Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*

Patricia Reis Martins† Carlos Frederico Vasconcellos‡

Resumo

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é talvez o teorema de maior relevância a respeito da existência de um ponto fixo. E, apesar de ter recebido críticas do próprio Brouwer quanto a construção da sua demonstração, com base no terceiro excluído (por absurdo), possui utilidade e aplicação em áreas diversas dentro da matemática e além dela, produzindo e ampliando conhecimentos.

Em [1], N. Dunford e J. Schwartz apresentam uma prova para o Teorema de Brouwer, utilizando teoria de aproximação de funções, diversas vezes citada em trabalhos envolvendo Ponto Fixo, e de grande rigor matemático.

Neste Projeto Final, apresentamos e detalhamos a prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer encontrada em [1] para melhor compreensão, buscando motivar este trabalho com um pouco da história deste Matemático Genial e algumas demonstrações mais triviais. E nos colocamos em busca de aplicações que possam ilustrar e solidificar toda esta brilhante teoria.

1 Introdução

Muito da história do matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer pode ser encontrado em The life of L.E.J. Brouwer, Van Dalen, Dirk, um livro que retrata sua personalidade e tendências, a época tumultuada em que viveu, seus conflitos e sua vida como matemático. Mas o Teorema do Ponto fixo ocupa lugar de destaque em sua história, sendo objeto de estudo e aplicação. Nosso trabalho é tornar compreensível uma das provas apresentadas para este Teorema e motivar sua aplicação. Procuramos apresentar de maneira mais detalhada o teorema demonstrado em [1] e estaremos dando continuidade a este trabalho, buscando aplicações diretas e significativas para este teorema.

**Palavras chave:* Pontos fixos, funções contínuas

†Mestrado em Ciências Computacionais, IME-UERJ, patriciarm75@yahoo.com.br

‡Pesquisador Visitante IME-UERJ com bolsa FAPERJ, cfredvasc@ime.uerj.br

2 História de Brouwer

L.E.J BROUWER (Luitzen Egbertus Jan Brouwer) nasceu em Overschie no dia 27 de fevereiro de 1881 vivendo até o dia 2 de dezembro de 1966, em Blarium. Foi uma figura notável e um gênio matemático com fortes tendências filosóficas. Matemático holandês, graduado na universidade de Amsterdam, Brouwer trabalhou em topologia, teoria de conjuntos, medidas matemáticas e análise complexa. Fundou o intuicionismo matemático como oposto ao formalismo dominante, passou muito tempo em busca da teoria intuicionista dos números reais.

Suas tendências filosóficas o levaram a uma discussão sobre a natureza matemática com David Hilbert, que defendia a escola formalista. Costumava envolver-se em questões controversas, como na questão sobre a política editorial de um jornal especializado, Mathematische Annalen no final dos anos 1920, e uma campanha para desfazer o boicote de cientistas alemães. Seu senso de justiça se manifestava tanto no campo científico quanto no campo político, e o tornou uma figura emblemática junto a sociedade holandesa.

Tornou-se conhecido pela demonstração de um Teorema que recebe seu nome, TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER.

Inicialmente proposto em 1910, este Teorema é um importante resultado que garante a existência do ponto fixo em funções contínuas sob certas condições. O teorema proposto por Brouwer pode ser considerado uma relevante contribuição em áreas da matemática como análise, álgebra, lógica, com desdobramentos e aplicações em economia, computação, física e engenharia.

3 Ponto Fixo

Em matemática, define se ponto fixo de uma função, como sendo um ponto do domínio desta função que não se altera pela sua aplicação, isto é, $x \in A$ é dito ponto fixo de uma função $f : A \to A$ se $f(x) = x$.

Existem diversos teoremas que garantem a existência de pelo menos um ponto fixo para funções que satisfazem a determinadas condições, propostos por diversos matemáticos como por exemplo: Banach, Schauder, Kakutani e Brouwer. Sendo o teorema proposto por Brouwer considerado um dos resultados mais relevantes e de maior impacto em áreas diversas. O conceito de ponto fixo pode ser utilizado na descrição de conceitos fundamentais, tais como equilíbrio e estabilidade.

4 Conceitos Preliminares

Definição 4.1 (Bola unitária fechada). *Denotaremos por S, a bola unitária fechada definida por*

$$S := \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$$

e sua fronteira será denotada por

$$S^{n-1} := \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$$

.

Teorema 4.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Corolário 4.1.1. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração do teorema 4.1 e do corolário 4.1.1 em [2] págs. 77-78

TEOREMAS DE APROXIMAÇÃO

Teorema 4.2 (Teorema de aproximação de Weiertrass (na reta)). *Seja f uma função contínua num intervalo compacto de $\mathbb{R}$, e tomando valores em $\mathbb{R}$. Então f pode ser uniformemente aproximada por polinômios.*

Demonstração do teorema 4.2 em [3] pág 163

Teorema 4.3 (Teorema de aproximação polinomial). *Seja f uma função contínua cujo domínio K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p$ e cujo contradomínio pertence a $\mathbb{R}^q$ e seja $\epsilon > 0$. Então existe uma função polinomial p de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$ tal que $\|f(x) - p(x)\| < \epsilon$ para $x \in K$.*

Demonstração do teorema 4.3 em [3] pág 174

Corolário 4.3.1. *Se $f : S \to S$ é uma função contínua então dado $\epsilon > 0$, existe uma função polinomial* $p : S \to S$ *tal que* $\|f(x) - p(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in S$.

Demonstração. Seja $f : S \to S$ uma função contínua, pelo teorema 4.3, temos que para cada k pertencente aos $\mathbb{N}$ existe um polinômio $P_k(x)$ tal que $\|P_k(x) - f(x)\| < \frac{1}{k}, \quad \forall x \in S$.

Defina $\quad p_k = (1 - \frac{1}{k})P_k(x)$

Como

$$\begin{aligned}\|P_k(x)\| = \|P_k(x) - f(x) + f(x)\| &\leqslant \|P_k(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \\ &< \frac{1}{k} + 1\end{aligned}$$

Então

$$\|p_k(x)\| = (1 - \frac{1}{k})\|P_k(x)\| \leqslant (1 - \frac{1}{k^2}) \leqslant 1$$

Logo $p_k(S) \subset S$

$$\begin{aligned}\|p_k(x) - f(x)\| = \|(1 - \frac{1}{k})P_k(x) - f(x)\| &= \|P_k(x) - f(x) - \frac{1}{k}P_k(x)\| \leqslant \\ \|P_k(x) - f(x)\| + \frac{1}{k}\|P_k\| &< \frac{1}{k} + \frac{1}{k}(1 + \frac{1}{k}) = \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}, \quad \forall x \in S\end{aligned}$$

Logo a sequência de polinômios p_k converge uniformemente para f em S.

□

Proposição 4.1. *Seja $F \in C^1(\Omega)$, Ω é aberto e conexo, tal que*

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Se $\|F(x)\| = 1$ para todo $x \in \Omega$, então seu Jacobiano será identicamente nulo.

Demonstração. Se $\|F(x)\| = 1$ para todo $x \in \Omega$, segue que $\|F(x)\|^2 = 1$, logo

$$(F_1(x))^2 + (F_2(x))^2 + ... + (F_n(x))^2 = 1 \text{ onde,}$$

$$F_j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ,\ j = 1, 2, ..., n,\ \text{são as funções coordenadas de } F.$$

Fazendo as derivadas parciais das funções coordenadas temos:

$$\begin{cases} 2\frac{\partial F_1}{\partial x_1}F_1 + 2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}F_2 + & ... & +2\frac{\partial F_n}{\partial x_1}F_n = 0 \\ 2\frac{\partial F_1}{\partial x_2}F_1 + 2\frac{\partial F_2}{\partial x_2}F_2 + & ... & +2\frac{\partial F_n}{\partial x_2}F_n = 0 \\ \vdots & & \\ 2\frac{\partial F_1}{\partial x_n}F_1 + 2\frac{\partial F_2}{\partial x_n}F_2 + & ... & +2\frac{\partial F_n}{\partial x_n}F_n = 0 \end{cases}$$

Dividindo todas as equações por 2, e representando-as sob a forma de matriz teremos

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$det A = 0$ pois

$$det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O que é um absurdo, pois se $\|F(x)\| = 1$ então $F(x)$ é um vetor não nulo. Logo $det A = 0$. Como $det A = det A^t$ e o $det A^t$ é o Jacobiano da função F então o Jacobiano é igual a zero.

□

Lema 4.1. *Seja f uma função infinitamente diferenciável em $n+1$ variáveis $(x_0, ..., x_n)$ com valores em S. Seja D_i o determinante da matriz cujas colunas são as n derivadas parciais $f_{x_0}, ..., f_{x_{i-1}}, f_{x_{i+1}}, ..., f_{x_n}$. Então*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = 0$$

Demonstração. Para todo par i, j de inteiros com $i \neq j$ e $0 \leqslant i, j \leqslant n$ denotamos C_{ij} o determinante da matriz cujas primeira coluna é a derivada $f_{x_i x_j}$ e cujo restante das colunas são as derivadas $f_{x_0}, ..., f_{x_n}$ arranjados na ordem crescente dos índices, e onde f_{x_i} e f_{x_j} são omitidos da enumeração.

Claramente $C_{ij} = C_{ji}$ e pelas regras de diferenciação de determinantes e permuta de colunas temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j<i} (-1)^j C_{ij} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{ij}$$

Logo,

$$(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i,j)$$

Onde $\sigma(i,j) = 1$ se $j < i$, $\sigma(i,j) = 0$ se $j = i$ e $\sigma(i,j) = -1$ se $j > i$.
Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i,j)$$

Permutando os índices i, j na expressão anterior e usando o fato de que $\sigma(i,j) = -\sigma(j,i)$, vemos que

$$\sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i,j) = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{j+i} C_{ij} \sigma(j,i) = -\sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i,j)$$

Logo os três resultados na fórmula acima terão que ser iguais a zero, e assim provamos o lema 4.1

□

Esta Demonstração pode ser encontrada em [1] pág. 467

5 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é do tipo dos chamados "teoremas de existência". Sob certas condições, ele assegura a existência de uma raiz para a equação $f(x) - x = 0$. Uma das mais simples aplicações é a versão unidimensional deste Teorema.

Teorema 5.1 (Ponto fixo na reta (caso $n = 1$))**.** *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua, nestas condições, existe pelo menos um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração. Defina $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R}$ onde $\varphi(x) = x - f(x)$, com efeito φ é contínua. Decidir se f possui ponto fixo se resume a decidir se φ possui raiz. Note que a imagem de f está definida no intervalo $[a, b]$ e portanto $a \leq f(a) \leq b$ e $a \leq f(b) \leq b$, logo $\varphi(a) \leq 0$ e $\varphi(b) \geq 0$, isto é $\varphi(a) \leq 0 \leq \varphi(b)$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$, tal que $\varphi(c) = 0$. Deste fato segue que $f(c) = c$.

□

Apresentamos ainda, uma segunda demostração para o teorema do ponto fixo na reta. Nesta demonstração, restringimos o domínio e a imagem da função ao intervalo $[-1, 1]$, tão somente para facilitar o ententimento do leitor. No entanto, a mesma pode ser estendida para um intervalo fechado $[a, b]$ qualquer.

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ contínua, sem pontos fixos, ou seja, $f(x) \neq x, \forall x \in [-1, 1]$. Então é possível definir $g(x) : [-1, 1] \to [-1, 1]$, onde $g(x) = \dfrac{x - f(x)}{|f(x) - x|}$, que será também contínua.
Disso segue que $g([-1, 1]) = \{-1, 1\}$. Mas $[-1, 1]$ é um intervalo e $\{-1, 1\}$ não. Como por hipótese g é contínua, chegamos a uma contradição. Portanto $f(x) - x = 0$ para algum $x \in [-1, 1]$.

□

Teorema 5.2 (Teorema do Ponto fixo de Brouwer [1])**.** *Seja S uma bola unitária fechada no $\mathbb{R}^n, n > 1$. Então qualquer função contínua $f : S \to S$ possui ao menos um ponto fixo.*

Dividiremos a demonstração deste teorema em duas etapas:

Demonstração 5.2.1. *Considere primeiro $\phi : S \to S$ uma função infinitamente diferenciável e suponha por absurdo $\phi(x) \neq x, \forall x \in S$.*
Seja $a = a(x)$ a maior raiz da equação quadrática

$$\|x + a(x - \phi(x))\|^2 = 1 \tag{5.1}$$

isto é

$$1 = \langle x + a(x - \phi(x)), x + a(x - \phi(x))\rangle$$

$$1 = \langle x, x\rangle + 2a\langle x, (x - \phi(x))\rangle + a^2\langle x - \phi(x), x - \phi(x)\rangle$$

$$\|x - \phi(x)\|^2\boldsymbol{a^2} + 2\langle x, (x - \phi(x))\rangle\boldsymbol{a} + (\|x\|^2 - 1) = 0$$

Suas raízes são

$$a(x) = \frac{-2\langle x, (x - \phi(x))\rangle \pm \sqrt{4\langle x, (x - \phi(x))\rangle^2 - 4\|x - \phi(x)\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{2\|x - \phi(x)\|^2}$$

Mostraremos que o discriminante é positivo, para concluir que existe raiz para a equação (5.1) e que a maior raiz desta equação é

$$a(x) = \frac{-2\langle x, (x - \phi(x))\rangle + \sqrt{4\langle x, (x - \phi(x))\rangle^2 - 4\|x - \phi(x)\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{2\|x - \phi(x)\|^2},$$

$$a\|x - \phi(x)\|^2 = \langle x, (\phi(x) - x)\rangle + \sqrt{\langle x, (x - \phi(x))\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - \phi(x)\|^2} \qquad (5.2)$$

De fato, quando $\|x\| < 1$*,* $(1 - \|x\|^2) > 0$

Como ϕ *não possui ponto fixo,* $\|x - \phi(x)\|^2 > 0, \forall x \in S$*. Desta forma o discriminante, quando* $\|x\| < 1$*, será estritamente positivo .*

Se $\|x\| = 1$*, então* $(1 - \|x\|^2) = 0$

Logo o discriminante será

$$\langle x, x - \phi(x)\rangle^2 \geqslant 0.$$

E garantimos a existência de raiz para a equação.

Para que (5.2) seja de fato a maior raiz, é necessário que $\langle x, x - \phi(x)\rangle > 0$*.*
Suponha que

$$\langle x, x - \phi(x)\rangle < 0$$

então

$$\begin{aligned} 1 - \langle x, \phi(x)\rangle &< 0 \\ 1 &< \langle x, \phi(x)\rangle = \|x\|\|\phi(x)\|\cos\theta = \|\phi(x)\|\cos\theta \end{aligned}$$

logo, como $0 < \cos\theta < 1$ *e*

$$1 < \|\phi(x)\| \cos\theta \leqslant \|\phi(x)\|$$

portanto $\|\phi(x)\| > 1$ *o que é uma contradição.*

Assim, $\langle x, x - \phi(x)\rangle \geqslant 0$.

Mostraremos agora que $\langle x, x - \phi(x)\rangle \neq 0$ *para concluir que o discriminante nunca se anula e é portanto estritamente positivo.*

De fato, supondo

$$\langle x, x - \phi(x)\rangle = 0$$

então

$$\langle x, x\rangle - \langle x, \phi(x)\rangle = 0$$

isto é

$$\langle x, \phi(x)\rangle = \|x\|^2$$

$$\langle x, \phi(x)\rangle = 1$$

e portanto segue a igualdade

$$1 = \langle x, \phi(x)\rangle = \|x\| \|\phi(x)\| \cos\theta$$

Como $\|x\| = 1$ *e* $\|\phi(x)\| \leq 1$, *temos*

$$\Rightarrow \|\phi(x)\| \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \|\phi(x)\| = 1 \text{ e } \cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja o ângulo entre os vetores x *e* $\phi(x)$ *seria nulo ou múltiplo de* 2π. *Logo* $\phi(x) = x$, *o que é uma contradição.*

Desta forma,

$$\|x\| = 1 \Rightarrow \langle x, x - \phi(x)\rangle \neq 0.$$

Logo $\langle x, x - \phi(x)\rangle > 0$ *para* $\|x\| \leqslant 1$, *e portanto o discriminante em (5.2) é positivo e nunca se anula.*

Podemos observar ainda que tomando $\|x\| = 1$, *a maior raiz da equação (5.1) será*

$$a\|x - \phi(x)\|^2 = \langle x, (\phi(x) - x)\rangle + \sqrt{\langle x, (x - \phi(x))\rangle^2}$$

Como $\langle x, x - \phi(x)\rangle > 0$ *então*

$$a\|x - \phi(x)\|^2 = \langle x, (\phi(x) - x)\rangle + \langle x, (x - \phi(x))\rangle$$

$$a\|x - \phi(x)\|^2 = \langle x, (\phi(x) - x)\rangle - \langle x, (\phi(x) - x)\rangle$$

$$a\|x - \phi(x)\|^2 = 0$$

$$a(x) = 0$$

Desta forma

$$\|x\| = 1 \Rightarrow a(x) = 0$$

Agora, para cada número real t, *considere*

$$f(t; x) = x + ta(x)(x - \phi(x))$$

Como uma função do tipo $(y)^{1/2}$ *é infinitamente diferenciável em* y *para* $y > 0$ *então* f *é* C^{∞} *em* $n+1$ *variáveis* $(t, x_1, ...x_n)$ *com valores em* S.

Derivando a função $f(t; x)$ *em relação a variável* t *temos*

$$f_t(t; x) = a(x)(x - \phi(x))$$

Como $a(x) = 0$ *para* $\|x\| = 1$, *temos*

$$f(t; x) = x \ , \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$f_t(t; x) = 0 \ , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Também $f(0; x) = x$, $\forall x \in S$ *e pela definição de* $a(x)$ *em (5.1) temos que* $\|f(1; x)\| = 1$ *para todo* $x \in S$.

Denote por $D_0(t;x)$ *o determinante da matriz cujas colunas são os vetores derivadas parciais* $f_{x_1}(t;x),...,f_{x_n}(t;x)$.

$$f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$$

$$(t;x_1,...,x_n)\mapsto(f_1,...,f_n)$$

$$D_0(t;x)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Tomando as derivadas parciais da função $f(t;x)=x+ta(x)(x-\phi(x))$ *em relação a cada uma das variáveis* $(x_1,...,x_n)$ *iremos notar a seguinte construção:*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}^n\\ (t,x_1,...x_n) & \mapsto & (x_1+ta(x)(x_1-\phi_1(x)),x_2+ta(x)(x_2-\phi_2(x)),...,x_n+ta(x)(x_n-\phi_n(x)))\end{array}$$

Derivadas da primeira coordenada da função $f(t;x)$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f_1(t;x)}{\partial x_1} & = & 1+t\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_1}(x_1-\phi_1(x))+ta(x)(1-\dfrac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_1})\\ \dfrac{\partial f_1(t;x)}{\partial x_2} & = & 0+t\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_2}(x_1-\phi_1(x))-ta(x)\dfrac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_2}\\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_1(t;x)}{\partial x_n} & = & 0+t\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_n}(x_1-\phi_1(x))-ta(x)\dfrac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_n}\end{array}$$

Derivadas da segunda coordenada da função $f(t;x)$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f_2(t;x)}{\partial x_1} & = & 0+t\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_1}(x_2-\phi_2(x))-ta(x)\dfrac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f_2(t;x)}{\partial x_2} & = & 1+t\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_2}(x_2-\phi_2(x))+ta(x)(1-\dfrac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_2})\\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_2(t;x)}{\partial x_n} & = & 0+t\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_n}(x_2-\phi_2(x))-ta(x)\dfrac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_n}\\ & \vdots & \end{array}$$

Derivadas da n-ésima coordenada da função $f(t;x)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_n(t;x)}{\partial x_1} &= 0 + t\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}(x_n - \phi_n(x)) - ta(x)\frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_n(t;x)}{\partial x_2} &= 0 + t\frac{\partial a(x)}{\partial x_2}(x_n - \phi_n(x)) - ta(x)\frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial f_n(t;x)}{\partial x_n} &= 1 + t\frac{\partial a(x)}{\partial x_n}(x_n - \phi_n(x)) + ta(x)(1 - \frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x_n})
\end{aligned}$$

Podemos perceber que em $t = 0$ a matriz cujas colunas são os vetores derivadas parciais $f_{x_1}(t;x), ..., f_{x_n}(t;x)$ é a matriz identidade e seu determinante $D_0(0;x)$ será igual a 1.

Considere a integral

$$I(t) = \int_S D_0(t;x)dx_1 \dots dx_n \tag{5.3}$$

É claro que $I(0)$ é o volume de S

$$I(0) = \int_S D_0(0;x)dx_1 \dots dx_n = \int_S 1dx_1 \dots dx_n = V(S)$$

e portanto $I(0) \neq 0$.

Como $f(1;x)$ satisfaz $\|f(1;x)\| = 1$, segue pela proposição 4.1 que o Jacobiano $D_0(1;x)$ é identicamente nulo e portanto $I(1) = 0$.

A contradição desejada será obtida mostrando que $I(t)$ é uma constante, isto é, que $I'(t) = 0$.

Para provar isto, derivamos sob a integral (5.1), (ver [3] pág 225, teorema 31.7)

$$I'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_S D_0(t;x)dx_1 \dots dx_n = \int_S \frac{\partial}{\partial t} D_0(t;x)dx_1 \dots dx_n \tag{5.4}$$

e aplicamos o lema 4.1

$$\frac{\partial}{\partial t}D_0 = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i$$

De onde se conclui que $I'(t)$ é a soma das integrais da forma

$$\pm\int_S \frac{\partial}{\partial x_i}D_i(t;x)dx_1 \dots dx_n,$$

onde $D_i(t;x)$ é o determinante cujas colunas são os vetores

$$f_t(t;x), f_{x_1}(t;x), ..., f_{x_{i-1}}(t;x), f_{x_{i+1}}(t;x), ..., f_{x_n}(t;x).$$

Seja S_i a esfera unitária no espaço de variáveis $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$.

Sejam x_i^+ a raiz positiva $\sqrt{1-(x_1^2+...+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+...+x_n^2)}$, e x_i^- a raiz negativa correspondente.

Sejam p_i^+ o ponto cuja j-ésima coordenada é x_j se $j \neq i$ e x_i^+ se $j = i$, e p_i^- o ponto cuja j-ésima coordenada é x_j se $j \neq i$ e x_i^- se $j = i$.

$$p_i^+ = (x_1, ..., x_{i-1}, \sqrt{1-(x_1^2+...+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+...+x_n^2)}, x_{i+1}, ...x_n)$$
$$p_i^- = (x_1, ..., x_{i-1}, -\sqrt{1-(x_1^2+...+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+...+x_n^2)}, x_{i+1}, ...x_n)$$

daí

$$\pm\int_{S_i}\int_{p_i^-}^{p_i^+}\frac{\partial}{\partial x_i}D_i(t;x)dx_1\dots dx_n,$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, $I'(t)$ será a soma das integrais da forma

$$\pm\int_{S_i}D_i(t;p_i^+)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \mp \int_{S_i}D_i(t;p_i^-)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n.$$

Mas $\|p_i^+\| = \|p_i^-\| = 1$ e como $f_t(t;x) = 0$ para $\|x\| = 1$, segue da definição de D_i que o resultado destas integrais é zero, isto é, $I'(t) = 0$. O que contradiz a hipótese de que $\phi(x) \neq x, \forall x \in S$.

O teorema 5.2 fica então provado para funções infinitamente diferenciáveis.
Logo toda função de classe C^∞ $\phi : S \to S$, possui ao menos um PONTO FIXO.

Agora, com base no teorema de aproximação de Weierstrass, mostraremos que o teorema 5.2 vale para toda função contínua $\phi : S \to S$.

Demonstração 5.2.2. *Segue pelo teorema de aproximação de Weiertrass que toda função contínua $\phi : S \to S$ é o limite uniforme de $\{\phi_k\}$ sequência de funções de classe C^∞ onde*

$\phi_k : S \to S$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.*(Ver corolário 4.3.1)*

Seja $\{\phi_k\}$ *uma sequência de funções de classe* C^∞, *onde* $\phi_k : S \to S$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$, *convergindo uniformemente para* ϕ *em* S, *isto é,*
dado $\epsilon > 0$ *existe* $k_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall k > k_1$, *temos* $\quad \|\phi_k(x) - \phi(x)\| < \epsilon, \quad \forall x \in S$.

Como $\phi_k : S \to S$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$ *são todas de classe* C^∞, *segue pela primeira etapa da prova que cada* $\phi_k(x)$ *possui ao menos um ponto fixo, desta forma, para cada* $k \in \mathbb{N}$, *existe* $y_k \in S$ *tal que* $\phi_k(y_k) = y_k$.

Assim se $k > k_1$, *temos, em particular,* $\quad \|\phi_k(\boldsymbol{y_k}) - \phi(\boldsymbol{y_k})\| = \|\boldsymbol{y_k} - \phi(\boldsymbol{y_k})\| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Por outro lado, como S *é compacto, segue por definição de compacidade, que existe uma subsequência de* $\{y_k\}$, *que ainda denotaremos por* $\{y_k\}$, *e* $y_0 \in S$ *tal que* $\{y_k\}$ *converge para* y_0, *isto é, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $k_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall k > k_2, \quad \|y_k - y_0\| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Como ϕ *é contínua em* S, *então* $\phi(\boldsymbol{y_k})$ *converge para* $\phi(\boldsymbol{y_0})$, *isto é, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $k_3 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall k > k_3, \quad \|\phi(y_k) - \phi(y_0)\| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Considere $k_0 = max\,\{k_1, k_2, k_3\}$.

Se $k > k_0$, *então*

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \|\phi(y_0) - y_0\| &= \|\phi(y_0) - \phi(y_k) + \phi(y_k) - \phi_k(y_k) + \phi_k(y_k) - y_0\| \\
&\leqslant \|\phi(y_0) - \phi(y_k)\| + \|\phi(y_k) - \phi_k(y_k)\| + \|\phi_k(y_k) - y_0\| \\
&= \|\phi(y_0) - \phi(y_k)\| + \|\phi(y_k) - y_k\| + \|y_k - y_0\| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon > 0$ *é arbitrário, e* $0 \leqslant \|\phi(y_0) - y_0\| < \epsilon$, *então*

$\phi(y_0) = y_0$

Isso mostra que toda função contínua $\phi : S \to S$ tem ao menos um ponto fixo.

A demonstração do teorema (5.2) se restringe a uma bola unitária fechada S no $\mathbb{R}^n, n > 1$. Mas de fato podemos generaliza-la para uma bola fechada de raio R.

Corolário 5.2.1. *Seja $\overline{B_R}(0)$ a bola fechada de centro 0 e raio R. Se $\phi : \overline{B_R}(0) \to \overline{B_R}(0)$ for contínua, então ϕ admite ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $\overline{B_1}(0)$ a bola unitária fechada centrada na origem, e $\overline{B_R}(0)$ a bola fechada de raio $R > 0$ centrada na origem.

Seja $\alpha : \overline{B_R}(0) \to \overline{B_1}(0)$ uma função contínua e sobrejetiva tal que

$$x \mapsto \frac{1}{R}x$$

Considere a função contínua $\phi : \overline{B_R}(0) \to \overline{B_R}(0)$

Então, se definirmos

$$\begin{aligned} \gamma : \overline{B_1}(0) &\to \overline{B_1}(0) \\ x &\mapsto \frac{1}{R}\phi(Rx) \end{aligned}$$

Observamos que γ é contínua, e além disso,

$$\|\gamma(x)\| = \|\frac{1}{R}\phi(Rx)\| = \frac{1}{R}\|\phi(Rx)\| \leqslant 1$$

Assim, pelo teorema (5.2), existe $x_0 \in \overline{B_1}(0)$ tal que

$$\begin{aligned}
\gamma(x_0) &= x_0 \\
\frac{1}{R}\phi(Rx_0) &= x_0 \\
\phi(Rx_0) &= Rx_0
\end{aligned}$$

$\square$

Logo para toda função contínua ϕ que leva uma bola fechada de raio R centrada na origem nela mesma, existe ponto fixo.

Podemos da mesma forma estender este resultado para bola fechada de raio R centrada em x_0.

Corolário 5.2.2. *Seja $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer e $\overline{B_R}(x_0)$ a bola fechada com centro em x_0 e raio R. Se $\phi : \overline{B_R}(x_0) \to \overline{B_R}(x_0)$ for contínua, então ϕ admite ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $\overline{B_R}(0)$ a bola fechada de raio R centrada na origem, e $\overline{B_R}(x_0)$ a bola fechada de raio R centrada em x_0.
Definimos agora, as funções α, β e γ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\alpha : \overline{B_R}(x_0) &\to \overline{B_R}(0) \\
x &\mapsto x - x_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta : \overline{B_R}(0) &\to \overline{B_R}(x_0) \\
x &\mapsto x + x_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma : \overline{B_R}(0) &\to \overline{B_R}(0) \\
x &\mapsto \phi(x + x_0) - x_0
\end{aligned}$$

onde $\phi : \overline{B_R}(x_0) \to \overline{B_R}(x_0)$ é contínua.

Como γ é uma função contínua, segue pelo corolário 5.2.1 que existe $y \in \overline{B_R}(0)$ tal que $\gamma(y) = y$, daí

$$\begin{aligned} \phi(y + x_0) - x_0 &= y \\ \phi(y + x_0) &= y + x_0 \end{aligned}$$

$\square$

Logo, toda função contínua $\phi : \overline{B_R}(x_0) \to \overline{B_R}(x_0)$ possui ao menos um PONTO FIXO.

6 Observações

1) Em [1], Dunford-Schwartz restringem sua atenção ao Espaço Euclidiano Real, observando que o caso de escalares complexos é uma consequência do caso de escalares reais, o que segue do fato do espaço complexo ser isométrico ao espaço natural, e as esferas neste espaços corresponderem de forma natural.

2) Uma outra prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é dada por Graves [2;p.149] utilizando um mínimo da teoria de homologia.

3) Em "Conceitos Preliminares" buscamos reunir alguns pré-requisitos para melhor compreensão das demonstrações dos teoremas. Sendo o lema 4.1 enunciado, de fundamental importância para a prova do Teorema de Brouwer.

4) As demonstrações dadas para o teorema na reta real tem o objetivo de ilustrar e motivar a prova do teorema central deste trabalho, dada por Dundord-Schwartz.

5) O teorema de Weierstrass nos mostra que é suficiente considerar o caso em que ϕ é infinitamente diferenciável.

Referências

[1] Dunford, N. and Schwartz, J., *Linear Operators*, Edited by R. Courant. L. Bers. J.J.Stoker, Pure and Applied Mathematics. A serie of texts and monographs - volume VII.

[2] Lima, Elon Lage, *Análise real volume 1. Funções de uma variável*, IMPA, 2010.

[3] Robert G. Bartle, *Elementos de análise real*, Editora Campus Ltda, 1983.