Análise de Modelos de Seleção de Carteiras de Investimento*

PATRICIA REIS MARTINS† CARLOS FREDERICO VASCONCELLOS‡
PATRÍCIA NUNES DA SILVA§

Resumo

Nesse trabalho, analisamos e detalhamos matematicamente o problema de maximização da utilidade esperada associado a modelos de seleção de carteiras eficientes. Mais precisamente, apresentamos o modelo clássico de seleção de carteiras proposto por Markowitz (1952) e o modelo proposto por Athayde e Flores (2004).

1 Introdução

Um dos problemas fundamentais em finanças é a seleção de carteiras de investimento. Desde o trabalho pioneiro de Markowitz (1952), a seleção de carteiras é feita levando-se em conta os dois primeiros momentos das distribuições dos retornos: a média e a variância.

O modelo de Markowitz é um modelo matemático cujo objetivo é determinar a participação de cada um dos títulos que compõe uma carteira de investimentos a fim de proporcionar ao investidor o maior retorno possível, minimizando o risco destes investimentos.

De acordo com Athayde e Flores (2004), desde Mandelbrot (1963), os economistas já sabem que a distribuição dos retornos de um ativo raramente segue o padrão de uma distribuição normal. Considerar apenas os dois primeiros momentos no modelo não leva em conta este fato. Nesse sentido, desprezar momentos de ordem superior não permite obter uma boa aproximação para a utilidade esperada. A despeito da vasta literatura apontando para esse fato através de levantamento de dados empíricos, há uma resistência na incorporação

* *Palavras chave:* Seleção de Carteiras, Momentos de ordem superior
† Mestrado em Ciências Computacionais, IME-UERJ, patriciarm75@yahoo.com.br
‡ Pesquisador Visitante IME-UERJ com bolsa FAPERJ, cfredvasc@ime.uerj.br
§ Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, nunes@ime.uerj.br

de momentos de ordem superior em modelos teóricos. Os modelos de seleção de carteiras ainda são predominantemente influenciados pela perspectiva de Markowitz (1952).

Sob o ponto de vista matemático a abordagem de Markowitz para a otimização de carteiras é um problema de Pesquisa Operacional, especificamente um problema de Otimização Quadrática. Ao considerarmos momentos de ordem mais alta, continuaremos a maximizar a utilidade esperada, incorporando agora o terceiro momento central, que corresponde à assimetria do retorno da carteira em relação ao seu primeiro momento.

Athayde e Flores (2004) propõem um modelo para escolha de uma carteira eficiente considerando n ativos com risco e um ativo livre de risco, permitindo vendas a descoberto e levando em conta os três primeiros momentos. A análise matemática rigorosa desse modelo pode contribuir para fortalecimento das bases teóricas dessa necessária incorporação de momentos de ordem superior na utilidade esperada.

O objetivo central desse projeto de pesquisa é precisar matematicamente o uso de teoremas de ponto fixo na solução do problema de maximização da utilidade esperada associado a modelos de seleção de carteiras eficientes. Mais precisamente, queremos analisar o modelo proposto por Athayde e Flores (2004) para determinar carteiras eficientes para n ativos com risco e um livre de risco quando são considerados os três primeiros momentos.

O problema analisado no presente trabalho tem um caráter multidisciplinar e está intimamente relacionado ao trabalho desenvolvido anteriormente por Martins, de conclusão do curso de bacharelado em Matemática *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*.

A análise do modelo de determinação de carteiras eficientes que incorpora momentos de ordem superior será feita através de levantamento e estudo de literatura especializada bem como de detalhamento matemático rigoroso do modelo.

2 Conceitos Preliminares

Nesta seçã, vamos precisar de alguns conceitos elementares e de resultados de matemática e probabilidade tais como: valor esperado, média e variância.

2.1 Conceitos e resultados de estatística

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção foram retirados de [14].

Suponha que para cada ponto de um espaço amostral atribuímos um número. Temos, então, uma função definida no espaço amostral. Esta função é chamada de variável aleatória (ou variável estocástica) ou mais precisamente uma função aleatória (função estocástica).

Definição 1 (Variável Aleatória)**.** *Para um dado espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathscr{A}, P[\cdot])$*, uma variável aleatória, denotada por* X *ou* $X(\cdot)$*, é uma função com domínio* Ω *e contradomínio* $\mathbb{R}$*. A função* $X(\cdot)$ *deve ser tal que o conjunto* A_r *definido por* $A_r = \{\omega : X(\omega) \leqslant r\}$ *pertence a* $\mathscr{A}$ *para cada número real* r*.*

O valor esperado ou expectativa de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Ele representa o valor médio esperado de uma experiência se ela for repetida muita vezes.

Definição 2 (Valor Esperado)**.** *Para uma variável discreta* X *com valores possíveis* $x_1, x_2, ...$ *e com suas probabilidades representadas pela função* $p(x_i)$*, o valor esperado é calculado por*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Teorema 2.1. *Sejam* X*,* Y *variáveis aleatórias,* α, β *constantes. As seguintes propriedades de valor esperado são verificadas:*

$$\begin{aligned}
&E[\alpha] = \alpha \\
&E[\alpha X] = \alpha E[X] \\
&E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \\
&E[X] \leqslant E[Y] \quad se \quad X \leqslant Y
\end{aligned}$$

Os momentos de uma variável aleatória ou de uma distribuição são os valores esperados das potências da variável aleatória que tem a distribuição dada.

Definição 3 (Momentos)**.** *Se X é uma variável aleatória, o $i-$ésimo momento de X, denotado por μ_i', é definido como*

$$\mu_i' = E[X^i]$$

se o valor esperado existe.

Desta forma para $i = 1$, $\mu_1' = E[X] = \mu_X$, a média de X.

Definição 4 (Momentos Centrais)**.** *Se X é uma variável aleatória, o $i-$ésimo momento central de X sobre a é definido como $E[(X-a)^i]$. Se $a = \mu_X$, temos o $i-$ésimo momento central de X sobre μ_X, denotado por $\mu_i = E[(X-\mu_X)^i]$*

A variância, o segundo momento central de X sobre sua média μ_X, será calculada por

$$\mu_2 = E[(X-\mu_X)^2]$$

Agora, seja Y uma variável aleatória e suponha que Y pode assumir um número finito de valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Seja p_1 a probabilidade de que $Y = y_1$, p_2 a probabilidade de que $Y = y_2$, etc. O valor esperado (ou média) de Y será definida por

$$E[Y] = p_1y_1 + p_2y_2 + \cdots + p_ny_n$$

Neste caso, a variância de Y é definida como

$$var(Y) = p_1(y_1 - E)^2 + p_2(y_2 - E)^2 + \cdots + p_n(y_n - E)^2.$$

Onde $var(Y)$ é o desvio médio de Y, ao quadrado, a partir do seu valor esperado. A variância é uma medida de dispersão comumente utilizada.

Suponha que temos n de variáveis aleatórias: $X_1, \ldots, X_n$. Se R é uma soma ponderada (combinação linear) dos X_i

$$R = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \cdots + \alpha_nX_n \tag{2.1}$$

então R também é uma variável aleatória.

Seria importante saber como o valor esperado e a variância da soma ponderada estão relacionados com a distribuição de probabilidade de $X_1, \ldots, X_n$.

O valor esperado de uma soma ponderada é a soma ponderada dos valores esperados. Isto é

$$E(R) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \cdots + \alpha_n E(X_n) \qquad (2.2)$$

Mas a variância da soma ponderada não é tão simples. Para expressá-la precisamos primeiro definir "covariância".

A covariância entre X_i e X_j é um momento de primeira ordem das variáveis aleatórias X_i e X_j centrados nas respectivas médias. Essa é uma medida do grau de interdependência numérica entre as variáveis aleatórias, e é definida por

$$cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

Por outro lado a variância de R, ou seja, de uma soma ponderada, por definição será

$$var(R) = E[(R - E(R))^2]$$

Substituindo-se (2.1) e (2.2) na equação anterior teremos

$$var(R) = E[(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n - (\alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \cdots + \alpha_n E(X_n)))^2]$$

ou seja

$$var(R) = E[((\alpha_1 X_1 - \alpha_1 E[X_1]) + (\alpha_2 X_2 - \alpha_2 E[X_2]) + \cdots + (\alpha_n X_n - \alpha_n E[X_n]))^2]$$

Desenvolvendo a equação teremos

$$\begin{aligned} var(R) &= E[\alpha_1(X_1 - E[X_1])^2 + \cdots + \alpha_n(X_n - E[X_n])^2 + 2\alpha_1\alpha_n(X_1 - E[X_1])(X_n - E[X_n]) + \cdots + \\ &\quad 2\alpha_{n-1}\alpha_n(x_{n-1} - E[x_{n-1}])(x_n - E[x_n])] \end{aligned}$$

onde $E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$ é por definição a covariância entre as variáveis X_i e X_j.

Desta forma a variância de R será

$$var(R) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i>j}^{n} \alpha_i\alpha_j cov(X_i, X_j)$$

Se usarmos o fato de que a variância de X_i é $cov(X_i, X_i)$ então a variância da variável aleatória R é calculada por

$$var(R) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j cov(X_i, X_j)$$

3 Seleção de uma carteira de investimentos

A teoria moderna de portfólio foi construída com base na idéia do *Homo Economicus*, conceito segundo o qual o homem é um ser racional, perfeitamente informado e centrado em si próprio, para o qual as decisões pressupõe a maximização da utilidade esperada e as expectativas racionais, ou seja, um ser idealizado, que frequentemente é utilizado em teorias econômicas.

Através da teoria moderna de portfólio busca-se explicar como o principio da diversificação será utilizado pelo investidor racional na otimização de sua carteira de investimentos. Desta forma os modelos econômico-financeiros clássicos partem do princípio de que todos os agentes são racionais, desejam riqueza e tem a capacidade tomar decisões com esta perspectiva, segundo a teoria da utilidade esperada.

3.1 A seleção ótima segundo Markowitz

A solução para o problema de escolha de uma carteira de investimentos foi proposta por Harry Max Markowitz[1] em 1952 e, desde então é fonte de pesquisa e base de estudos em

[1] prêmio Nobel de Ciências Econômicas- 1990

diversos trabalhos na área econômico-financeira.

Segundo Markowitz, o processo de seleção de uma carteira de investimentos pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa começa com a observação e experiência, e termina com as crenças sobre futuras performances de títulos disponíveis. A segunda etapa começa com as crenças relevantes sobre futuras performances e termina com a escolha da carteira. Em seu artigo, Portfolio Selection [5], Markowitz se preocupa basicamente com a escolha de uma carteira de investimentos, tendo em vista o comportamento e sobretudo a crença no desempenho futuro dos títulos disponíveis.

Em [5], Markowitz evita afirmações matemáticas complicadas e provas. Como consequência um preço é pago em termos de rigor e generalidade, no entanto há o benefício da compreensão de sua interpretação geométrica.

As principais limitações a partir disto são:

(1) seus resultados não são derivados analiticamente para o caso n-títulos; em vez disso ele nos mostra geometricamente os casos de 3 e 4 títulos;

(2) Assume-se crenças de probabilidade estática. Numa apresentação geral deverá ser considerado que a distribuição de probabilidade de rendimento dos vários títulos é uma função do tempo.

Para Markowitz, a escolha de uma carteira de investimentos está relacionada diretamente a dois fatores importantes: o risco e o retorno. Desta forma para modelar um problema de escolha ótima da carteira deveríamos levar em conta estes dois fatores. Onde o retorno da carteira é a média dos retornos esperados dos ativos e seu risco é mensurado pelo grau de volatilidade associado aos retornos esperados. Neste contexto, o risco é tido como o desvio dos resultados esperados em relação à média do valor esperado, e está representado pela variância da carteira, que é uma medida de dispersão ligada ao grau de incerteza associado ao investimento.

3.1.1 Por que não apenas maximizar o retorno?

A prática da diversificação se mostra útil e sensata; e uma regra de comportamento que não implique na diversificação como melhor escolha, não pode ser considerada como a melhor forma de se guiar o comportamento do investidor. Se o investidor apenas maximiza o retorno, ignorando-se as imperfeições do mercado, não há qualquer implicação de que exista uma carteira diversificada que seja preferível a todas as outras não diversificadas. Se dois ou mais títulos tem o mesmo valor, então qualquer um desses ou qualquer combinação deles seria uma boa opção de investimento, não importando como os retorno são formados ou como são decididas suas taxas de desconto.

Caso dinâmico

Podemos ver isso analiticamente: suponha que há n títulos; sejam

- r_{it} o retorno esperado no tempo t por dólar investido no título i;
- d_{it} a taxa na qual o retorno do i-ésimo título no tempo t é descontado de volta ao presente;
- α_i a quantidade relativa investida no título i.

Então o retorno antecipado descontado da carteira é

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} d_{it} r_{it} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right)$$

Note que $R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it}$ é o retorno descontado do i-ésimo título, portanto $R = \sum \alpha_i R_i$, onde R_i independe de α_i. Como $\alpha_i \geqslant 0, \forall i$ e $\sum \alpha_i = 1$, R é uma média ponderada de R_i com pesos α_i. Para maximizar o retorno R , tomamos $\alpha_i = 1$ para i com máximo R_i, ou seja, alocamos todo o capital no ativo que nos confere o maior retorno.

Se vários R_{i_j}, $j = 1, ..., K$ são máximos, então qualquer alocação que utilize como pesos uma combinação linear convexa, ou seja $\sum_{j=1}^{K} \alpha_{i_j} = 1$, maximiza R. Logo nenhuma carteira de investimentos diversificada será preferível a qualquer outra não diversificada.

Caso estático

Neste ponto será conveniente considerar um modelo estático. Em vez de falar da série histórica dos retornos nos i-ésimos títulos $(r_{i1}, r_{i2}, ..., r_{in}, ...)$ vamos falar do fluxo de retorno R_i, dos i-ésimo título. O fluxo de retornos da carteira como um todo é

$$R = \sum \alpha_i r_i$$

Como no caso dinâmico, se o investidor quisesse maximizar o retorno esperado da carteira, ele iria colocar todos os seus fundos no título com retorno antecipado máximo.

3.1.2 Por que diversificar?

Há uma regra que determina que o investidor deve tanto maximizar o retorno como diversificar a carteira de investimentos. A regra estabelece que o investidor deveria diversificar seus fundos entre todos os títulos que conferem retorno esperado máximo. Assim a lei dos grandes números irá assegurar que o rendimento real de sua carteira será quase o mesmo que o rendimento esperado. Assume-se que exista uma carteira que dá o máximo retorno e a variância mínima, sendo esta a melhor opção para o investidor.

As chances de se obter resultados melhores ou piores em um investimento depende do grau de variabilidade dos retornos esperados. O risco pode ser considerado como a chance de que ocorra perda ou ganho na aplicação em cada ativo e o nível de risco pode ser determinado pela comparação do risco de um ativo com o de outro.

A carteira de investimentos com retorno esperado máximo não é necessariamente aquela com variância mínima. Nota-se que a regra dos retornos esperados ou retornos antecipados é inadequada.

Desta forma verifica-se que, na escolha de uma carteira ótima, o risco deverá ser considerado, e a regra de retornos esperados-variância dos retornos $(E-V)$, proposta por Markowitz na construção de uma configuração eficiente de uma carteira de investimentos, se apresenta promissora. Vamos então mostrar algumas implicações desta regra, onde serão utilizados alguns conceitos elementares e resultados de estatística.

3.1.3 O modelo

Seja n o número de títulos disponíveis, seja X_i o retorno do i-ésimo título, seja $E[X_i]$ o valor esperado de X_i e $cov[X_i, X_j]$ a covariância entre os retornos X_i e X_j; desta forma $cov[X_i, X_i]$ é a variância de X_i.

Seja α_i o percentual de ações do investidor que estão alocados no i-ésimo título. O rendimento ϕ da carteira de investimentos como um todo é tida como

$$\phi = \sum \alpha_i X_i$$

Os X_i, e consequentemente ϕ, são considerados variáveis aleatórias.

Os α_i não são variáveis aleatórias, mas são fixadas pelo investidor, e representam a distribuição do capital a ser investido entre os ativos disponíveis. Logo os α_i são frações do investimento, e temos que $\sum \alpha_i = 1$. Como Markowitz [5] não considerou vendas a descoberto, temos $\alpha_i \geqslant 0$ para todo i.

O retorno ϕ da carteira como um todo é uma soma ponderada de variáveis aleatórias. Os pesos α_i serão escolhidos de forma a proporcionar o melhor retorno possível. O retorno esperado E da carteira como um todo será definido por

$$E[\phi] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[X_i] \tag{3.3}$$

e a variância é

$$var[\phi] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov[X_i, X_j] \alpha_i \alpha_j \tag{3.4}$$

Para crenças de probabilidade fixadas $(E[X_i], cov[X_i, X_j])$ o investidor tem a opção de várias combinações de $E[\phi]$ e $var[\phi]$ em função da sua escolha de carteiras $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Suponha que o conjunto de todas as combinações possíveis (E, var) sejam como na Figura 1.

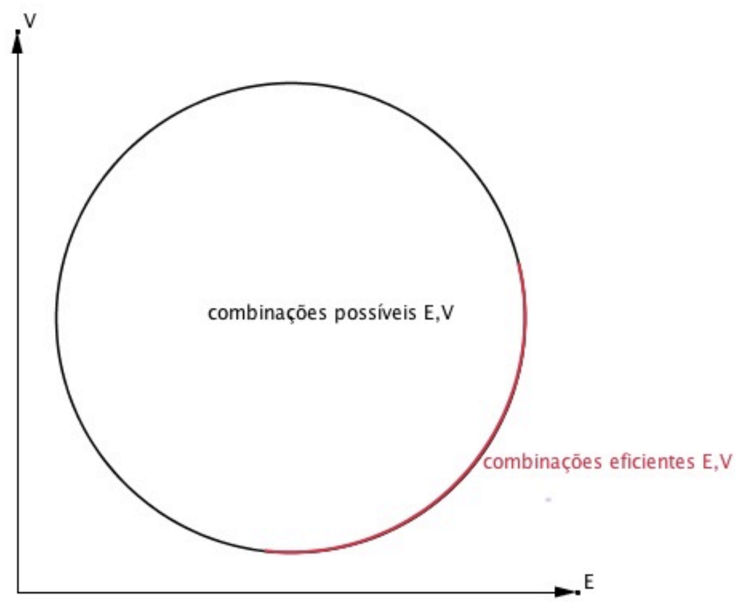

Figura 1: Combinações possíveis

A regra $E - V$ estabelece que o investidor poderia (ou deveria) querer selecionar uma dessas carteiras que dão origem às combinações $(E[\phi], var[\phi])$ indicadas como eficientes na figura; isto é aquelas com $var[\phi]$ mínima para um dado $E[\phi]$, e $E[\phi]$ máximo para uma dada $var[\phi]$.

A satisfação máxima do investidor está diretamente relacionada ao retorno e ao risco que a carteira de investimentos como um todo pode oferecer. Supondo que o investidor busca maximizar o retorno de sua carteira a certo risco aceitável, ou minimizar o risco para um retorno desejado estabelecido, carteiras de investimento que apresentam este perfil são ditas carteiras eficientes.

Definição 5. *Uma carteira admissível α^* (média-variância) é chamada eficiente se não existir nenhuma carteira admissível α com*

$$E[\phi(\alpha)] \geqslant E[\phi(\alpha^*)], \qquad var[\phi(\alpha)] < var[\phi(\alpha^*)]$$

Esta definição nos diz que não há como superar o retorno de uma carteira eficiente sem correr maior risco.

Como determinar carteiras eficientes

Iremos mostrar como Markowitz ilustra geometricamente a natureza da superfície eficiente para casos em que n, o número de títulos disponíveis, é pequeno.

O cálculo de superfícies eficientes pode, eventualmente, ser de uso prático.Talvez existam maneiras, através da combinação de técnicas estatísticas e o julgamento de especialistas, para formar crenças razoáveis de probabilidade $(E[X_i], cov[X_i, X_j])$. E então, poderíamos usar essas crenças para calcular as combinações eficientes possíveis de $(E[\phi], var[\phi])$. O investidor, estando informado de quais combinações $(E[\phi], var[\phi])$ são possíveis, poderia realizar uma escolha conforme seu perfil. Sendo possível então encontrar a carteira de investimentos dada por essa combinação desejada.

Neste contexto, ao menos duas condições devem antes ser satisfeitas. Primeiro, o investidor tem o desejo de agir de acordo com o modelo $E - V$. Segundo, temos que ser capazes de chegar a razoáveis $E[X_i]$ e $cov[X_i, X_j]$. Essas questões poderão ser levantadas em um outro momento.

Caso de três ativos

Considerando o caso de três ativos disponíveis, ou seja, $n = 3$, e tomando $E[X_i] = R_i$, o modelo Média-Variância proposto por Markowitz se reduz a

$$E[\phi] = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i R_i \tag{3.5}$$

$$var[\phi] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i \alpha_j cov[X_i, X_j] \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1 \tag{3.7}$$

$$\alpha_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \tag{3.8}$$

De (3.7) obtemos

$$\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \tag{3.9}$$

Substituindo (3.9) nas equações (3.5) e (3.6) obtêm-se $E[\phi]$ e $var[\phi]$ como funções de α_1 e α_2.

Por exemplo é possível encontrar

$$E[\phi] = R_3 + \alpha_1(R_1 - R_3) + \alpha_2(R_2 - R_3) \tag{3.10}$$

Não se preocupando com a precisão das fórmulas pode-se simplesmente escrever.

$$\begin{array}{ll} (a) & E[\phi] = E(\alpha_1, \alpha_2) \\ (b) & var[\phi] = V(\alpha_1, \alpha_2) \\ (c) & \alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, \qquad 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \geqslant 0 \end{array}$$

O conjunto possível de carteiras consiste de todas as carteiras que satisfazem as condições (c) e (3.9) (ou equivalentemente (3.7) e (3.8)). A condição de não negatividade em (c) exige que trabalhemos no primeiro quadrante do plano $\alpha_1\alpha_2$. As condições possíveis de α_1, α_2 são representadas por um triângulo $\overline{abc}$ na Figura 2.

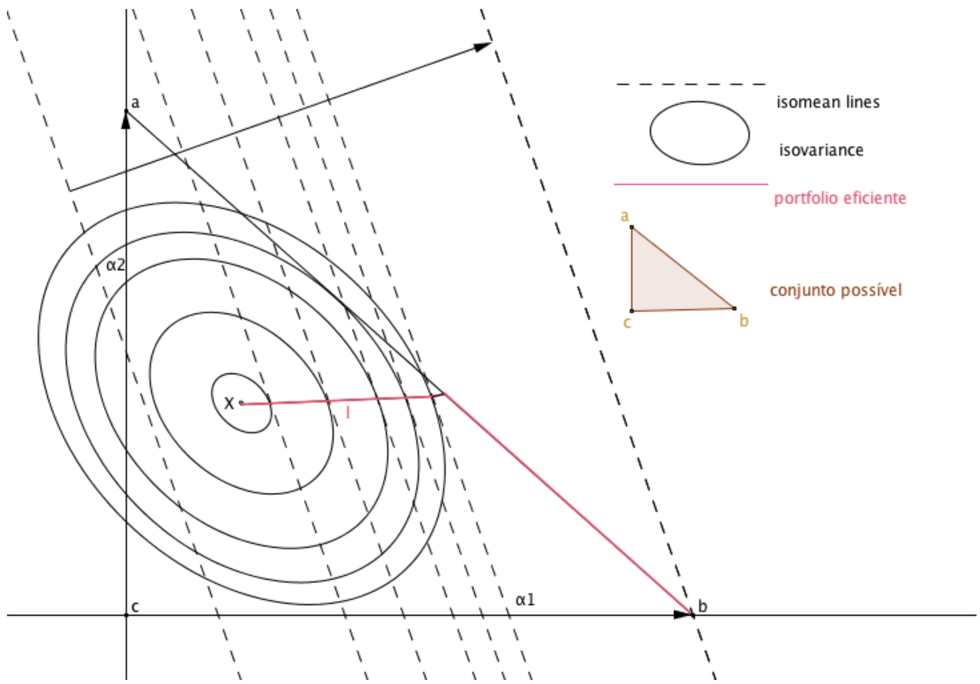

Figura 2: Fronteira Eficiente

Definimos uma ISOMEAN como sendo o conjunto de todos os pontos (portfólios) com um dado retorno esperado. Similarmente uma linha ISOVARIANCE é definida como sendo o conjunto de todos os pontos (portfólios) com uma dada variância de retorno.

Um exame das fórmulas para $E[\phi]$ e $var[\phi]$ nos mostra a forma da curva ISOMEAN e ISOVARIANCE. Elas nos dizem especificamente que normalmente as curvas ISOMEAN são um sistema de retas paralelas; as curvas ISOVARIANCE são um sistema de elipses concêntricas (veja fig 2). Por exemplo se $R_2 \neq R_3$ a equação (3.10) pode ser escrita na forma familiar $\alpha_2 = a + b\alpha_1$; especificamente

$$\alpha_2 = \frac{E - R_3}{R_2 - R_3} - \frac{R_1 - R_3}{R_2 - R_3}\alpha_1$$

Assim o declive da linha ISOMEAN associada com $E[\phi] = E_0$ é $-\frac{(R_1-R_3)}{(R_2-R_3)}$ sua interseção é $\frac{(E_0-R_3)}{(R_2-R_3)}$. Se mudarmos E mudamos a interseção mas não a declividade da linha ISOMEAN. Isso confirma a tese de que as linhas ISOMEAN formam um sistema de linha paralelas.

Do mesmo modo, por uma aplicação de geometria analítica, podemos confirmar a tese de que as linhas ISOVARIANCE formam uma família de elipses concêntricas.

$$\begin{aligned} var &= \alpha_1^2(cov[x_1,x_1] - 2cov[x_1,x_3] + cov[x_3,x_3]) + \\ &\quad \alpha_2^2(cov[x_2,x_2] - 2cov[x_2,x_3] + cov[x_3,x_3]) + \\ &\quad 2\alpha_1\alpha_2(cov[x_1,x_2] - cov[x_1,x_3] - cov[x_2,x_3] + cov[x_3,x_3]) + \\ &\quad 2\alpha_1(cov[x_1,x_3] - cov[x_3,x_3]) + 2\alpha_2(cov[x_2,x_3] - cov[x_3,x_3]) + \\ &\quad cov[x_3,x_3] \end{aligned}$$

O "centro" do sistema de elipses é o ponto que minimiza $var[\phi]$. Vamos denotar este ponto por $\mathbf{X}$. Seu retorno esperado e variância vamos denotar $\mathbf{E}$ e $\mathbf{V}$. A variância aumenta a medida que você se afasta de $\mathbf{X}$. Mais precisamente, se uma curva ISOVARIANCE, C_1, está mais perto de $\mathbf{X}$ que outra, C_2, então C_1 é associada a uma variância inferior a C_2.

Com o auxílio do aparato geométrico exposto vamos buscar os conjuntos eficientes.

Conjunto eficiente

O ponto $\mathbf{X}$, centro do sistema de elipses ISOVARIANCE, pode cair dentro ou fora do conjunto possível. A Figura 2 ilustra um caso em que $\mathbf{X}$ pertence ao conjunto possível. Neste caso: $\mathbf{X}$ é eficiente. Para nenhuma outra carteira $var[\phi]$ é tão pequena como em $\mathbf{X}$; portanto nenhuma carteira pode ter menor $var[\phi]$ com o mesmo ou maior $E[\phi]$, ou maior $E[\phi]$ com a mesma ou menor $var[\phi]$. Nenhum ponto (portfólio) com retorno esperado $E[\phi]$ menor que $\mathbf{E}$ é eficiente. Pois temos $\mathbf{E} > E$ e $\mathbf{V} < V$.

Considerando todos os pontos com um dado retorno esperado $\mathbf{E}$, isto é, todos os pontos na linha ISOMEAN associada com $\mathbf{E}$, o ponto da linha ISOMEAN em que V assume o seu valor mínimo, é o ponto no qual a linha ISOMEAN é tangente a uma curva ISOVARIANCE. Chamamos este ponto $\hat{X}(E)$. Se deixarmos E variar, $\hat{X}(E)$ traça uma curva.

Considerações algébricas aqui omitidas mostram que essa curva é uma linha reta. Vamos chamá-la de linha crítica l. A linha crítica passa por $\mathbf{X}$, e para este ponto minimiza V em todos os pontos com $E(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{E}$.

A medida que avançamos l em qualquer direção a partir de $\mathbf{X}$, $var[\phi]$ aumenta. O segmento da linha crítica, de $\mathbf{X}$ ao ponto d onde a linha crítica cruza a fronteira do conjunto possível é parte do conjunto eficiente. O resto do conjunto eficiente é o segmento da linha $\overline{ab}$ de d a b. b é o ponto de máximo E possível. Na Figura 3, $\mathbf{X}$ está fora da área admissível, mas a linha crítica corta a área admissível. A linha eficiente começa no ponto possível com variância mínima (neste caso na linha $\overline{ab}$). Ela se move na direção de b até que cruzam a linha crítica, move-se ao longo da linha crítica até interceptar uma fronteira e finalmente, move-se ao longo da fronteira para b. Outros casos poderão ser construídos: (1) $\mathbf{X}$ encontra-se fora do conjunto possível e a linha crítica não corta o conjunto possível. Neste caso existe um ativo que não entra em nenhuma carteira eficiente. (2) Dois ativos tem o mesmo R_i, neste caso as linha ISOMEAN são paralelas a um dos segmentos da fronteira. Pode acontecer que uma carteira eficiente com o $E[\phi]$ máximo seja uma carteira diversificada. (3) Um caso em que apenas uma carteira é eficiente.

O conjunto eficiente no caso de 4 ativos é, como no caso de 3 ativos e também no caso n ativos, uma série de segmentos conectados. Numa das extremidades do conjunto eficiente estão o ponto de variância mínima; na outra extremidade está um ponto de retorno esperado máximo.

Várias razões recomendam o uso da regra retorno esperado-variância do retorno na escolha de uma carteira eficiente. Markowitz foi pioneiro na apresentação de um modelo matemático para esta escolha, dando origem a Teoria Moderna de Portfólio e abrindo frentes para uma série de novas pesquisas nesta direção.

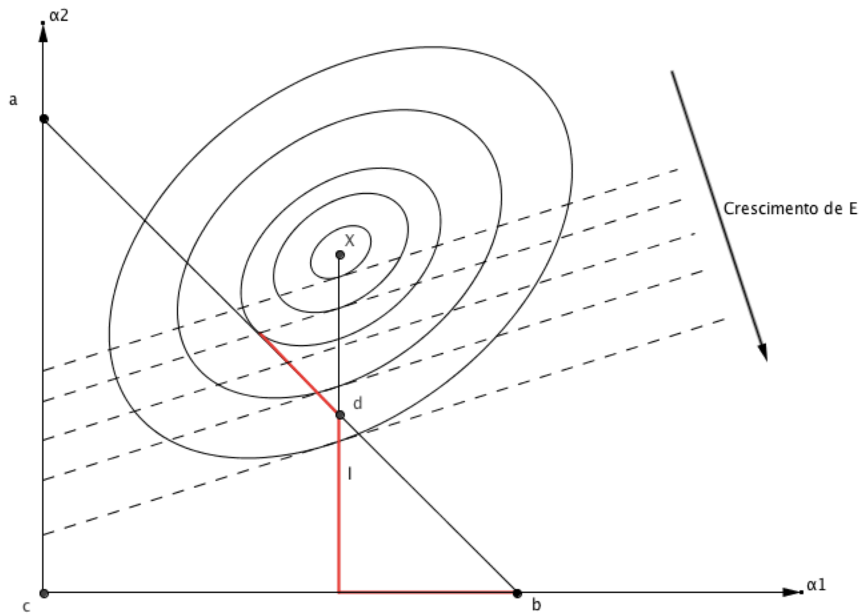

Figura 3: Fronteira eficiente

No próximo capítulo apresentamos uma solução analítica para o modelo Markowitz para o cálculo do conjunto de carteiras eficientes (E, V) associadas a um dado $E[\phi]$ e $var[\phi]$.

4 Resolvendo o modelo Markowitz

Vimos que a teoria proposta por Markowitz para a escolha de carteiras de investimento eficientes é um método baseado em média-variância. Assim a abordagem de Markowitz é baseada no retorno-risco de uma carteira, onde a variabilidade da taxa global do retorno é tomada como uma medida do risco e o valor esperado as medidas de rentabilidade, ou seja, a análise da média-variância leva em conta os dois primeiros momentos.

4.1 O modelo

Como anteriormente, considere que existam n ativos disponíveis, $i = 1, \ldots, n$, um investimento no ativo i leva a um retorno estocástico X_i, vamos assumir que existam o primeiro e o segundo momentos de $X_1, \ldots, X_n$.

Seja α_i a fração do investimento que será distribuído entre os n ativos disponíveis. Seja X_i o retorno de cada um dos i ativos que compõe a carteira de investimento e $E[X_i]$ o seu respectivo retorno esperado que também chamaremos de R_i.

Se permitimos vendas a descoberto, uma carteira de investimentos ou portfólio é simbolicamente representada por um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^n$, com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ onde α_i denotam os pesos do investimento nos ativos $i = 1, \ldots, n$. Assim, o retorno total em um portfólio α é dado pela variável aleatória ϕ da seguinte forma:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

O retorno esperado da carteira de investimento será

$$E[\phi] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i$$

A variância do retorno esperado da carteira como um todo será

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 var(X_i) + 2 \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j)$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j)$$

Para uma melhor compreensão, podemos adotar uma notação vetorial, onde os α_i, $i = 1, ..., n$ serão representados como componentes do vetor

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}$$

desta forma $\sum \alpha_i$ poderá ser representado vetorialmente pelo produto escalar

$$\alpha^T \cdot \mathbf{1} = 1 \text{ , onde } \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Os retornos esperados da carteira $R_i = E[x_i]$ serão representados pelo vetor

$$R = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

As covariâncias entre os retornos de cada ativo serão representadas pela seguinte matriz.

$$M_2 = \begin{vmatrix} var(x_1) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_1, X_n) & \cdots & var(X_n) \end{vmatrix}$$

Como consequência imediata, obtemos o retorno esperado da carteira e sua variância de uma maneira mais simples e elegante, utilizando a notação vetorial.

$$E[\phi] = \sum \alpha_i E(X_i) = \alpha^T R$$

$$var[\phi] = var\left(\sum \alpha_i X_i\right) = \alpha^T M_2 \alpha$$

Para determinar o conjunto de carteiras eficientes é formulado um problema de otimização quadrática, e o modelo matemático para sua solução utiliza o método de máximos e mínimos com restrição. Dependendo do caso a ser considerado, a solução para o problema poderá basear-se no teorema de Kuhn-Tucker ou Lagrange.

Se considerarmos o caso em que são permitidas vendas a descoberto, podemos utilizar o método dos Multiplicadores de Lagrange no modelo.

4.2 Multiplicadores de Lagrange

Estamos supondo que o investidor maximiza sua função utilidade. De acordo com Scott e Horvath [12], se admitirmos que a função utilidade depende apenas de sua riqueza e de seus rendimentos, o valor esperado de sua função utilidade pode ser expresso em função dos momentos centrais da seguinte maneira

$$E(U) = U(\mu) + \frac{U^2(\mu)}{2} var(\phi) + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!} U^i(\mu) \tag{4.11}$$

onde U^i denota a i-ésima derivada de U, μ denota o retorno esperado da carteira e μ_i é o i-ésimo momento central.

Sob as hipóteses de que a função utilidade U de um típico investidor avesso ao risco satisfaz $U^1(w)$ é positivo e $U^2(w)$ é negativo para todo w (nível de riqueza do investidor) e de que o investidor é estritamente consistente em sua preferência pelo n-ésimo momento, Scott e Horvath [12] mostram analiticamente que os investidores preferem maximizar momentos de ordem ímpar e minimizar momentos de ordem par.

Neste contexto, podemos interpretar que no modelo de Markowitz, a série de Taylor da função utilidade é truncada no termo de ordem 2, e que maximizar a utilidade exigiria minimizar a variância $var(\phi)$ para um dado nível de retorno μ ou maximizar o retorno μ para uma dada variância $var(\phi)$. Caputo [2] mostra através de um resultado de dualidade que estes dois problemas são equivalentes.

4.2.1 Maximizando o retorno

Para o problema de maximização do retorno sob a restrição de um risco fixo aceitável, de acordo com o perfil do investidor, as restrições do problema serão: a variância fixada por um valor $\mathbf{V}$, e o somatório dos pesos de distribuição do investimento ser igual a 1.

$$L(\alpha; \lambda_1, \lambda_2) = \alpha^T R - \lambda_1(\alpha^T \cdot \mathbf{1} - 1) - \lambda_2(\alpha^T M_2 \alpha - \mathbf{V})$$

Neste caso a solução para o problema de seleção da carteira de investimento estaria na solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha^{*T} \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \alpha^{*T} M_2 \alpha^* = \mathbf{V} \\ \alpha^* = \frac{1}{2\lambda_2}(M_2^{-1} R - \lambda_1 M_2^{-1} \mathbf{1}) \end{cases}$$

Pelo resultado de dualidade: Maximizando o retorno $\alpha^T R$ sob a restrição de uma variância $\mathbf{V}$, encontramos α^* e o retorno esperado máximo da carteira $R_{max} = \alpha^{*T} R$ correspondente. Se utilizarmos o retorno máximo encontrado neste caso para fixar o retorno do problema de minimizar a variância, encontraremos como resultado a mesma escolha de carteira $\alpha^\star = \alpha^*$, e a variância mínima V_{min} encontrada será igual à variância fixada no problema anterior $V_{min} = \mathbf{V}$.

4.2.2 Minimizando a variância

Para o caso em que se deseja minimizar o risco da carteira de investimentos para um retorno desejado fixado, as restrições do problema serão: o retorno esperado da carteira fixado por um valor, e o somatório dos pesos de distribuição do investimento ser igual a 1.

$$\begin{cases} \alpha^T R = \mathbf{r} \\ \alpha^T \cdot \mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

Minimizar a variância $\alpha^T M_2 \alpha$ sob a restrição de retorno esperado $\mathbf{r}$, onde a quantia a ser alocada em cada ativo é uma variável de decisão, está associado ao Lagrangiano

$$L(\alpha; \lambda_1, \lambda_2) = \alpha^T M_2 \alpha - \lambda_1(\alpha^T \cdot \mathbf{1} - 1) - \lambda_2(\alpha^T R - \mathbf{r})$$

Derivando obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2M_2\alpha^\star - \lambda_1 \cdot \mathbf{1} - \lambda_2 R = 0$$

Logo a solução para determinação de uma carteira de investimentos eficiente, sob a perspectiva de Markowitz, está na solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha^{\star T} R = \mathbf{r} \\ \alpha^{\star T} \mathbf{1} = 1 \\ \alpha^\star = \frac{1}{2}(\lambda_1 M_2^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 M_2^{-1} R) \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} 2M_2\alpha^\star - \lambda_1 \cdot \mathbf{1} - \lambda_2 R = 0 \\ R^T\alpha^\star = \mathbf{r} \\ \mathbf{1}^T\alpha^\star = 1 \end{cases}$$

Que poderá ser facilmente resolvido utilizando a representação matricial do sistema

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2M_2 & \mathbf{1} & R \\ \hline \mathbf{1}^T & 0 & 0 \\ R^T & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \alpha^\star \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

Note que a matriz $\left[\begin{array}{c|cc} 2M_2 & \mathbf{1} & R \\ \hline \mathbf{1}^T & 0 & 0 \\ R^T & 0 & 0 \end{array}\right]$ é simétrica definida por bloco.

Desta forma, resolver o sistema se resume a encontrar a matriz inversa de uma matriz em bloco do tipo

$$\left[\begin{array}{c|c} A & n \\ \hline n^T & 0 \end{array}\right]^{-1}$$

Podemos ainda resolver o sistema da seguinte maneira. Partindo da expressão para $\alpha^\star$

$$2\alpha^\star = \lambda_1 M_2^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 M_2^{-1} R$$

e usando as restrições

$$R^T\alpha^\star = \mathbf{r}$$
$$\mathbf{1}^T\alpha^\star = 1,$$

obtemos um sistema linear para λ_1 e λ_2:

$$\begin{cases} \lambda_1 R^T M_2^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 R^T M_2^{-1} R = 2\mathbf{r} \\ \lambda_1 \mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{1}^T M_2^{-1} R = 2 \end{cases}$$

que deve ser resolvido em duas situações $\mathbf{1}^T M_2^{-1} R = 0$ ou $\mathbf{1}^T M_2^{-1} R \neq 0$.

- Se $\mathbf{1}^T M_2^{-1} R = 0$, temos

$$\lambda_1 = \frac{2}{\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{2\mathbf{r}}{R^T M_2^{-1} R}$$

e

$$\alpha^\star = \frac{1}{\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}} M_2^{-1}\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}}{R^T M_2^{-1} R} M_2^{-1} R$$

Note que para

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}} M_2^{-1}\mathbf{1}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + M_2^{-1} R$$

se tomamos

$$v(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\mathbf{r}}{R^T M_2^{-1} R}$$

temos

$$\begin{aligned}\alpha^\star &= \alpha_1 + \frac{\mathbf{r}}{R^T M_2^{-1} R} M_2^{-1} R = \alpha_1 + \frac{R^T M_2^{-1} R - R^T M_2^{-1} R v(\mathbf{r})}{R^T M_2^{-1} R} M_2^{-1} R \\ &= \alpha_1 + (1 - v(\mathbf{r})) M_2^{-1} R = \alpha_1 + (1 - v(\mathbf{r}))(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= v(\mathbf{r})\alpha_1 + (1 - v(\mathbf{r}))\alpha_2\end{aligned}$$

- Se $\mathbf{1}^T M_2^{-1} R \neq 0$ e $\Delta = (R^T M_2^{-1}\mathbf{1})^2 - \mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1} R^T M_2^{-1} R$, temos

$$\lambda_1 = \frac{2}{\Delta}(\mathbf{r} R^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1} R) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\Delta}(\mathbf{r}\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1}\mathbf{1})$$

e

$$\alpha^\star = \frac{1}{\Delta}\big((\mathbf{r} R^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1} R) M_2^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{r}\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1}\mathbf{1}) M_2^{-1} R\big)$$

Note que para

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}} M_2^{-1}\mathbf{1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\mathbf{1}^T M_2^{-1} R} M_2^{-1} R$$

se tomamos

$$v(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{r} R^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1} R)\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}}{\Delta}$$

temos

$$\begin{aligned}1 - v(\mathbf{r}) &= \frac{\Delta - (\mathbf{r} R^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1} R)\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}}{\Delta} \\ &= \frac{(R^T M_2^{-1}\mathbf{1})^2 - \mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1} R^T M_2^{-1} R - (\mathbf{r} R^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1} R)\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}}{\Delta} \\ &= \frac{(R^T M_2^{-1}\mathbf{1})^2 - \mathbf{r} R^T M_2^{-1}\mathbf{1}}{\Delta} = -\frac{(\mathbf{r}\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1} - R^T M_2^{-1}\mathbf{1})\mathbf{1}^T M_2^{-1} R}{\Delta}\end{aligned}$$

Tal como em Müller [11],

$$\alpha^\star = v(\mathbf{r})\alpha_1 + (1 - v(\mathbf{r}))\alpha_2 \tag{4.12}$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}} M_2^{-1}\mathbf{1}, \qquad \alpha_2 = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{1}^T M_2^{-1} R} M_2^{-1} R & \text{se } \mathbf{1}^T M_2^{-1} R \neq 0, \\ \alpha_1 + M_2^{-1} R & \text{senão.} \end{cases}$$

Variando o nível mínimo de retorno $\mathbf{r}$, todos os portfólios eficientes média-variância são obtidos. α_1 e α_2 não dependem de $\mathbf{r}$.

Assim, qualquer portfólio eficiente é uma combinações linear de dois portfólios fixados de referência α_1 e α_2. Ingersoll [13, p.86] mostra que α_1 é o portfólio de variância mínima global, com um valor esperado de retorno.

$$r_{min} = \frac{R^T M_2^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T M_2^{-1}\mathbf{1}} \tag{4.13}$$

Observe ainda que todo retorno $\mathbf{r}$ de um portfólio que pertença à fronteira eficiente satisfaz $\mathbf{r} \geqslant r_{min}$

Assim, um dado nível de retorno $\mathbf{r}$ e (4.12) levam a

$$\sigma^2(\mathbf{r}) := var\{\rho[\alpha^\star(\mathbf{r})]\} = v^2\alpha_1^T M_2 \alpha_1 + 2v(1-v)\alpha_1 M_2 \alpha_2 + (1-v)^2 \alpha_2^T M_2 \alpha^2 \tag{4.14}$$

$$\mathbf{r} = vR^T\alpha_1 + (1-v)R^T\alpha_2 \tag{4.15}$$

De (4.14) e (4.15) pode-se deduzir que existe uma relação hiperbólica entre $\mathbf{r}$ e $\sigma(\mathbf{r})$.

5 O modelo de Athayde e Flores

5.1 Notação

Athayde e Flores [1] afirmam que lidar com os momentos de ordem superior pode se tornar algebricamente complicado ou até mesmo intratável. Dado um vetor aleatório n-dimensional, seus momentos podem ser vistos como tensores, um objeto matemático bem conhecido pelos físicos.

O tensor de segundos momentos é a conhecida matriz $n \times n$ de covariâncias, enquanto o tensor dos terceiros momentos pode ser visualizado como um cubo $n \times n \times n$ no espaço tridimensional. Tal como acontece com a matriz de covariâncias, preenchendo todas as quantidade do cubo, irão surgir valores idênticos. De fato, o número de diferentes assimetrias é igual ao de combinações com repetições de três elementos a partir de n, $\binom{n+2}{3}$, e não n^3.

O tensor de assimetrias é transformado em uma matriz $n \times n^2$, cortando cada camada $n \times n$ e colocando-as, na mesma ordem, lado a lado. O fato de que o tensor estará na forma de uma matriz, permite o uso de cálculo diferencial em todas as expressões, e a derivação de fórmulas compactas e elegantes. Chamando de σ_{ijk} uma co-assimetria geral, quando n=2, a matriz 2×4 resultante será

$$\begin{bmatrix} \sigma_{111} & \sigma_{112} & \sigma_{211} & \sigma_{212} \\ \sigma_{121} & \sigma_{122} & \sigma_{221} & \sigma_{222} \end{bmatrix}$$

dos quais apenas quatro elementos são distintos.

Agora, suponha que um vetor de pesos $\alpha \in \mathbb{R}^n$ é dado, e x, M_2, M_3 representam as matrizes contendo o retorno esperado, covariâncias e assimetrias de um vetor aleatório de n ativos. Os retornos médios, variância e assimetrias da carteira com estes pesos serão respectivamente:

$$\alpha^T x, \quad \alpha^T M_2 \alpha \quad \text{e} \quad \alpha^T M_3 (\alpha \otimes \alpha)$$

onde $\otimes$ refere-se ao produto de Kronecker. É imediato ver que como funções reais de α, estas expressões são três funções homogêneas do mesmo grau que a ordem do momento correspondente. Isto significa que o teorema de Euler pode ser facilmente utilizado nas derivações necessárias.

5.2 O modelo

Ao incorporar a assimetria do retorno da carteira de investimentos ao modelo original, Athayde e Flores [1] admitem que os momentos de ordem ímpar devem ser maximizados e os de ordem par minimizados, e desta maneira a função utilidade ainda será maximizada.

Um resultado de dualidade apresentado por Athayde e Flores [1] (Duality Lemma, p. 1338) garante que o problema de seleção de carteiras de investimentos para n ativos com risco e um livre de risco é equivalente à determinação de um portifólio de variância mínima dados um retorno esperado $E(r_p)$ e uma assimetria σ_{p^3}. Tal portfólio é obtido pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_2 \alpha + \lambda_1 [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t \mathbf{1}) r_f)] + \lambda_2 (\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha)),$$

onde M_1, M_2 e M_3 denotam as matrizes contendo os retornos médios, as covariâncias e as assimetrias dos n ativos de risco, r_f denota a taxa de retorno do ativo livre de risco e $\otimes$ denota o produto de Kronecker. A solução para o problema de optimização é indicada por Athayde e Flores em [1]

$$M_2 \alpha = \frac{A_4 R - A_2 \sigma_{p^3}}{A_0 A_4 - (A_2)^2} x + \frac{A_0 \sigma_{p^3} - A_2 R}{A_0 A_4 - (A_2)^2} M_3 (\alpha \otimes \alpha). \tag{5.16}$$

onde A_0, A_2 e A_4 são:

$$A_0 = x^T M_2^{-1} x, \tag{5.17}$$

$$A_2 = x^T M_2^{-1} M_3 (\alpha \otimes \alpha), \tag{5.18}$$

$$A_4 = (\alpha \otimes \alpha)^T M_3^T M_2^{-1} M_3 (\alpha \otimes \alpha); \tag{5.19}$$

A resolução de (5.16) envolve a aplicação de um Teorema de Ponto Fixo. O objetivo central do nosso projeto de pesquisa é precisar matematicamente, com a utilização de análise convexa, o uso de teoremas de ponto fixo na solução do problema de maximização da utilidade esperada associado a este modelo de seleção de carteiras eficientes. Analisaremos matematicamente o modelo proposto por Athayde e Flores [1] afim de encontrar o teorema de ponto fixo que atenda às especificidades da função (5.16), formalizar sua utilização e provar a existência de solução para este problema de otimização.

Referências

[1] ATHAYDE, Gustavo M. e FLORES Jr., Renato G. Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 28, 2004, pp. 1335-1352.

[2] CAPUTO, Michael R. Lagrangian transposition identities and reciprocal pairs of constrained optimization problems, Economics Letters, Vol. 66, 2000, pp. 265-273.

[3] FREITAS, Fábio Daros de; BRITO NETO, Christóvão Thiago de; SOUZA, Alberto Ferreira de. Avaliação do risco da arrecadação federal por meio de macrocarteiras de tributos. Rev. Adm. Pública, Rio de Janeiro, Vol. 46, No. 1, 2012.

[4] MANDELBROT, Benoit. The variation of certain speculative prices. Journal of Business 36, 1963, pp. 394-419.

[5] MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91, Março 1952.

[6] Paris, Quirino e CAPUTO, Michael R. The Rhetoric Of Duality, Journal of Agricultural and Resource Economics, Vol. 20, 1995, pp. 195-214.

[7] SAMUELSON, P. The fundamental approximation of theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. Review of Economic studies 37, 1970, pp. 537-542.

[8] CAMPBELL, J., Lo, A., MacKinlay, C. 1997. The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press, Princeton.

[9] AUBIN, J-P. 1998. Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis. Springer.

[10] PANIK, M. J. 1976. Classical Optimization: Foundations and Extensions. North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

[11] MÜLLER, Heinz H. Modern Portfolio Theory: Some Main Results. University of Zürich.

[12] SCOTT, Robert C. e Horvath, Philip A. On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance. The Journal of Finance, Vol. 35, No. 4, 1980, pp. 915-919.

[13] INGERSOLL, J. E. 1987. Theory of Financial Decision Making, Rowman Littlefield, New Jersey.

[14] MOOD, Alexander M. 1913. Introduction to the theory of statistics.