsista PIBIC/CNPq, jonathancardosoreis@gmail.com

‡Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, nunes@ime.uerj.br

§Departamento Matemática/UNICAMP, josephbold@gmail.com

O modo como esta desigualdade se apresenta em (1.1) não é único. Há outras configurações para ela, com enunciados distintos e sob condições um pouco diferentes, além de algumas generalizações ou casos particulares. Por exemplo, em 1905, Almansi [1] provou que

$$\int_a^b f'(x)^2 dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b f(x)^2 dx \tag{1.2}$$

sob as condições de que as funções f e f' sejam contínuas no intervalo (a, b), que $f(a) = f(b)$ e que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Observe que, ao substituirmos em (1.2) os valores a e b por 0 e 2π, respectivamente, recaímos em (1.1), pois $f(0) = f(2\pi)$, ou seja, a função é periódica de período 2π, e $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. No entanto, as hipóteses feitas sobre f e f' em (1.1) são mais fracas.

Outro exemplo vem de Picard [5] que buscou encontrar o valor que maximiza o quociente

$$\frac{\int_a^b p(x)f(x)^2 dx}{\int_a^b f'(x)^2 dx} \tag{1.3}$$

supondo que as funções f e f' sejam contínuas, $f(a) = f(b)$ e p, uma função positiva e contínua no intervalo (a, b).

O presente artigo também traz uma desigualdade do tipo Wirtinger que será analisada e demonstrada. Tal desigualdade surge no contexto da análise da existência de solução da equação de Cahn-Hilliard (para mais detalhes, ver Temam [6]).

2 Resultados preliminares

Neste artigo, denotaremos por L^p o espaço das funções p-integráveis. Sua norma será denotada por $\|\cdot\|_{L^p}$ No caso particular em que $p = 2$, temos o espaço das funções de quadrado-integrável e sua norma é dada por $||u||_{L^2} = \sqrt{\int |u(x)|^2 dx} = \sqrt{< u, u >}$; por H^1, o conjunto das funções de quadrado-integrável cujo gradiente também é quadrado-integrável; por L^2_M, as funções pertencentes a L^2 que possuem média zero, ou seja, funções tais que $\int u(x)dx = 0$; por ∇u, o gradiente da função u; por $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$, dividindo a função de maneira tal que possamos escrever $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$ e q.t.p. uma abreviatura de *em quase toda parte* (ou quase sempre).

Usaremos alguns teoremas de convergência de integrais:

Teorema 2.1 (Teorema da Convergência Dominada). *Sejam g uma função integrável sobre E e f_n uma sequência de funções mensuráveis tais que $|f_n| \leq g$ em E todo x. Se $f(x) = \lim f_n(x)$ para quase todo $x \in E$, então*

$$\int_E f(x) = \lim \int_E f_n(x)$$

Para a demonstração deste teorema, ver Royden [4], p. 91.

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Dominada Generalizado)**.** *Seja (g_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função integrável g. Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis tais que $|f_n| \leq g_n$. Se (f_n) converge q.t.p para f e*

$$\int g(x) = \lim \int g_n,$$

então

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Para a demonstração deste teorema, ver Royden [4], p. 92.

Para efeito de completude, apresentamos um teorema de imersão compacta para espaços de Sobolev.

Teorema 2.3. *Seja U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ tal que ∂U é de classe C^1. Suponha que $1 \leq p < n$. Então a imersão de $W^{1,p}(U)$ em $L^q(U)$ é compacta para todo $1 \leq q < \frac{pn}{n-p}$.*

Para a demonstração deste teorema, ver Evans [3], p. 272.

3 Uma desigualdade do tipo Wirtinger

A desigualdade do tipo Wirtinger (3.6) que será demonstrada mais à frente tem o mesmo aspecto que a desigualdade de Poincaré (3.4), entretanto não é considerada sua generalização.

Teorema 3.1. *Se Ω é um conjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1, então existe uma constante $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \cap L^2_M(\Omega). \tag{3.4}$$

Esse resultado ainda é válido para os espaços W^1, p (v. Attouch, Buttazzo e Michaille [2], p. 179).

Teorema 3.2. *Se Ω é um conjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1, então existe uma constante $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^p_M(\Omega). \tag{3.5}$$

Como um corolário da desigualdade de Poincaré, temos a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (v. Attouch, Buttazzo e Michaille [2], p. 180):

Corolário 3.1. *Se Ω é um conjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1, então existe uma constante $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx \right\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Mostraremos que esta desigualdade ainda é válida para qualquer potência $p > 1$ de u. Mais precisamente, vamos provar o seguinte teorema

Teorema 3.3. *Se $p \geq 1$ e Ω é um conjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1, então existe uma constante $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\|u^p\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u^p)\|_{L^2}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \cap L^{2p}_M(\Omega), \tag{3.6}$$

onde L^{2p}_M denota o conjunto das funções pertencentes a L^{2p} que possuem média zero.

Demonstração. Seja $p > 1$. Suponhamos, por absurdo, que não exista C tal que

$$\|u^p\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u^p)\|_{L^2}$$

para toda $u \in L^{2p}_M(\Omega)$ tal que $\nabla u^p \in L^2(\Omega)$. Neste caso, para cada k existe $u_k \in L^{2p}(\Omega)$ com $\nabla u^p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\|u_k^p\|_{L^2} > k\|\nabla(u_k^p)\|_{L^2}. \tag{3.7}$$

Seja v_k a função dada por

$$v_k = \frac{u_k^p}{\|u_k^p\|_{L^2}}. \tag{3.8}$$

Consideremos

$$v_{k,m} = \frac{(u_k^+)^p}{\|u_k^p\|_{L^2}} \qquad \text{e} \qquad v_{k,n} = \frac{(u_k^-)^p}{\|u_k^p\|_{L^2}}.$$

Por hipótese, $u_k \in H^1(\Omega)$. Logo, pela a regra da cadeia, a derivada de v_k pode ser expressa como

$$\nabla v_k = \nabla\left(\frac{u_k^p}{\|u_k^p\|_{L^2}}\right) = \frac{1}{\|u_k^p\|_{L^2}}\nabla(u_k^p) = \frac{p}{\|u_k^p\|_{L^2}}(u_k)^{p-1}\nabla u_k \tag{3.9}$$

Analogamente, obtemos que

$$\nabla v_{k,m} = \frac{p}{\|u_k^p\|_{L^2}}(u_k^+)^{p-1}\nabla(u_k^+) \qquad \text{e} \qquad \nabla v_{k,n} = \frac{p}{\|u_k^p\|_{L^2}}(u_k^-)^{p-1}\nabla(u_k^-)$$

Assim, fazendo o quadrado da norma de ∇v_k, obtemos

$$\begin{aligned}
||\nabla v_k||^2_{L^2} = \int_\Omega \left|\frac{\nabla(u_k^p)}{\|u_k^p\|_{L^2}}\right|^2 dx &= \frac{1}{\|u_k^p\|^2_{L^2}}\int_\Omega |\nabla(u_k^p)|^2 dx \\
&= \frac{1}{\|u_k^p\|^2_{L^2}}\left[\int_{\{u_k(x)>0\}} |\nabla(u_k^p)|^2 dx + \int_{\{u_k(x)<0\}} |\nabla(u_k^p)|^2 dx\right] \\
&= \frac{1}{\|u_k^p\|^2_{L^2}}\left[\int_{\{u_k(x)>0\}} p^2|(u_k)^{p-1}|^2|\nabla u_k|^2 dx + \int_{\{u_k(x)<0\}} p^2|(u_k)^{p-1}|^2|\nabla u_k|^2 dx\right] \\
&= \frac{1}{\|u_k^p\|^2_{L^2}}\left[\int_\Omega p^2|(u_k^+)^{p-1}|^2|\nabla(u_k^+)|^2 dx + \int_\Omega p^2|(u_k^-)^{p-1}|^2|\nabla(u_k^-)|^2 dx\right] \\
&= \int_\Omega \frac{p^2|(u_k^+)^{p-1}|^2|\nabla(u_k^+)|^2}{\|u_k^p\|^2_{L^2}} dx + \int_\Omega \frac{p^2|(u_k^-)^{p-1}|^2|\nabla(u_k^-)|^2}{\|u_k^p\|^2_{L^2}} dx \\
&= \int_\Omega \left|\frac{p|(u_k^+)^{p-1}||\nabla(u_k^+)|}{\|u_k^p\|_{L^2}}\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\frac{p|(u_k^-)^{p-1}||\nabla(u_k^-)|}{\|u_k^p\|_{L^2}}\right|^2 dx \\
&= \|\nabla v_{k,m}\|^2_{L^2} + \|\nabla v_{k,n}\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

Portanto, por (3.7) e por (3.9), temos

$$\|\nabla(v_{k,m})\|_{L^2} < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad \|\nabla(v_{k,n})\|_{L^2} < \frac{1}{k}. \tag{3.10}$$

pois,

$$\|\nabla v_k\|_{L^2} = \left\|\nabla\left(\frac{u_k^p}{\|u_k^p\|_{L^2}}\right)\right\|_{L^2} = \frac{\|\nabla(u_k^p)\|_{L^2}}{\|u_k^p\|_{L^2}} < \frac{1}{k}$$

Logo, as sequências de funções $v_{k,m}$ e $v_{k,n}$ são limitadas em $H^1(\Omega)$. Pela imersão compacta de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, podemos extrair subsequências, ainda denotada por $v_{k,m}$ e $v_{k,n}$, tais que $v_{k,m}$ e $v_{k,n}$ convergem respectivamente para v_m e v_n em L^2 e também q.t.p.. Por outro lado, por (3.10), temos $\nabla v_m = \nabla v_n = 0$ q.t.p. em Ω. Logo, v_m e v_n são constantes, uma vez que Ω é conexo.

Sejam

$$\widetilde{v}_{k,m} = v_{k,m}^{1/p} = \frac{u_k^+}{\|u_k^p\|_{L^2}^{1/p}}, \quad \widetilde{v}_{k,n} = v_{k,n}^{1/p} = \frac{u_k^-}{\|u_k^p\|_{L^2}^{1/p}}, \quad \widetilde{v}_m = v_m^{1/p}, \quad \widetilde{v}_n = v_n^{1/p}. \tag{3.11}$$

A convergência q.t.p. de $v_{k,m}$ a v_m e de $v_{k,n}$ a v_n implica a convergência q.t.p. de $\widetilde{v}_{k,m}$ a $\widetilde{v}_m$ e de $\widetilde{v}_{k,n}$ a $\widetilde{v}_n$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}|\widetilde{v}_{k,m} - \widetilde{v}_m|^2 &\le 2[|\widetilde{v}_{k,m}|^2 + |\widetilde{v}_m|^2] \le 2\left(\max\{1, |v_{k,m}|^2\} + \max\{1, |v_m|^2\}\right)\\ &\le 2\left(2 + |v_{k,m}|^2 + |v_m|^2\right)\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência cominada generalizado, temos $\widetilde{v}_{k,m}$ converge a $\widetilde{v}_m$ em $L^2(\Omega)$ e, por estimativas análogas, $\widetilde{v}_{k,n}$ converge a $\widetilde{v}_n$ em $L^2(\Omega)$.

Sejam

$$\widetilde{v}_k = \frac{u_k}{\|u_k^p\|_{L^2}^{1/p}} = \frac{u_k^+}{\|u_k^p\|_{L^2}^{1/p}} - \frac{u_k^-}{\|u_k^p\|_{L^2}^{1/p}} = \widetilde{v}_{k,m} - \widetilde{v}_{k,n} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{v} = \widetilde{v}_m - \widetilde{v}_n$$

Como $\widetilde{v}_k \in L^2_M(\Omega)$, temos

$$\left|\int_\Omega \widetilde{v}\right| = \left|\int_\Omega (\widetilde{v} - \widetilde{v}_k)\right| \le |\Omega| \left(\int_\Omega |\widetilde{v} - \widetilde{v}_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Temos

1. $\widetilde{v}_k \to \widetilde{v}$ em L^2 e $\widetilde{v}$ é constante q.t.p. em Ω e
2. $\widetilde{v} \in L^2_M(\Omega)$.

Portanto, como Ω é conexo, $\widetilde{v} = 0$. Mas isto implica $\widetilde{v}_m = \widetilde{v}_n = 0$. De fato, a convergência q.t.p. de $\widetilde{v}_{k,m}$ a $\widetilde{v}_m$ e de $\widetilde{v}_{k,n}$ a $\widetilde{v}_n$ implica a existência de subsequências, ainda denotadas por $\widetilde{v}_{k,m}$ e $\widetilde{v}_{k,n}$ que convergem quase uniformemente a $\widetilde{v}_m$ e $\widetilde{v}_n$, respectivamente.

Suponhamos por absurdo, que $\widetilde{v}_m = \widetilde{v}_n = c > 0$. Seja $\delta = \frac{|\Omega|}{4}$, pela convergência quase uniforme, existem $M_\delta, N_\delta \subset \Omega$ tais que

$$|M_\delta| < \delta \qquad \text{e} \qquad |N_\delta| < \delta$$

e

$$\widetilde{v}_{k,m} \to \widetilde{v}_m \qquad \text{e} \qquad \widetilde{v}_{k,n} \to \widetilde{v}_n$$

uniformemente em $\Omega \setminus (M_\delta \cup N_\delta)$.

Portanto, para $\varepsilon = \frac{c}{4}$, existe k_0 tal que

$$|\widetilde{v}_{k_0,m}(x) - \widetilde{v}_m(x)| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |\widetilde{v}_{k_0,n}(x) - \widetilde{v}_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in \Omega \setminus (M_\delta \cup N_\delta)$.

Sejam

$$A_m = \{x \in \Omega,\ |\widetilde{v}_{k_0,m}(x) - \widetilde{v}_m(x)| < \varepsilon\} \qquad \text{e} \qquad A_n = \{x \in \Omega,\ |\widetilde{v}_{k_0,n}(x) - \widetilde{v}_n(x)| < \varepsilon\}.$$

A escolha de ε e a definição de $\widetilde{v}_{k,m}$ e $\widetilde{v}_{k,n}$ tornam tais conjuntos disjuntos. Portanto, como $A_m \cup A_n \subset \Omega$ e $\Omega \setminus (M_\delta \cup N_\delta) \subset A_m, A_n$, temos

$$\frac{3}{2}|\Omega| = 2|\Omega| - 2\frac{|\Omega|}{4} \leq 2|\Omega| - 2|M_\delta \cup N_\delta| = 2|\Omega \setminus (M_\delta \cup N_\delta)| \leq |A_m| + |A_n| \leq |\Omega|.$$

Contradição. Logo, $\widetilde{v}_m = \widetilde{v}_n = 0$.

Sejam

$$v_k = \frac{|u_k|^p}{\|u_k^p\|_{L^2}} = v_{k,m} + v_{k,n} \qquad \text{e} \qquad v = v_m + v_n = 0$$

Temos

1. $v_k \to v$ em L^2;

2.

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^2}^2 &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |v_{k,m} + v_{k,n}|^2 dx = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|u_k^p\|_{L^2}^2} \int_\Omega \left|(u_k^+)^p + (u_k^-)^p\right|^2 dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|u_k^p\|_{L^2}^2} \int_\Omega |u_k^p|^2\, dx = 1.\end{aligned}$$

Contradição!

□

4 Considerações Finais

Vamos agora destacar alguns aspectos do Teorema 3.3. Observe que para demonstrá-lo, não era possível em (3.8) simplesmente extrair a raiz p-ésima de v_k pois ao extraí-la nem sempre obtínhamos funções de média zero, fato que foi essencial para a obtenção de uma contradição. A utilização das sequências auxiliares $(\widetilde{v}_{k,m})$ e $(\widetilde{v}_{k,n})$ permitiu explorarmos o fato de cada elemento u_k da sequência original ter média nula para deduzir que seus limites $\widetilde{v}_m$ e $\widetilde{v}_n$ eram nulos. Sem a extração da raiz p-ésima, o argumento não teria funcionado. Além disso, é vale lembrar que a desigualdade do tipo Wirtinger (3.6) aqui apresentada não é um caso particular da desigualdade de Poincaré (3.4) pois obtivemos uma estimativa da norma $2p$ de uma função u em termos da norma 2 do gradiente de u^p quando u tem média zero. Essa mesma estimativa no contexto da desigualdade de Poincaré só estaria garantida se soubéssemos que a função u^p tem média zero.

Referências

[1] Almansi, E., *Sopra una delle esperienze del Plateau*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Series 3 (1906), p. 1-17.

[2] Attouch, H., Buttazzo, G. e Michaille,G., *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces*, SIAM, Philadelphia, PA, 2006.

[3] Evans, L. C., *Partial Diferential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, AMS, 1991.

[4] Royden, H. L., *Real Analysis*, Macmillan Company, 1968.

[5] Picard, É., *Traité d'Analyse*, III, Paris, 1896, p. 100-128.

[6] Temam, R., *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1988.