Números Irados *

F. S. SOUZA †

Resumo

Dado um número natural n, chamamos de múltiplo irado de n o menor múltiplo de n que é formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Provaremos neste trabalho que todo número natural possui um múltiplo irado.

1 Introdução

Um problema matemático cujo enunciado seja simples e que não exija profundos conhecimentos para ser compreendido, exerce um grande fascínio sobre as pessoas. Nessa categoria de problemas temos os problemas sobre números inteiros. Em particular, o seguinte problema (já bem solucionado antes) é muito interessante.

> *Mostrar que qualquer número natural tem um múltiplo que pode ser escrito utilizando-se apenas os algarismos 0 e 1.*

O menor dos múltiplos dado por esse problema é chamado de múltiplo irado.

Uma questão sobre múltiplos irados apareceu na OBMEP/2011 e, posteriormente, na RPM 77, p. 9 apareceu um problema que pedia para demonstrar que todo número natural possui um múltiplo irado. Note que, o problema da RPM 77 é consequência do fato acima juntamente com o Princípio da Boa Ordem.

Na próxima seção, vamos apresentar uma justificativa para o fato que todo número natural tem um múltiplo irado.

2 Múltiplos Irados

Um *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. O múltiplo irado de n será denotado por x_n. Assim, o múltiplo irado de 2 é 10, já o múltiplo irado de 3 é $x_3 = 111$ e o de 110 é ele próprio.

* *Trabalho motivado por um problema proposto na Revista do Professor de Matemática nº 77.*

Palavras chave: Múltiplos irados, números inteiros, Teoria dos Números

†Departamento de Matemática, FFP/UERJ, fasouza08@gmail.com

Teorema 2.1. *Todo número natural tem um múltiplo irado.*

Antes de demonstrar o Teorema 2.1 vamos estabelecer alguns lemas.

Lema 2.2. *A diferença de um número que é potência de 10 e 1 é um número formado apenas pelo algarismo 9.*

Demonstração. Seja n um número natural. Temos que

$$\begin{aligned} 10^n - 1 &= (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) = \\ &= 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) = \\ &= 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9). \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. *Se n é um número natural ímpar tal que $5 \nmid n$ então* mdc$(10, 9n)$=*1.*

Demonstração. Sendo n um número ímpar temos que $2 \nmid n$. Isto com o fato de $5 \nmid n$ nos dá $10 \nmid n$, já que $\mathrm{mdc}(2,5) = 1$. Logo, $\mathrm{mdc}(10, 9n) = 1$ porque caso contrário teríamos uma contradição □

Lema 2.4. *Dado $n \in \mathbb{N}$, existem $r, s, q \in \mathbb{N}$ tais que*

$$n = 2^r \cdot 5^s \cdot q,$$

com $2 \nmid q$ e $5 \nmid q$.

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética existem primos $p_1, p_2, \ldots, p_l$ e naturais $a_1, a_2, \ldots, a_l$ tais que

$$n = p_1^{a_1} \ldots p_l^{a_l}.$$

E além disso, tal decomposição é única a menos da ordem dos fatores. Se dentre os fatores $p_1, \ldots, p_l$ não aparecem nem o 2 nem o 5 escrevemos $r = s = 0$ e $q = p_1^{a_1} \ldots p_l^{a_l}$. Caso contrário tomamos o expoente do 2 como r e o expoente do 5 como s, e o produto dos fatores restantes chamamos este de q. □

Recordemos agora o que é a função de Euler. A *função de Euler* é a função $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$\phi(n) = \#\{x \in \mathbb{N}; \quad x \leq n,\ \mathrm{mdc}(n, x) = 1\}.$$

Ou seja, $\phi(n)$ é o número de inteiros positivos, menores ou iguais a n, que são relativamente primos com n. Assim, por exemplo, $\phi(6) = 2$, $\phi(7) = 6$ e $\phi(10) = 4$.

Teorema de Euler 2.1. *Sejam a e n dois inteiros primos entre si, com $n \geq 1$. Então $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

A demonstração do Teorema de Euler pode ser encontrada em [1, 2].

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$A_n = \{x \in \mathbb{N}/\ n|x \text{ e } x \text{ é formado apenas pelos algarismos 0 e 1}\}.$$

Lema 2.5. *$A_n \neq \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja n um número natural arbitrário. Pelo Lema 2.4 existem $r, s, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2^r \cdot 5^s \cdot q,$$

com $2 \nmid q$ e $5 \nmid q$. Como q é tal que $2 \nmid q$ e $5 \nmid q$ segue pelo Lema 2.3 que $\mathrm{mdc}(10, 9q) = 1$. Então pelo Teorema de Euler temos

$$10^{\phi(9q)} \equiv 1 \pmod{9q}.$$

Daí, $9q \mid 10^{\phi(9q)} - 1$, isto é, $10^{\phi(9q)} - 1 = 9qt$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Agora, aplicando o Lema 2.2, temos que $9qt$ é um número m formado apenas pelo algarismo 9. Assim, qt é um número natural formado apenas pelo algarismo 1. Agora, multiplicando qt pela potência 10^{r+s} obtemos um número m formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por outro lado,

$$m = 10^{r+s} \cdot qt = 2^s \cdot 5^r \cdot 2^r \cdot 5^s \cdot qt = 2^s \cdot 5^r nt,$$

ou seja, $m \in A_n$. □

Finalmente apresentamos a prova do Teorema 2.1.

Prova do Teorema 2.1. Primeiramente note que $A_n \subset \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, via o Lema 2.5 temos que $A_n \neq \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então pelo Princípio da Boa Ordenação segue que A_n possui um elemento mínimo, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, todo número natural possui um múltiplo irado. □

Referências

[1] E. A. Filho, *Funções Aritméticas Números Notáveis.* Nobel, (1988).

[2] C. Milies, S. Coelho, *Números: Uma Introdução à Matemática.* Edusp, (2003).

[3] Revista do Professor de Matemática, n^o 77, (2012).