AGULHA DE BUFFON – UMA DEMONSTRAÇÃO SIMPLES[1]

R. C. SANTOS[2]

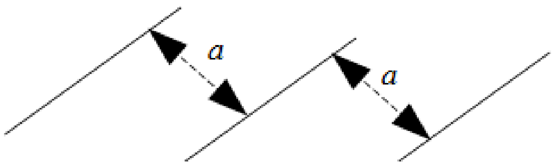
Resumo

Neste trabalho, daremos uma demonstração mais simples sobre o problema da agulha de Buffon. A agulha de Buffon constitui-se em um experimento cujo objetivo é calcular Pi por aproximação. A bela demonstração encontrada em [LINS, 2004] envolve vetores aleatórios, distribuições de probabilidade, a Lei dos Grandes Números, dentre outros conceitos estatísticos. Aqui, usaremos tão somente o conceito de Probabilidade Geométrica, e a resolução de uma integral definida simples.

1. Introdução

No século XVIII o matemático Conde de Buffon propôs o seguinte problema:

Considere um piso desenhado com infinitas retas paralelas cuja distância entre as mesmas denotaremos pela letra “*a*”:



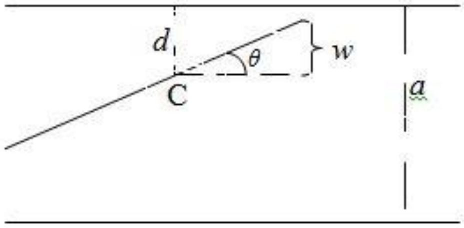
Jogando-se uma agulha de comprimento $l \leq a$ nesse piso, qual é a probabilidade de essa agulha tocar alguma linha do piso?

Vamos responder a esta pergunta usando a mesma ideia de [LINS, 2004], porém de uma forma adaptada, lançando mão de conhecimentos mais básicos. Aproveitaremos para mostrar como a repetição desse experimento serve para estimar o valor do número Pi.

2. Problema

Considere então a agulha abaixo, lançada entre duas paralelas. Seja *d* a distância (ver tracejado) do centro da agulha C até a paralela mais próxima a ele, como mostra a figura abaixo:

[1] ***Palavras-chave:*** Agulha de Buffon, Probabilidade Geométrica, Constante Pi
[2] Universidade de Brasília (Planaltina), e-mail: professorrogeriocesar@gmail.com



Observe que *d* está entre 0 e *a* / 2, pois vamos considerar sempre a paralela mais próxima ao centro da agulha, podendo ser a superior ou a inferior.

Considere ainda na figura acima uma linha imaginária passando por *C*, paralela às linhas do piso. Considere também o ângulo θ entre a agulha e essa linha imaginária. O ângulo θ está entre 0º e 180º.

Considere a altura *w* como mostra a figura. É a distância entre a extremidade da agulha que está mais próxima da paralela e a linha imaginária. Na figura, a altura *w* está "desenhada à direita" do centro *C*. Se θ for maior do que 90º, a altura *w* ficará "desenhada à esquerda" do centro *C*.

Observe que a agulha tocará a linha paralela mais próxima do seu centro se $w \geq d$.

Considerando qualquer possibilidade para θ, seja menor ou maior do que 90º, vale a relação $\operatorname{sen}\theta = \frac{w}{(l/2)}$,

de modo que $w = \frac{l \operatorname{sen}\theta}{2}$.

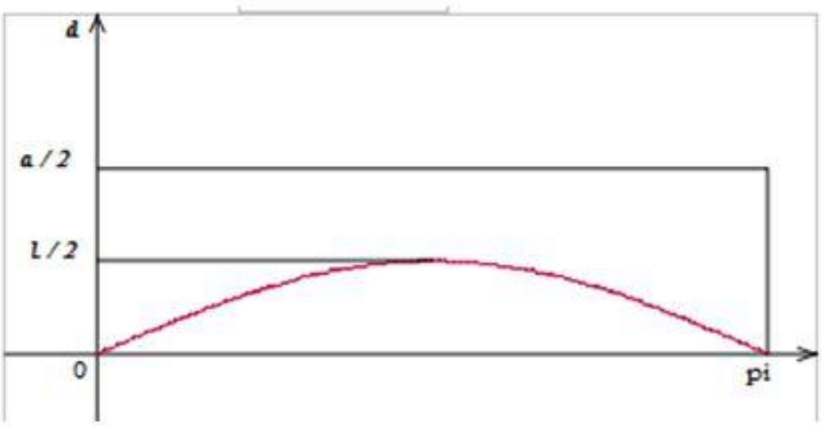
Enfim, a agulha tocará a linha paralela mais próxima de seu centro se $d \leq w \leq \frac{l \operatorname{sen}\theta}{2}$, ou seja, se

(I) $d \leq \frac{l \operatorname{sen}\theta}{2}$.

Agora, qualquer que seja a posição da agulha jogada no piso, considerando sempre a paralela mais próxima ao seu centro, vale:

- *d* está entre 0 e *a* / 2;
- θ está entre 0 *rad* e π *rad.*

Logo, esboçando o gráfico da função $d(\theta) = \frac{l \operatorname{sen}\theta}{2}$ no plano $\theta \times d$, temos:



O retângulo de vértices (0,0), (π,0), (π, *a*/2) e (0, *a*/2) corresponde a todos os possíveis pares ordenados (θ, d) no lançamento de uma agulha. Pela inequação (I), a região *sob* o gráfico da função $d(\theta) = \frac{l \operatorname{sen}\theta}{2}$ é a região na qual a agulha toca uma linha paralela. A área dessa região é a integral da função *d* no domínio [0,π] em relação à θ.

Assim, a *probabilidade geométrica* de que a agulha toque uma linha é:

(II) $\dfrac{\int_0^{\pi} \frac{l \,\mathrm{sen}\, \theta}{2} d\theta}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos(0) - \cos(\pi)\right) \cdot \frac{2l}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi},$

onde l é o tamanho da agulha.

Por exemplo, se a distância a entre as paralelas for 5 e o tamanho l da agulha for 4, então a probabilidade ou chance dela tocar alguma linha será, por (II), $\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot \pi} \cong \frac{8}{15,7} \cong 51\%$, isto é, 51 em 100. Já, se $l = a$, então o resultado será sempre $\frac{2}{\pi} \cong 64\%$.

Observe agora que $\frac{2l}{a\pi}$ é a probabilidade de que a agulha toque alguma linha em um único lançamento. Porém, qual seria *o outro significado* dessa probabilidade? É o seguinte: se jogarmos várias vezes uma agulha no piso, a *razão entre o número de vezes que ela toca alguma linha e o número total de lançamentos* se aproxima cada vez mais de $\frac{2l}{a\pi}$, isto é, se n for o número total de lançamentos, e h for o número de lançamentos nos quais a agulha toca alguma linha nos n lançamentos, então $\frac{h}{n} \cong \frac{2l}{a\pi}$. Daí, $\pi \cong \frac{2nl}{ah}$. Em particular, imagine que temos uma agulha cujo comprimento é metade da distância entre as paralelas, isto é, $l = a / 2$ (apenas para facilitar os cálculos). Então, $\pi \cong \frac{n}{h}$ bastando, portanto, anotar n e h no decorrer dos lançamentos.

Simulações realizadas em computador, no entanto, mostram que a convergência é lenta. Para se ter uma ideia, numa simulação em particular mostrada na referência, a primeira vez que a razão $\frac{2nl}{ah}$ passou de 3,09 para 3,1 foi após n = 1.000 lançamentos.

Referências

LINS, L. D., Agulha de Buffon, 2004. Disponível em http://www.cin.ufpe.br/~ldl/buffon.pdf. Acessado em 09 mai. 2012.