

GRUPOS ABELIANOS BORNOLÓGICOS *

D. P. POMBO JR. [†]

Conteúdo

Introdução	17
1 Conjuntos bornológicos	18
2 Grupos abelianos: algumas construções básicas	21
3 Grupos abelianos bornológicos	25
4 Uma propriedade universal da bornologia da equilimitação	38
5 Uma propriedade universal da bornologia da equicontinuidade	43
Referências	48

Introdução

Como Hogbe-Nlend observou em seu artigo de divulgação [10], vários aspectos importantes da Análise Funcional nos quais o conceito de limitação desempenha um papel central motivaram a introdução da noção de bornologia convexa em um espaço vetorial real ou complexo, que apareceu explicitamente pela primeira vez nos artigos pioneiros [20] e [21] de Waelbroeck. A importância das bornologias convexas na Análise Funcional clássica foi enfatizada nos livros [11], [12] e [22], embora também tenha sido natural considerar a noção de bornologia em outros contextos, como pode ser visto, por exemplo, em [1], [13], [15], [16], [18] e [19].

O ponto de partida para o presente trabalho é a observação de que a maioria das estruturas bornológicas estudadas até o momento satisfaz a propriedade comum de ser compatível com uma estrutura de grupo abeliano. Esse fato nos motivou a introduzir a noção de grupo abeliano bornológico, onde um grupo abeliano bornológico é simplesmente um grupo abeliano munido de uma bornologia de grupo (ou seja, de uma bornologia compatível com a sua estrutura de grupo). Nas seções 3, 4 e 5 deste trabalho discutimos as construções fundamentais na classe dos grupos abelianos bornológicos e as propriedades universais satisfeitas pelos grupos abelianos bornológicos construídos, estabelecemos uma versão do teorema de isomorfismo de Noether no nosso contexto e provamos a exatidão de certas sequências de grupos

* *Palavras-chave:* grupos abelianos bornológicos, sequências exatas, bornologia da equilimitação, bornologia da equicontinuidade

[†]Instituto de Matemática, UFRJ, Caixa Postal 68530, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

abelianos bornológicos. Os pré-requisitos sobre conjuntos bornológicos e grupos abelianos são incluídos, respectivamente, nas seções 1 e 2. Cabe também mencionar que vários resultados deste trabalho foram inspirados em resultados básicos de Álgebra Linear [6].

1 Conjuntos bornológicos

Nesta seção nos limitaremos aos resultados sobre conjuntos bornológicos necessários ao desenvolvimento do presente trabalho. Uma exposição mais completa sobre o assunto pode ser encontrada em [12] ou [18].

Definição 1.1. Sejam G um conjunto e $\mathcal{B}$ um conjunto de partes de G . $\mathcal{B}$ é dita uma *bornologia* em G quando as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$;
- (b) se $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \subset B_1$, então $B_2 \in \mathcal{B}$;
- (c) $\{x\} \in \mathcal{B}$ para todo $x \in G$.

Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos os *limitados* de $\mathcal{B}$. Um *conjunto bornológico* é um par $(G, \mathcal{B})$, onde G é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma bornologia em G . Dados dois conjuntos bornológicos $(G, \mathcal{B})$ e $(H, \mathcal{C})$, diz-se que uma aplicação $u: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (H, \mathcal{C})$ é *limitada* se $u(B) \in \mathcal{C}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definição 1.2. Sejam G um conjunto e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ duas bornologias em G . Diz-se que $\mathcal{B}_1$ é mais fina do que $\mathcal{B}_2$ (ou que $\mathcal{B}_2$ é menos fina do que $\mathcal{B}_1$) se a aplicação identidade

$$1_G: (G, \mathcal{B}_1) \longrightarrow (G, \mathcal{B}_2)$$

é limitada.

Exemplo 1.3. Se G é um conjunto, então o conjunto de todas as partes finitas de G é uma bornologia em G , dita a *bornologia discreta* em G , a qual é a bornologia mais fina em G . Se G é um conjunto munido da sua bornologia discreta e H é um conjunto bornológico arbitrário, então toda aplicação de G em H é limitada.

Exemplo 1.4. Se G é um conjunto, então o conjunto de todas as partes de G é uma bornologia em G , dita a *bornologia trivial* em G , a qual é a bornologia menos fina em G . Se G é um conjunto bornológico arbitrário e H é um conjunto munido de sua bornologia trivial, então toda aplicação de G em H é limitada.

Exemplo 1.5. Se G é um espaço topológico de Hausdorff e $\mathcal{B}$ é o conjunto de todas as partes relativamente compactas de G , então $(G, \mathcal{B})$ é um conjunto bornológico. Se u é uma aplicação contínua do espaço topológico de Hausdorff G no espaço topológico de Hausdorff H e $\mathcal{B}$ (respectivamente $\mathcal{C}$) é o conjunto de todas as partes relativamente compactas de G (respectivamente H), então $u: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (H, \mathcal{C})$ é limitada.

Exemplo 1.6. Se G é um espaço uniforme e $\mathcal{B}$ é o conjunto de todas as partes precompactas de G , então $(G, \mathcal{B})$ é um conjunto bornológico. Se u é uma aplicação uniformemente contínua do espaço uniforme G no espaço uniforme H e $\mathcal{C}$ (respectivamente $\mathcal{B}$) é o conjunto de todas as partes precompactas de G (respectivamente H), então $u: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (H, \mathcal{C})$ é limitada.

Exemplo 1.7. Sejam $(G, \mathcal{B})$ e $(H, \mathcal{C})$ dois conjuntos bornológicos. Diz-se que um conjunto $\mathfrak{X}$ de aplicações de G em H é *equilimitado* (ou, mais precisamente, $\mathcal{B} - \mathcal{C}$ -*equilimitado*) se, para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto

$$\mathfrak{X}(B) = \{u(x); x \in B, u \in \mathfrak{X}\} \in \mathcal{C}.$$

Então o conjunto de todos os conjuntos equilimitados de aplicações de G em H é uma bornologia no conjunto de todas as aplicações limitadas de $(G, \mathcal{B})$ em $(H, \mathcal{C})$, dita a *bornologia da equilimitação*.

Exemplo 1.8. Sejam G um espaço topológico e H um espaço uniforme. Então o conjunto de todos os conjuntos equicontínuos de aplicações de G em H é uma bornologia no conjunto de todas as aplicações contínuas de G em H , dita a *bornologia da equicontinuidade*.

Definição 1.9. Sejam $(G, \mathcal{B})$ um conjunto bornológico e $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$. Diz-se que $\mathcal{B}_1$ é um *sistema fundamental de limitados* para $\mathcal{B}$ se todo elemento de $\mathcal{B}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{B}_1$.

Proposição 1.10. Sejam G um conjunto e $\mathcal{B}_1$ um conjunto de partes de G . Para que exista uma (necessariamente única) bornologia em G para a qual $\mathcal{B}_1$ seja um sistema fundamental de limitados, é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B = G$;
- (b) para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1$ existe $B_3 \in \mathcal{B}_1$ tal que $B_1 \cup B_2 \subset B_3$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma bornologia em G para a qual $\mathcal{B}_1$ é um sistema fundamental de limitados. Se $x \in G$ é arbitrário, $\{x\} \in \mathcal{B}$, e então existe $B \in \mathcal{B}_1$ com $\{x\} \subset B$, mostrando a validade de (a). Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1$, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$. Logo, existe $B_3 \in \mathcal{B}_1$ com $B_1 \cup B_2 \subset B_3$, mostrando a validade de (b).

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{B}_1$ satisfaça as condições (a) e (b) e definamos $\mathcal{B}$ como o conjunto das partes de G contidas em algum elemento de $\mathcal{B}_1$. É fácil ver que $\mathcal{B}$ é uma bornologia em G e, por construção, $\mathcal{B}_1$ é um sistema fundamental de limitados para $\mathcal{B}$.

Teorema 1.11. Sejam G um conjunto, $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de conjuntos bornológicos e, para cada $i \in I$, seja u_i uma aplicação de G em G_i . Então existe uma única bornologia $\mathcal{B}$ em G inicial para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$, no seguinte sentido: para todo conjunto bornológico $(H, \mathcal{C})$ e para toda aplicação $u: H \rightarrow G$, tem-se que $u: (H, \mathcal{C}) \rightarrow (G, \mathcal{B})$ é limitada se e somente se $u_i \circ u: (H, \mathcal{C}) \rightarrow (G_i, \mathcal{B}_i)$ é limitada

para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} (H, \mathcal{C}) & \xrightarrow{u} & (G, \mathcal{B}) \\ u_i \circ u \searrow & & \swarrow u_i \\ & (G_i, \mathcal{B}_i) & \end{array}$$

Demonstração. É fácil ver que

$$\mathcal{B} = \{B \subset G; u_i(B) \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i \in I\}$$

é uma bornologia em G . E, pela definição de $\mathcal{B}$, $u_i: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (G_i, \mathcal{B}_i)$ é limitada para todo $i \in I$. Sejam $(H, \mathcal{C})$ e u como no enunciado. É claro que, se $u: (H, \mathcal{C}) \rightarrow (G, \mathcal{B})$ é limitada, então $u_i \circ u: (H, \mathcal{C}) \rightarrow (G_i, \mathcal{B}_i)$ é limitada para todo $i \in I$. Reciprocamente, admitamos que cada $u_i \circ u$ seja limitada e seja $C \in \mathcal{C}$ arbitrário. Logo, $u(C) \in \mathcal{B}$, pois $u_i(u(C)) = (u_i \circ u)(C) \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in I$; assim, $u: (H, \mathcal{C}) \rightarrow (G, \mathcal{B})$ é limitada. Portanto, a existência está provada.

Finalmente, para mostrar a unicidade, seja $\mathcal{B}'$ uma bornologia em G tal que $u_i: (G, \mathcal{B}') \rightarrow (G_i, \mathcal{B}_i)$ é limitada para todo $i \in I$. Então $1_G: (G, \mathcal{B}') \rightarrow (G, \mathcal{B})$ é limitada, já que $u_i \circ 1_G: (G, \mathcal{B}') \rightarrow (G_i, \mathcal{B}_i)$ é limitada para todo $i \in I$. Consequentemente, $\mathcal{B}$ é a bornologia menos fina em G que torna todas as u_i limitadas, e a unicidade está estabelecida.

Observação 1.12. Nas condições do Teorema 1.11, se $\mathcal{B}_i$ é a bornologia trivial em G_i para todo $i \in I$, então $\mathcal{B}$ é a bornologia trivial em G .

Definição 1.13. Sejam $(G, \mathcal{B})$ um conjunto bornológico e $K \subset G$. A *bornologia induzida* por $\mathcal{B}$ em K , denotada por $\mathcal{B}_K$, é a bornologia inicial para o par $((G, \mathcal{B}), u)$, onde u designa a inclusão de K em G .

Definição 1.14. Sejam G um conjunto e $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ uma família de bornologias em G . A *bornologia interseção* da família $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$, denotada por $\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$, é a bornologia inicial para a família $((G, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$, onde $u_i = 1_G$ para todo $i \in I$.

É claro que $B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ se e somente se $B \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in I$.

Definição 1.15. Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de conjuntos bornológicos, G o conjunto produto $\prod_{i \in I} G_i$ e, para cada $i \in I$, seja pr_i a projeção de G em G_i . A *bornologia produto* em G , denotada por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$, é a bornologia inicial para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), \text{pr}_i)_{i \in I}$.

Observação 1.16. É fácil ver que todos os conjuntos da forma

$$\prod_{i \in I} B_i \quad (B_i \in \mathcal{B}_i)$$

constituem um sistema fundamental de limitados para a bornologia $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$.

Proposição 1.17. *Sejam $(G, \mathcal{B})$ um conjunto bornológico, H um conjunto e $u: G \rightarrow H$ uma aplicação sobrejetora. Então*

$$\mathcal{C} = \{u(B); B \in \mathcal{B}\}$$

é uma bornologia em H .

Demonstração. É claro que $\mathcal{C}$ satisfaz as condições (a) e (c) da Definição 1.1. Finalmente, se $B \in \mathcal{B}$ e $T \subset u(B)$, então $T = u(u^{-1}(T) \cap B)$, sendo que $u^{-1}(T) \cap B \in \mathcal{B}$, pois $u^{-1}(T) \cap B \subset B$. Portanto, $T \in \mathcal{C}$, e a condição (b) da Definição 1.1 também se verifica.

Definição 1.18. Nas condições da Proposição 1.17, $\mathcal{C}$ é dita a *bornologia imagem direta* de $\mathcal{B}$ por u e é denotada por $u(\mathcal{B})$.

Exemplo 1.19. Sejam G um conjunto, $\mathcal{B}_1$ (respectivamente $\mathcal{B}_2$) a bornologia discreta (respectivamente trivial) em G e H e u como na Proposição 1.17. Então a bornologia $u(\mathcal{B}_1)$ (respectivamente $u(\mathcal{B}_2)$) é a bornologia discreta (respectivamente trivial) em H .

2 Grupos abelianos: algumas construções básicas

Esta seção é dedicada, essencialmente, aos conceitos de limite projetivo e limite indutivo no contexto dos grupos abelianos. Nossas principais referências foram [6] e [14].

Todos os grupos considerados neste trabalho serão supostos abelianos e denotados aditivamente; o elemento neutro de qualquer grupo será denotado por 0. Para qualquer homomorfismo de grupos u , seu núcleo será representado por $\text{Ker}(u)$ e sua imagem por $\text{Im}(u)$.

Lembremos que, para quaisquer grupos G e H , o conjunto $\text{Hom}(G; H)$ de todos os homomorfismos de grupos de G em H é um grupo abeliano.

Definição 2.1. Sejam $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos e G o conjunto produto $\prod_{i \in I} G_i$. Então a aplicação

$$\left((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \right) \in G \times G \longmapsto (x_i + y_i)_{i \in I} \in G$$

torna G um grupo abeliano, dito o *grupo produto* da família $(G_i)_{i \in I}$.

Para cada $i \in I$, a projeção $\text{pr}_i: G \rightarrow G_i$ é um homomorfismo de grupos.

Observação 2.2. Nas condições da Definição 2.1, a seguinte propriedade universal se verifica: para todo grupo H , a aplicação

$$u \in \text{Hom} \left(H; \prod_{i \in I} G_i \right) \longmapsto (\text{pr}_i \circ u)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(H; G_i)$$

é um isomorfismo de grupos.

Definição 2.3. Seja $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que $(G_i, u_{ij})_{i \in I}$ é um *sistema projetivo de grupos* se G_i é um grupo para todo $i \in I$, u_{ij} é um homomorfismo de grupos de G_j em G_i para $i, j \in I$ com $i \leq j$, $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$ e $u_{ij} \circ u_{jk} = u_{ik}$ para $i, j, k \in I$ com $i \leq j \leq k$. Seja G o grupo produto da família $(G_i)_{i \in I}$. Então

$$\varprojlim G_i = \{x \in G; (u_{ij} \circ \text{pr}_j)(x) = \text{pr}_i(x) \text{ para } i, j \in I \text{ com } i \leq j\}$$

é um subgrupo de G , dito o *limite projetivo* do sistema $(G_i, u_{ij})_{i \in I}$. Para cada $i \in I$, seja u_i a restrição de pr_i a $\varprojlim G_i$; $u_i: \varprojlim G_i \rightarrow G_i$ é dito o *homomorfismo de grupos canônico*. Assim, para $i, j \in I$ com $i \leq j$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim G_i & & \\ u_j \swarrow & & \searrow u_i \\ G_j & \xrightarrow{u_{ij}} & G_i \end{array}$$

é comutativo.

Observação 2.4. Seja $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos. Munamos I da relação de igualdade e definamos $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$. Então $(G_i, u_{ii})_{i \in I}$ é um sistema projetivo de grupos e $\varprojlim G_i = \prod_{i \in I} G_i$.

Exemplo 2.5. Consideremos o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Para cada inteiro $m \geq 1$ definamos $G_m = \mathbb{Z}$ e, para quaisquer inteiros $1 \leq m \leq n$, definamos $u_{mn}: x \in G_n \mapsto 3^{n-m}x \in G_m$. Então $(G_m, u_{mn})_{m \geq 1}$ é um sistema projetivo de grupos e, portanto, podemos considerar o grupo $\varprojlim G_m$.

Proposição 2.6. Seja $(G_i, u_{ij})_{i \in I}$ como na Definição 2.3. Então a seguinte propriedade universal é válida: para todo grupo H e para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ tal que α_i é um homomorfismo de grupos de H em G_i para $i \in I$ e $u_{ij} \circ \alpha_j = \alpha_i$ para $i \leq j$, existe um único homomorfismo de grupos u de H em $\varprojlim G_i$ tal que $u_i \circ u = \alpha_i$ para todo $i \in I$, onde u_i é o homomorfismo de grupos canônico.

$$\begin{array}{ccc} G_j \xrightarrow{u_{ij}} G_i & & H \xrightarrow{u} \varprojlim G_i \\ \alpha_j \swarrow & & \searrow \alpha_i \\ & H & G_i \end{array}$$

Demonstração. Para cada $y \in H$, ponhamos $u(y) = (\alpha_i(y))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$. Como, por hipótese, $u_{ij} \circ \alpha_j = \alpha_i$ para $i \leq j$, $u(y) \in \varprojlim G_i$ para todo $y \in H$. Logo, u é um homomorfismo de grupos de H em $\varprojlim G_i$ tal que $u_i \circ u = \alpha_i$ para todo $i \in I$, provando assim a existência. Finalmente, a unicidade é clara.

Corolário 2.7. Sejam $(G_i, u_{ij})_{i \in I}$ e $(H_i, v_{ij})_{i \in I}$ dois sistemas projetivos de grupos e, para cada $i \in I$,

seja β_i um homomorfismo de grupos de G_i em H_i de modo que, para $i \leq j$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_j & \xrightarrow{\beta_j} & H_j \\ u_{ij} \downarrow & & \downarrow v_{ij} \\ G_i & \xrightarrow{\beta_i} & H_i \end{array}$$

é comutativo. Então existe um único homomorfismo de grupos u de $\varprojlim G_i$ em $\varprojlim H_i$ de modo que, para todo $i \in I$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim G_i & \xrightarrow{u} & \varprojlim H_i \\ u_i \downarrow & & \downarrow v_i \\ G_i & \xrightarrow{\beta_i} & H_i \end{array}$$

é comutativo, onde u_i e v_i são os homomorfismos de grupos canônicos.

Demonstração. Para cada $i \in I$, ponhamos $\alpha_i = \beta_i \circ u_i$. Como, para $i \leq j$,

$$\begin{aligned} v_{ij} \circ \alpha_j &= v_{ij} \circ (\beta_j \circ u_j) = (v_{ij} \circ \beta_j) \circ u_j = (\beta_i \circ u_{ij}) \circ u_j \\ &= \beta_i \circ (u_{ij} \circ u_j) = \beta_i \circ u_i = \alpha_i, \end{aligned}$$

segue da Proposição 2.6 que existe um único homomorfismo de grupos u de $\varprojlim G_i$ em $\varprojlim H_i$ tal que $v_i \circ u = \alpha_i = \beta_i \circ u_i$ para todo $i \in I$. Assim, a demonstração está concluída.

Definição 2.8. Seja $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos. Seja G o grupo produto $\prod_{i \in I} G_i$ e, para cada $i \in I$, seja pr_i a projeção de G em G_i . Então o conjunto

$$\bigoplus_{i \in I} G_i = \{x \in G; \text{pr}_i(x) = 0 \text{ exceto para um número finito de índices}\}$$

é um subgrupo de G , dito a *soma direta* da família $(G_i)_{i \in I}$. Para cada $i \in I$, a *injeção canônica* de G_i em $\bigoplus_{i \in I} G_i$ é o homomorfismo de grupos $u_i: x_i \in G_i \mapsto (y_j)_{j \in I} \in \bigoplus_{i \in I} G_i$, onde $y_j = 0$ se $j \neq i$ e $y_i = x_i$.

No caso em que I é finito, tem-se $\prod_{i \in I} G_i = \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Observação 2.9. Nas condições da Definição 2.8, a seguinte propriedade universal se verifica: para todo grupo H , a aplicação

$$u \in \text{Hom} \left(\bigoplus_{i \in I} G_i; H \right) \mapsto (u \circ u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(G_i; H)$$

é um isomorfismo de grupos.

Definição 2.10. Seja $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que $(G_i, u_{ji})_{i \in I}$ é um *sistema indutivo de grupos* se G_i é um grupo para todo $i \in I$, u_{ji} é um homomorfismo de grupos de G_i em G_j para $i, j \in I$ com $i \leq j$, $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$ e $u_{kj} \circ u_{ji} = u_{ki}$ para $i, j, k \in I$ com $i \leq j \leq k$.

Proposição 2.11. *Seja $(G_i, u_{ji})_{i \in I}$ um sistema indutivo de grupos. Sejam $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ e N o subgrupo de G formado por todas as somas finitas de elementos da forma $(u_j \circ u_{ji})(x_i) - u_i(x_i)$, onde $u_i: G_i \rightarrow G$ é a injeção canônica, $x_i \in G_i$ e $i \leq j$. Seja $\pi: G \rightarrow G/N$ a sobrejeção canônica e, para cada $i \in I$, seja $v_i = \pi \circ u_i$ o homomorfismo de grupos canônico (por construção, $v_j \circ u_{ji} = v_i$ para $i \leq j$). Então vale a seguinte propriedade universal: para todo grupo H e para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ tal que α_i é um homomorfismo de grupos de G_i em H para $i \in I$ e $\alpha_j \circ u_{ji} = \alpha_i$ para $i \leq j$, existe um único homomorfismo de grupos u de G/N em H tal que $u \circ v_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{u_{ji}} & G_j \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow \alpha_j \\ & H & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G/N & \xrightarrow{u} & H \\ v_i \nwarrow & & \nearrow \alpha_i \\ & G_i & \end{array}$$

Demonstração. Pela Observação 2.9, existe um único homomorfismo de grupos $w: G \rightarrow H$ tal que $w \circ u_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$. Notemos ainda que, para $x_i \in G_i$ e $i \leq j$ arbitrários, tem-se $w((u_j \circ u_{ji})(x_i) - u_i(x_i)) = (w \circ u_j)(u_{ji}(x_i)) - (w \circ u_i)(x_i) = (\alpha_j \circ u_{ji})(x_i) - \alpha_i(x_i) = \alpha_i(x_i) - \alpha_i(x_i) = 0$, mostrando que $N \subset \text{Ker}(w)$. Logo, pelo teorema do isomorfismo, existe um único homomorfismo de grupos (injetor) $u: G/N \rightarrow H$ tal que $u \circ \pi = w$. Finalmente, para $i \in I$ e $x_i \in G_i$ arbitrários, tem-se $(u \circ v_i)(x_i) = (u \circ \pi \circ u_i)(x_i) = (w \circ u_i)(x_i) = \alpha_i(x_i)$. Portanto, a existência está provada.

Finalmente provemos a unicidade. Com efeito, seja $\tilde{u}: G/N \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos tal que $\tilde{u} \circ v_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$. Para $y \in G$ arbitrário, existe um subconjunto finito J de I e, para cada $i \in J$, existe $x_i \in G_i$ de modo que $y = \sum_{i \in J} u_i(x_i)$. Logo,

$$\begin{aligned} (\tilde{u} \circ \pi)(y) &= \sum_{i \in J} \tilde{u}((\pi \circ u_i)(x_i)) = \sum_{i \in J} (\tilde{u} \circ v_i)(x_i) = \sum_{i \in J} \alpha_i(x_i) \\ &= \sum_{i \in J} (w \circ u_i)(x_i) = w\left(\sum_{i \in J} u_i(x_i)\right) = w(y). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\tilde{u} = u$, e a unicidade está provada.

Definição 2.12. Nas condições da Proposição 2.11, o grupo G/N é dito o *limite indutivo* do sistema $(G_i, u_{ji})_{i \in I}$ e denotado por $\varinjlim G_i$.

Observação 2.13. Seja $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos. Munamos I da relação de igualdade e definamos $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$. Então $(G_i, u_{ii})_{i \in I}$ é um sistema indutivo de grupos e $\varinjlim G_i = \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Exemplo 2.14. Seja G um grupo e seja $(G_i)_{i \in I}$ a família de todos os subgrupos finitamente gerados de G . Definamos a seguinte relação de ordem parcial $\leq$ em I : para $i, j \in I$, $i \leq j$ se $G_i \subset G_j$. Para $i \leq j$, seja u_{ji} a inclusão de G_i em G_j . Então $(G_i, u_{ji})_{i \in I}$ é um sistema indutivo de grupos e, portanto, podemos considerar $\varinjlim G_i$.

Corolário 2.15. *Sejam $(G_i, u_{ji})_{i \in I}$ e $(H_i, v_{ji})_{i \in I}$ dois sistemas indutivos de grupos e, para cada $i \in I$, seja β_i um homomorfismo de grupos de G_i em H_i de modo que, para $i \leq j$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\beta_i} & H_i \\ u_{ji} \downarrow & & \downarrow v_{ji} \\ G_j & \xrightarrow[\beta_j]{} & H_j \end{array}$$

é comutativo. Então existe um único homomorfismo de grupos u de $\varinjlim G_i$ em $\varinjlim H_i$ de modo que, para todo $i \in I$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim G_i & \xrightarrow{u} & \varinjlim H_i \\ v_i \uparrow & & \uparrow w_i \\ G_i & \xrightarrow[\beta_i]{} & H_i \end{array}$$

é comutativo, onde v_i e w_i são os homomorfismos de grupos canônicos.

Demonstração. Basta argumentar como na demonstração do Corolário 2.7, aplicando a Proposição 2.11 em lugar da Proposição 2.6.

3 Grupos abelianos bornológicos

Nesta seção, cujo embrião foi [17], consideraremos uma noção já implícita na Definição 2.1 da página 45 de [22].

Definição 3.1. Uma bornologia $\mathcal{B}$ em um grupo G é dita uma *bornologia de grupo*, e $(G, \mathcal{B})$ é dito um *grupo bornológico*, se a aplicação

$$(x, y) \in (G \times G, \mathcal{B} \times \mathcal{B}) \longmapsto x - y \in (G, \mathcal{B})$$

é limitada.

É claro que uma bornologia $\mathcal{B}$ em um grupo G é uma bornologia de grupo se e somente se as aplicações $(x, y) \in (G \times G, \mathcal{B} \times \mathcal{B}) \mapsto x + y \in (G, \mathcal{B})$ e $x \in (G, \mathcal{B}) \mapsto -x \in (G, \mathcal{B})$ são limitadas.

Exemplo 3.2. Se G é um grupo, a bornologia discreta em G é uma bornologia de grupo.

Exemplo 3.3. Se G é um grupo, a bornologia trivial em G é uma bornologia de grupo.

Exemplo 3.4. Sejam G um grupo e $\|\cdot\|$ uma seminorma em G ([23], Definição 6.7). Consideremos o conjunto $\mathcal{B}$ formado pelos subconjuntos B de G satisfazendo a seguinte propriedade: $B \in \mathcal{B}$ se existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in B$. Então $(G, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico.

Exemplo 3.5. Se G é um grupo topológico de Hausdorff, então a bornologia em G formada pelas partes relativamente compactas de G (Exemplo 1.5) é uma bornologia de grupo em G .

Exemplo 3.6. Sejam $(G, \mathcal{B})$ e $(H, \mathcal{C})$ dois grupos bornológicos e $\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ o grupo abeliano de todos os homomorfismos de grupos limitados de $(G, \mathcal{B})$ em $(H, \mathcal{C})$ (se $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$, seu simétrico $-u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ é dado por $(-u)(x) = -(u(x))$ para $x \in G$). Então a bornologia $\mathcal{E}_B^{\mathcal{C}}$ induzida pela bornologia da equilimitação (Exemplo 1.7) em $\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ é uma bornologia de grupo. De fato, para quaisquer $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{E}_B^{\mathcal{C}}$ e $B \in \mathcal{B}$, tem-se

$$(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2)(B) \subset \mathfrak{X}_1(B) - \mathfrak{X}_2(B),$$

e daí resulta que $(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2)(B) \in \mathcal{C}$. Logo, $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{E}_B^{\mathcal{C}}$.

Exemplo 3.7. Sejam (G, τ) e (H, θ) dois grupos topológicos e $\text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ o grupo abeliano de todos os homomorfismos de grupos contínuos de (G, τ) em (H, θ) (se $u \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$, seu simétrico $-u \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ é dado exatamente como no Exemplo 3.6). Então a bornologia $\mathcal{E}_\tau^\theta$ induzida pela bornologia da equicontinuidade (Exemplo 1.8) em $\text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ é uma bornologia de grupo. De fato, sejam $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ arbitrários e seja V uma θ -vizinhança arbitrária de 0 em H . Tomemos uma θ -vizinhança V_1 de 0 em H tal que $V_1 - V_1 \subset V$ e uma τ -vizinhança U de 0 em G tal que $\mathfrak{X}_1(U) \subset V_1$ e $\mathfrak{X}_2(U) \subset V_1$. Então

$$(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2)(U) \subset \mathfrak{X}_1(U) - \mathfrak{X}_2(U) \subset V_1 - V_1 \subset V,$$

provando a equicontinuidade de $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2$ em 0. Logo, $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ pela Proposição 5, p. 28 de [4].

Exemplo 3.8. Sejam R um anel topológico com elemento unidade e $(E, \mathcal{B})$ um R -módulo bornológico [16], onde E é um R -módulo à esquerda unitário. Se $(E, +)$ é o grupo aditivo subjacente a E , então $((E, +), \mathcal{B})$ é um grupo bornológico. Em particular, se (E, τ) é um R -módulo topológico à esquerda unitário, então $((E, +), \mathcal{B}(\tau))$ é um grupo bornológico, onde $\mathcal{B}(\tau)$ denota a bornologia de R -módulo formada por todos os subconjuntos τ -limitados de E ([23], Definição 15.1).

Exemplo 3.9. Seja R como no Exemplo 3.8, com R linearmente topologizado ([9], (7.1.1)), e seja $(E, \mathcal{B})$ um R -módulo linearmente bornologizado [15]. Para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tem-se $B_1 + B_2 \subset [B_1 \cup B_2]$ e $RB_1 \subset [B_1]$; assim, $B_1 + B_2, RB_1 \in \mathcal{B}$ pela Proposição 1 de [15]. Portanto, $(E, \mathcal{B})$ é um R -módulo bornológico, e então $((E, +), \mathcal{B})$ é um grupo bornológico pelo Exemplo 3.8.

Exemplo 3.10. Seja K um corpo não trivialmente valorizado. Se $(E, \mathcal{B})$ é um espaço vetorial bornológico sobre K ([18], p.43, Definição 1), então $((E, +), \mathcal{B})$ é um grupo bornológico em virtude do Exemplo 3.8. Em particular, se K é um corpo ultramétrico não trivialmente valorizado e $(E, \mathcal{B})$ é um espaço vetorial bornológico K -convexo [1], então $((E, +), \mathcal{B})$ é um grupo bornológico.

Exemplo 3.11. Se $(E, \mathcal{B})$ é um espaço vetorial bornológico convexo sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ([12], p.19 e Exercício 2.E.1), então $((E, +), \mathcal{B})$ é um grupo bornológico pelo Exemplo 3.8.

Teorema 3.12. *Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos, G um grupo e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G \rightarrow G_i$ um homomorfismo de grupos. Se $\mathcal{B}$ é a bornologia inicial para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$ (Teorema 1.11), então $(G, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}$ arbitrários. Como

$$u_i(B_1 - B_2) = u_i(B_1) - u_i(B_2) \in \mathcal{B}_i$$

para todo $i \in I$, então $B_1 - B_2 \in \mathcal{B}$. Portanto, $(G, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico.

Corolário 3.13. *Se $(G, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico e K é um subgrupo de G , então $(K, \mathcal{B}_K)$ é um grupo bornológico.*

Demonstração. Imediata a partir do Teorema 3.12.

Corolário 3.14. *Se $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ é uma família de bornologias de grupo em um grupo G , então $\left(G, \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i\right)$ é um grupo bornológico.*

Demonstração. Imediata a partir do Teorema 3.12.

Corolário 3.15. *Se $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ é uma família de grupos bornológicos, então $\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right)$ é um grupo bornológico.*

Demonstração. Imediata a partir do Teorema 3.12.

Observação 3.16. Nas condições do Corolário 3.15, a seguinte propriedade universal se verifica: para todo grupo bornológico $(H, \mathcal{C})$, a aplicação

$$u \in \text{Hom}_b\left((H, \mathcal{C}); \left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right)\right) \mapsto (\text{pr}_i \circ u)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i))$$

é um isomorfismo de grupos, onde pr_i é a projeção de G em G_i .

Proposição 3.17. *Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ e $((H_i, \mathcal{C}_i))_{i \in I}$ duas famílias de grupos bornológicos. Para cada $i \in I$ seja $u_i: G_i \rightarrow H_i$ um homomorfismo de grupos e seja $\prod_{i \in I} u_i: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} H_i$ o homomorfismo de grupos dado por $\prod_{i \in I} u_i((x_i)_{i \in I}) = (u_i(x_i))_{i \in I}$. Então $\text{Ker}\left(\prod_{i \in I} u_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Ker}(u_i)$ e $\text{Im}\left(\prod_{i \in I} u_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Im}(u_i)$. Além disso,*

$$\prod_{i \in I} u_i \in \text{Hom}_b\left(\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right); \left(\prod_{i \in I} H_i, \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i\right)\right)$$

se e somente se $u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H_i, \mathcal{C}_i))$ para todo $i \in I$.

Demonstração. As igualdades $\text{Ker}\left(\prod_{i \in I} u_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Ker}(u_i)$ e $\text{Im}\left(\prod_{i \in I} u_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Im}(u_i)$ são óbvias.

Para cada $j \in I$ seja pr_j a projeção de $\prod_{i \in I} H_i$ em H_j e seja $w_j: G_j \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ o homomorfismo de grupos dado por $w_j(x_j) = (t_i)_{i \in I}$, onde $t_i = 0$ se $i \neq j$ e $t_j = x_j$. Como $w_j \in \text{Hom}_b\left((G_j, \mathcal{B}_j); \left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right)\right)$, $\text{pr}_j \in \text{Hom}_b\left(\left(\prod_{i \in I} H_i, \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i\right); (H_j, \mathcal{C}_j)\right)$ e $u_j = \text{pr}_j \circ \left(\prod_{i \in I} u_i\right) \circ w_j$, a limitação de $\prod_{i \in I} u_i$ implica a de u_j .

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right) & \xrightarrow{\prod_{i \in I} u_i} & \left(\prod_{i \in I} H_i, \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i\right) \\ w_j \uparrow & & \downarrow \text{pr}_j \\ (G_j, \mathcal{B}_j) & \xrightarrow{u_j} & (H_j, \mathcal{C}_j) \end{array}$$

Reciprocamente, admitamos que $u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H_i, \mathcal{C}_i))$ para todo $i \in I$. Como

$$\prod_{i \in I} u_i \left(\prod_{i \in I} B_i \right) = \prod_{i \in I} u_i(B_i),$$

onde $B_i \in \mathcal{B}_i$ para $i \in I$, segue que

$$\prod_{i \in I} u_i \in \text{Hom}_b\left(\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right); \left(\prod_{i \in I} H_i, \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i\right)\right)$$

(lembrar a Observação 1.16). Assim, a demonstração está concluída.

Corolário 3.18. *Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$, $((H_i, \mathcal{C}_i))_{i \in I}$ e $((L_i, \mathcal{D}_i))_{i \in I}$ três famílias de grupos bornológicos e, para cada $i \in I$, sejam $u_i: G_i \rightarrow H_i$ e $v_i: H_i \rightarrow L_i$ homomorfismos de grupos. Para que*

$$\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right) \xrightarrow{\prod_{i \in I} u_i} \left(\prod_{i \in I} H_i, \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i\right) \xrightarrow{\prod_{i \in I} v_i} \left(\prod_{i \in I} L_i, \prod_{i \in I} \mathcal{D}_i\right)$$

seja uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados, é necessário e suficiente que

$$(G_i, \mathcal{B}_i) \xrightarrow{u_i} (H_i, \mathcal{C}_i) \xrightarrow{v_i} (L_i, \mathcal{D}_i)$$

seja uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados para todo $i \in I$.

Demonstração. Imediata a partir da Proposição 3.17.

Nas Proposições 3.19, 3.20, 3.21 e 3.36, a seguir, o grupo reduzido ao elemento neutro munido da sua única bornologia (de grupo) será representado por 0.

Proposição 3.19. *Sejam $(G, \mathcal{B})$ um grupo bornológico e K, M dois subgrupos de G . Então*

$$0 \rightarrow (K \cap M, \mathcal{B}_{K \cap M}) \xrightarrow{u} (K \times M, \mathcal{B}_K \times \mathcal{B}_M) \xrightarrow{v} (K + M, \mathcal{B}_{K+M}) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados, onde u é o homomorfismo de grupos dado por $u(x) = (x, x)$ e v é o homomorfismo de grupos dado por $v(x, y) = x - y$.

Demonstração. É fácil ver que u é injetor, $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$ e v é sobrejetor. Se $B \in \mathcal{B}_{K \cap M}$ é arbitrário, $B \in \mathcal{B}_K$ e $B \in \mathcal{B}_M$, e então $u(B) \in \mathcal{B}_K \times \mathcal{B}_M$ (pois $u(B) \subset B \times B$); portanto, $u \in \text{Hom}_b((K \cap M, \mathcal{B}_{K \cap M}); (K \times M, \mathcal{B}_K \times \mathcal{B}_M))$. E, se $B_1 \in \mathcal{B}_K$ e $B_2 \in \mathcal{B}_M$ são arbitrários, $B_1 - B_2 \in \mathcal{B}$ e $B_1 - B_2 \subset K + M$, e então $v(B_1 \times B_2) = B_1 - B_2 \in \mathcal{B}_{K+M}$; portanto, $v \in \text{Hom}_b((K \times M, \mathcal{B}_K \times \mathcal{B}_M); (K + M, \mathcal{B}_{K+M}))$.

É fácil ver que se $(G, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico, H é um grupo e $u: G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos sobrejetor, então $(H, u(\mathcal{B}))$ é um grupo bornológico. Em particular, se K é um subgrupo de G e $\pi: G \rightarrow G/K$ é a sobrejeção canônica, então $(G/K, \pi(\mathcal{B}))$ é um grupo bornológico.

Proposição 3.20. *Sejam $(G, \mathcal{B})$ um grupo bornológico e K, M dois subgrupos de G . Então*

$$0 \rightarrow \left(G/(K \cap M), \mathcal{C} \right) \xrightarrow{u} \left(G/K \times G/M, \mathcal{C}' \times \mathcal{C}'' \right) \xrightarrow{v} \left(G/(K + M), \mathcal{C}''' \right) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados, onde u é o homomorfismo de grupos dado por $u(x + (K \cap M)) = (x + K, x + M)$, v é o homomorfismo de grupos dado por $v(x + K, y + M) = (x - y) + (K + M)$, $\mathcal{C} = \pi(\mathcal{B})$ (respectivamente $\mathcal{C}' = \pi'(\mathcal{B})$, $\mathcal{C}'' = \pi''(\mathcal{B})$, $\mathcal{C}''' = \pi'''(\mathcal{B})$), sendo $\pi: G \rightarrow G/(K \cap M)$ (respectivamente $\pi': G \rightarrow G/K$, $\pi'': G \rightarrow G/M$, $\pi''': G \rightarrow G/(K + M)$) a sobrejeção canônica.

Demonstração. É fácil ver que u é injetor, $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$ e v é sobrejetor. Se $B \in \mathcal{B}$ é arbitrário, $u(\pi(B)) \subset \pi'(B) \times \pi''(B)$, e daí resulta que $u \in \text{Hom}_b((G/(K \cap M), \mathcal{C}); (G/K \times G/M, \mathcal{C}' \times \mathcal{C}''))$. E, se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ são arbitrários, $v(\pi'(B_1) \times \pi''(B_2)) = \pi'''(B_1 - B_2)$; logo, $v \in \text{Hom}_b((G/K \times G/M, \mathcal{C}' \times \mathcal{C}''); (G/(K + M), \mathcal{C}'''))$.

Proposição 3.21. *Sejam $(G, \mathcal{B})$ um grupo bornológico, $(M_i)_{i \in I}$ uma família de subgrupos de G e $M = \bigcap_{i \in I} M_i$. Para cada $i \in I$ sejam $v_i: G \rightarrow G/M_i$ a sobrejeção canônica e $\mathcal{B}_i = v_i(\mathcal{B})$. Então*

$$0 \rightarrow (M, \mathcal{B}_M) \xrightarrow{u} (G, \mathcal{B}) \xrightarrow{v} \left(\prod_{i \in I} (G/M_i), \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i \right) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados, onde u é a inclusão de M em G e $v(x) = (v_i(x))_{i \in I}$.

Demonstração. É claro que u é injetor, $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$ e v é sobrejetor. Finalmente, v é limitada, pois cada $v_i: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (G/M_i, \mathcal{B}_i)$ é limitada e $v(B) \subset \prod_{i \in I} v_i(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definição 3.22. Seja $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ij})_{i \in I}$ um sistema projetivo de grupos bornológicos (isto significa que I é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, $(G_i, \mathcal{B}_i)$ é um grupo bornológico para todo $i \in I$, $u_{ij} \in \text{Hom}_b((G_j, \mathcal{B}_j); (G_i, \mathcal{B}_i))$ para $i, j \in I$ com $i \leq j$, $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$ e $u_{ij} \circ u_{jk} = u_{ik}$ para $i, j, k \in I$ com $i \leq j \leq k$). Para cada $i \in I$ seja $u_i: \varprojlim G_i \rightarrow G_i$ o homomorfismo de grupos

canônico (Definição 2.3). Se $\mathcal{B}$ é a bornologia inicial para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$, $(\varprojlim G_i, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico pelo Teorema 3.12, dito o *limite projetivo bornológico* do sistema $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ij})_{i \in I}$.

É fácil ver que $\mathcal{B}$ coincide com a bornologia induzida por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ em $\varprojlim G_i$.

Observação 3.23. Seja $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos. Consideremos I munido de sua relação de igualdade e ponhamos $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$. Então $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ii})_{i \in I}$ é um sistema projetivo de grupos bornológicos cujo limite projetivo bornológico coincide com $\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i \right)$.

Proposição 3.24. Nas condições da Definição 3.22, $(\varprojlim G_i, \mathcal{B})$ satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo grupo bornológico $(H, \mathcal{C})$ e para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ (onde $\alpha_i \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i))$ para todo $i \in I$) tal que $u_{ij} \circ \alpha_j = \alpha_i$ para $i \leq j$, existe um único $u \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (\varprojlim G_i, \mathcal{B}))$ tal que $u_i \circ u = \alpha_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} (G_j, \mathcal{B}_j) & \xrightarrow{u_{ij}} & (G_i, \mathcal{B}_i) \\ \alpha_j \searrow & & \nearrow \alpha_i \\ & (H, \mathcal{C}) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (H, \mathcal{C}) & \xrightarrow{u} & (\varprojlim G_i, \mathcal{B}) \\ \alpha_i \searrow & & \nearrow u_i \\ & (G_i, \mathcal{B}_i) & \end{array}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.6, existe um único homomorfismo de grupos $u: H \rightarrow \varprojlim G_i$ tal que $u_i \circ u = \alpha_i$ para todo $i \in I$. Assim, $u_i \circ u \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i))$ para todo $i \in I$, e o Teorema 1.11 garante que $u \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (\varprojlim G_i, \mathcal{B}))$.

Corolário 3.25. Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ij})_{i \in I}$ e $((H_i, \mathcal{C}_i), v_{ij})_{i \in I}$ dois sistemas projetivos de grupos bornológicos e sejam $(\varprojlim G_i, \mathcal{B})$ e $(\varprojlim H_i, \mathcal{C})$ os correspondentes limites projetivos bornológicos. Para cada $i \in I$ seja $\beta_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H_i, \mathcal{C}_i))$ tal que $v_{ij} \circ \beta_j = \beta_i \circ u_{ij}$ para $i \leq j$. Então existe um único $u \in \text{Hom}_b((\varprojlim G_i, \mathcal{B}); (\varprojlim H_i, \mathcal{C}))$ tal que $v_i \circ u = \beta_i \circ u_i$ para todo $i \in I$, onde $u_i: \varprojlim G_i \rightarrow G_i$ e $v_i: \varprojlim H_i \rightarrow H_i$ são os homomorfismos de grupos canônicos.

$$\begin{array}{ccc} (G_j, \mathcal{B}_j) & \xrightarrow{\beta_j} & (H_j, \mathcal{C}_j) \\ u_{ij} \downarrow & & \downarrow v_{ij} \\ (G_i, \mathcal{B}_i) & \xrightarrow{\beta_i} & (H_i, \mathcal{C}_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\varprojlim G_i, \mathcal{B}) & \xrightarrow{u} & (\varprojlim H_i, \mathcal{C}) \\ u_i \downarrow & & \downarrow v_i \\ (G_i, \mathcal{B}_i) & \xrightarrow{\beta_i} & (H_i, \mathcal{C}_i) \end{array}$$

Demonstração. Para cada $i \in I$ ponhamos

$$\alpha_i = \beta_i \circ u_i \in \text{Hom}_b((\varprojlim G_i, \mathcal{B}); (H_i, \mathcal{C}_i)).$$

Como

$$v_{ij} \circ \alpha_j = (v_{ij} \circ \beta_j) \circ u_j = (\beta_i \circ u_{ij}) \circ u_j = \beta_i \circ (u_{ij} \circ u_j) = \beta_i \circ u_i = \alpha_i$$

para $i \leq j$, a Proposição 3.24 garante a existência de um único $u \in \text{Hom}_b((\varprojlim G_i, \mathcal{B}); (\varprojlim H_i, \mathcal{C}))$ tal que $v_i \circ u = \alpha_i$ para todo $i \in I$, concluindo assim a demonstração.

O próximo resultado é uma versão do teorema do isomorfismo para grupos bornológicos. Antes de enunciá-lo mencionemos que uma aplicação entre dois grupos bornológicos é um *isomorfismo de grupos bornológicos* quando é um isomorfismo de grupos limitado cuja inversa é limitada, e que dois grupos bornológicos são isomorfos quando há um isomorfismo de grupos bornológicos entre eles.

Teorema 3.26. *Sejam $(G, \mathcal{B})$ e $(H, \mathcal{C})$ dois grupos bornológicos e $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$, com u sobrejetor. Para que exista um (necessariamente único) isomorfismo $\tilde{u}: (G/\text{Ker}(u), \mathcal{D}) \rightarrow (H, \mathcal{C})$ de grupos bornológicos tal que $u = \tilde{u} \circ \pi$, onde $\pi: G \rightarrow G/\text{Ker}(u)$ é a sobrejeção canônica e $\mathcal{D} = \pi(\mathcal{B})$, é necessário e suficiente que para cada $C \in \mathcal{C}$ exista $B \in \mathcal{B}$ tal que $u^{-1}(C) \subset B + \text{Ker}(u)$.*

$$\begin{array}{ccc} (G, \mathcal{B}) & \xrightarrow{u} & (H, \mathcal{C}) \\ \pi \searrow & & \nearrow \tilde{u} \\ & (G/\text{Ker}(u), \mathcal{D}) & \end{array}$$

Demonstração. Estabeleçamos a necessidade da condição. Com efeito, seja $C \in \mathcal{C}$ arbitrário. Como, por hipótese, $(\tilde{u})^{-1}(C) \in \mathcal{D}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $(\tilde{u})^{-1}(C) = \pi(B)$, e daí resulta que $u^{-1}(C) = B + \text{Ker}(u)$.

Estabeleçamos, agora, a suficiência da condição. Primeiramente, vejamos que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$. É claro que $u(\mathcal{B})$ é mais fina do que $\mathcal{C}$, pois $u: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (H, \mathcal{C})$ é limitada. Por outro lado, se $C \in \mathcal{C}$ é arbitrário, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $u^{-1}(C) \subset B + \text{Ker}(u)$. Consequentemente, $C = u(u^{-1}(C)) \subset u(B)$, e $C \in u(\mathcal{B})$. Logo, $\mathcal{C}$ é mais fina do que $u(\mathcal{B})$, e $u(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$. Seja $\tilde{u}: G/\text{Ker}(u) \rightarrow H$ o único isomorfismo de grupos tal que $u = \tilde{u} \circ \pi$. Então $\tilde{u}: (G/\text{Ker}(u), \mathcal{D}) \rightarrow (H, \mathcal{C})$ é um isomorfismo de grupos bornológicos. De fato, $\tilde{u}$ é limitada, pois $\tilde{u}(\pi(B)) = u(B) \in \mathcal{C}$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$. E $(\tilde{u})^{-1}$ é limitada, pois $u(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$ e $(\tilde{u})^{-1}(u(B)) = \pi(B) \in \mathcal{D}$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$.

Isto conclui a demonstração do teorema.

Corolário 3.27. *Seja $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos. Para cada $i \in I$, sejam M_i um subgrupo de G_i , $u_i: G_i \rightarrow G_i/M_i$ a sobrejeção canônica e $\mathcal{C}_i = u_i(\mathcal{B}_i)$. Então os grupos bornológicos*

$$\left(\prod_{i \in I} (G_i/M_i), \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i \right) \quad \text{e} \quad \left(\left(\prod_{i \in I} G_i \right) / \left(\prod_{i \in I} M_i \right), \mathcal{C} \right)$$

são isomorfos, sendo $\prod_{i \in I} G_i$ munido da bornologia produto $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ e $\mathcal{C}$ a imagem direta de $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ pela sobrejeção canônica de $\prod_{i \in I} G_i$ em $\left(\prod_{i \in I} G_i \right) / \left(\prod_{i \in I} M_i \right)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.17, $\text{Ker} \left(\prod_{i \in I} u_i \right) = \prod_{i \in I} \text{Ker}(u_i) = \prod_{i \in I} M_i$, $\text{Im} \left(\prod_{i \in I} u_i \right) = \prod_{i \in I} \text{Im}(u_i) = \prod_{i \in I} (G_i/M_i)$ (logo, $\prod_{i \in I} u_i$ é sobrejetor) e $\prod_{i \in I} u_i \in \text{Hom}_b \left(\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i \right); \left(\prod_{i \in I} (G_i/M_i), \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i \right) \right)$. Além

disso, para $i \in I$ e $B_i \in \mathcal{B}_i$ arbitrários, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in I} u_i \right)^{-1} \left(\prod_{i \in I} u_i(B_i) \right) &= \prod_{i \in I} u_i^{-1}(u_i(B_i)) = \prod_{i \in I} B_i + \prod_{i \in I} M_i = \\ &= \prod_{i \in I} B_i + \text{Ker} \left(\prod_{i \in I} u_i \right). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do Teorema 3.26.

Corolário 3.28. *Sejam $(G, \mathcal{B})$ um grupo bornológico e $M \subset N$ dois subgrupos de G . Seja $u: G/M \rightarrow G/N$ o homomorfismo de grupos sobrejetor dado por $u(x + M) = x + N$, cujo núcleo é N/M , e sejam $\pi: G \rightarrow G/M$ e $\pi': G \rightarrow G/N$ as sobrejeções canônicas. Sejam $\mathcal{C} = \pi(\mathcal{B})$, $\mathcal{C}' = \pi'(\mathcal{B})$ e $\mathcal{D}$ a imagem direta de $\mathcal{C}$ pela sobrejeção canônica de G/M em $(G/M)/(N/M)$. Então os grupos bornológicos*

$$\left((G/M)/(N/M), \mathcal{D} \right) \quad e \quad (G/N, \mathcal{C}')$$

são isomorfos.

Demonstração. Primeiramente, $u \in \text{Hom}_b((G/M, \mathcal{C}); (G/N, \mathcal{C}'))$, pois $u(\pi(B)) = \pi'(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Se $C' \in \mathcal{C}'$ é arbitrário, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $C' = \pi'(B)$. Afirmamos que $u^{-1}(C') = \pi(B) + \text{Ker}(u)$. Realmente, se $x + M \in u^{-1}(C')$, $x + N = u(x + M) = \pi'(b) = b + N$ para algum $b \in B$, e então existe $y \in N$ tal que $x = b + y$. Logo, $x + M = \pi(x) = \pi(b) + \pi(y)$, onde $\pi(y) \in N/M = \text{Ker}(u)$, mostrando que $u^{-1}(C') \subset \pi(B) + \text{Ker}(u)$. Analogamente, $\pi(B) + \text{Ker}(u) \subset u^{-1}(C')$. Portanto, o resultado segue imediatamente do Teorema 3.26.

Teorema 3.29. *Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos, G um grupo e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G_i \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos. Então existe uma única bornologia de grupo $\mathcal{B}$ em G que é final para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$, no seguinte sentido: para todo grupo bornológico $(H, \mathcal{C})$ e para todo homomorfismo de grupos $u: G \rightarrow H$, $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ se e somente se $u \circ u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C}))$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} (G, \mathcal{B}) & \xrightarrow{u} & (H, \mathcal{C}) \\ u_i \swarrow & & \nearrow u \circ u_i \\ & (G_i, \mathcal{B}_i) & \end{array}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_1$ o conjunto de todos os subconjuntos de G da forma $T + u_{i_1}(B_{i_1}) + \dots + u_{i_m}(B_{i_m})$, onde T é um subconjunto finito de G , $m \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \dots, i_m \in I$, $B_{i_1} \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, B_{i_m} \in \mathcal{B}_{i_m}$. Claramente, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B = G$. E, para quaisquer dois elementos

$$B_1 = T_1 + u_{i_1}(B_{i_1}) + \dots + u_{i_m}(B_{i_m}) \text{ e } B_2 = T_2 + u_{j_1}(B_{j_1}) + \dots + u_{j_n}(B_{j_n})$$

de $\mathcal{B}_1$, tem-se

$$\begin{aligned} B_1 \cup B_2 \subset (T_1 \cup T_2) + u_{i_1}(B_{i_1} \cup \{0\}) + \cdots + u_{i_m}(B_{i_m} \cup \{0\}) \\ + u_{j_1}(C_{j_1} \cup \{0\}) + \cdots + u_{j_n}(C_{j_n} \cup \{0\}). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.10, existe uma (única) bornologia $\mathcal{B}$ em G para a qual $\mathcal{B}_1$ é um sistema fundamental de limitados. Além disso, $\mathcal{B}$ é uma bornologia de grupo em G , pois

$$B_1 - B_2 = (T_1 - T_2) + u_{i_1}(B_{i_1}) + \cdots + u_{i_m}(B_{i_m}) + u_{j_1}(-C_{j_1}) + \cdots + u_{j_n}(-C_{j_n}) \in \mathcal{B}_1.$$

Por construção, $u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (G, \mathcal{B}))$ para todo $i \in I$. Sejam $(H, \mathcal{C})$ e u como no enunciado do teorema. Então $u \circ u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C}))$ para todo $i \in I$ se $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$. Reciprocamente, se cada $u \circ u_i$ é limitada, então $u(B) \in \mathcal{C}$ para todo $B \in \mathcal{B}_1$; logo, $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$.

Finalmente, provemos a unicidade. Com efeito, seja $\tilde{\mathcal{B}}$ uma bornologia de grupo em G tal que $u_i: (G_i, \mathcal{B}_i) \rightarrow (G, \tilde{\mathcal{B}})$ é limitada para todo $i \in I$. Então $1_G: (G, \mathcal{B}) \rightarrow (G, \tilde{\mathcal{B}})$ é limitada, em vista da propriedade satisfeita por $\mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{B}$ é a bornologia de grupo mais fina que torna cada u_i limitada, provando a unicidade.

Isto conclui a demonstração do teorema.

Observação 3.30. (a) Se cada $\mathcal{B}_i$ é a bornologia discreta em G_i , $\mathcal{B}$ é a bornologia discreta em G .

(b) Se $G = \left[\bigcup_{i \in I} \text{Im}(u_i) \right]$, todos os conjuntos da forma $u_{i_1}(B_{i_1}) + \cdots + u_{i_m}(B_{i_m})$ constituem um sistema fundamental de limitados para $\mathcal{B}$.

Observação 3.31. Se $(G, \mathcal{B})$ é um grupo bornológico, H é um grupo e $u: G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos sobrejetor, então $u(\mathcal{B})$ coincide com a bornologia de grupo final para o par $((G, \mathcal{B}), u)$. Em particular, se K é um subgrupo de G e $\pi: G \rightarrow G/K$ é a sobrejeção canônica, então $\pi(\mathcal{B})$ coincide com a bornologia de grupo final para o par $((G, \mathcal{B}), \pi)$.

Definição 3.32. Seja $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos. Seja G o grupo $\bigoplus_{i \in I} G_i$ e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G_i \rightarrow G$ a injeção canônica. Se $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é a bornologia de grupo final para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$, $\left(G, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i \right)$ é dita a *soma direta bornológica* da família $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$.

Observação 3.33. Nas condições da Definição 3.32, a seguinte propriedade universal se verifica: para todo grupo bornológico $(H, \mathcal{C})$, a aplicação

$$u \in \text{Hom}_b \left(\left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i \right); (H, \mathcal{C}) \right) \mapsto (u_i \circ u)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C}))$$

é um isomorfismo de grupos.

Observação 3.34. Se $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ é uma família finita de grupos bornológicos, $\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i\right) = \left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i\right)$.

Proposição 3.35. Sejam $(G, \mathcal{B})$, $(M_i)_{i \in I}$, M , $(v_i)_{i \in I}$, $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ e v como na Proposição 3.21, e suponha que exista $j \in I$ tal que $M_j \in \mathcal{B}$. Então os grupos bornológicos $(G/M, \mathcal{D})$ e $(H, \mathcal{C})$ são isomorfos, onde $\mathcal{D}$ é a imagem direta de $\mathcal{B}$ pela sobrejeção canônica de G em G/M , $H = \text{Im}(v)$ e $\mathcal{C}$ é a bornologia induzida por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ em H .

Demonstração. Consideremos v como uma aplicação de G em H ; então v é um homomorfismo de grupos sobrejetor e a Proposição 3.21 assegura que $\text{Ker}(v) = M$ e $v \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$. Agora, para uma família arbitrária $(B_i)_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{B}$, tem-se

$$v^{-1}\left(H \cap \prod_{i \in I} v_i(B_i)\right) = \bigcap_{i \in I} (B_i + M_i) \subset B_j + M_j,$$

sendo $B_j + M_j$ um elemento de $\mathcal{B}$. Consequentemente, $v^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Portanto, pelo Teorema 3.26, $(G/M, \mathcal{D})$ e $(H, \mathcal{C})$ são isomorfos.

Proposição 3.36. Sejam $(G, \mathcal{B})$ um grupo bornológico, $(M_i)_{i \in I}$ uma família de subgrupos de G e M o subgrupo de G gerado por $\bigcup_{i \in I} M_i$. Para cada $i \in I$ seja u_i a inclusão de M_i em G , e seja $u: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow G$ o homomorfismo de grupos dado por $u((x_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} u_i(x_i)$. Então

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_{M_i}\right) \xrightarrow{u} (G, \mathcal{B}) \xrightarrow{v} (G/M, \mathcal{C}) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados, onde v é a sobrejeção canônica de G em G/M e $\mathcal{C} = v(\mathcal{B})$.

Demonstração. É conhecido ([6], A II.16) que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$. Como $v \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (G/M, \mathcal{C}))$, resta mostrar que $u \in \text{Hom}_b\left(\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_{M_i}\right); (G, \mathcal{B})\right)$. De fato, sejam $j \in I$ arbitrário e $\lambda_j: M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ a injeção canônica. Como $u_j \in \text{Hom}_b((M_j, \mathcal{B}_{M_j}); (G, \mathcal{B}))$ e $u \circ \lambda_j = u_j$, a limitação de u resulta da arbitrariedade de j em vista do Teorema 3.29.

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{i \in I} M_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_{M_i}\right) & \xrightarrow{u} & (G, \mathcal{B}) \\ & \searrow \lambda_j & \nearrow u_j \\ & (M_j, \mathcal{B}_{M_j}) & \end{array}$$

Proposição 3.37. Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ e $((H_i, \mathcal{C}_i))_{i \in I}$ duas famílias de grupos bornológicos. Para cada $i \in I$ seja $u_i: G_i \rightarrow H_i$ um homomorfismo de grupos e seja $\bigoplus_{i \in I} u_i$ a restrição de $\prod_{i \in I} u_i$ a $\bigoplus_{i \in I} G_i$.

Então $\bigoplus_{i \in I} u_i$ é um homomorfismo de grupos de $\bigoplus_{i \in I} G_i$ em $\bigoplus_{i \in I} H_i$ tal que $\text{Ker}\left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \text{Ker}(u_i)$ e $\text{Im}\left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \text{Im}(u_i)$. Além disso,

$$\bigoplus_{i \in I} u_i \in \text{Hom}_b\left(\left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i\right); \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right)\right)$$

se e somente se $u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H_i, \mathcal{C}_i))$ para todo $i \in I$.

Demonstração. É conhecido ([6], A II.14) que $\bigoplus_{i \in I} u_i$ é um homomorfismo de grupos de $\bigoplus_{i \in I} G_i$ em $\bigoplus_{i \in I} H_i$ satisfazendo as duas propriedades mencionadas. Para cada $j \in I$, sejam $\lambda_j: G_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G_i$ e $\mu_j: H_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_i$ as injeções canônicas.

Suponhamos que $\bigoplus_{i \in I} u_i \in \text{Hom}_b\left(\left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i\right); \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right)\right)$ e seja $j \in I$ arbitrário. Afirma-mos que w_j , a restrição a $\bigoplus_{i \in I} H_i$ da projeção de $\prod_{i \in I} H_i$ em H_j , pertence a $\text{Hom}_b\left(\left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right); (H_j, \mathcal{C}_j)\right)$. Realmente, como $w_j \circ \mu_k = 0$ para $k \neq j$ e $w_j \circ \mu_j = 1_{H_j}$, então $w_j \circ \mu_k \in \text{Hom}_b((H_k, \mathcal{C}_k); (H_j, \mathcal{C}_j))$ para todo $k \in I$, o que implica

$$w_j \in \text{Hom}_b\left(\left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right); (H_j, \mathcal{C}_j)\right) \text{ (Teorema 3.29).}$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right) & \xrightarrow{w_j} & (H_j, \mathcal{C}_j) \\ \mu_k \swarrow & & \nearrow w_j \circ \mu_k \\ & (H_k, \mathcal{C}_k) & \end{array}$$

Finalmente, como $u_j = w_j \circ \left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) \circ \lambda_j$, segue que $u_j \in \text{Hom}_b((G_j, \mathcal{B}_j); (H_j, \mathcal{C}_j))$.

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i\right) & \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} u_i} & \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right) \\ \lambda_j \uparrow & & \downarrow w_j \\ (G_j, \mathcal{B}_j) & \xrightarrow{u_j} & (H_j, \mathcal{C}_j) \end{array}$$

Reciprocamente, suponhamos que $u_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H_i, \mathcal{C}_i))$ para todo $i \in I$ e seja $j \in I$ arbitrário. Como $\left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) \circ \lambda_j = \mu_j \circ u_j$, então $\left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) \circ \lambda_j \in \text{Hom}_b\left((G_j, \mathcal{B}_j); \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right)\right)$ e da arbitrariedade

de j resulta a limitação de $\bigoplus_{i \in I} u_i$ (Teorema 3.29).

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i \right) & \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} u_i} & \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i \right) \\ \lambda_j \nwarrow & & \nearrow (\bigoplus_{i \in I} u_i) \circ \lambda_j \\ & (G_j, \mathcal{B}_j) & \end{array}$$

Corolário 3.38. *Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$, $((H_i, \mathcal{C}_i))_{i \in I}$ e $((L_i, \mathcal{D}_i))_{i \in I}$ três famílias de grupos bornológicos. Para cada $i \in I$ sejam $u_i: G_i \rightarrow H_i$ e $v_i: H_i \rightarrow L_i$ dois homomorfismos de grupos. Para que*

$$\left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i \right) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} u_i} \left(\bigoplus_{i \in I} H_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i \right) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} v_i} \left(\bigoplus_{i \in I} L_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{D}_i \right)$$

seja uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados, é necessário e suficiente que

$$(G_i, \mathcal{B}_i) \xrightarrow{u_i} (H_i, \mathcal{C}_i) \xrightarrow{v_i} (L_i, \mathcal{D}_i)$$

seja uma sequência exata de homomorfismos de grupos limitados para todo $i \in I$.

Demonstração. Imediata a partir da Proposição 3.37.

Definição 3.39. Seja $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$ um sistema indutivo de grupos bornológicos (isto significa que I é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, $(G_i, \mathcal{B}_i)$ é um grupo bornológico para todo $i \in I$, $u_{ji}: (G_i, \mathcal{B}_i) \rightarrow (G_j, \mathcal{B}_j)$ é um homomorfismo de grupos limitado para $i, j \in I$ com $i \leq j$, $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$ e $u_{kj} \circ u_{ji} = u_{ki}$ para $i, j, k \in I$ com $i \leq j \leq k$). Consideremos o grupo $\varinjlim G_i$, limite indutivo do sistema indutivo $(G_i, u_{ji})_{i \in I}$ de grupos, e seja $v_i: G_i \rightarrow \varinjlim G_i$ o homomorfismo de grupos canônico ($i \in I$); lembrar a Proposição 2.11 e as Definições 2.10 e 2.12. Se $\mathcal{B}$ é a bornologia de grupo final para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), v_i)_{i \in I}$, $(\varinjlim G_i, \mathcal{B})$ é dito o *limite indutivo bornológico* do sistema $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$.

Observação 3.40. Seja $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos. Consideremos I munido de sua relação de igualdade e ponhamos $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$. Então $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ii})_{i \in I}$ é um sistema indutivo de grupos bornológicos cujo limite indutivo bornológico coincide com $\left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i \right)$.

Proposição 3.41. *Nas condições da Definição 3.39, $(\varinjlim G_i, \mathcal{B})$ satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo grupo bornológico $(H, \mathcal{C})$ e para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ (onde $\alpha_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C}))$ para todo $i \in I$) tal que $\alpha_j \circ u_{ji} = \alpha_i$ para $i \leq j$, existe um único $u \in \text{Hom}_b((\varinjlim G_i, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ tal que $u \circ v_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} (G_i, \mathcal{B}_i) \xrightarrow{u_{ji}} (G_j, \mathcal{B}_j) & & (\varinjlim G_i, \mathcal{B}) \xrightarrow{u} (H, \mathcal{C}) \\ \alpha_i \searrow \swarrow \alpha_j & & v_i \nwarrow \nearrow \alpha_i \\ (H, \mathcal{C}) & & (G_i, \mathcal{B}_i) \end{array}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.11, existe um único homomorfismo de grupos $u: \varinjlim G_i \rightarrow H$ tal que $u \circ v_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$. Finalmente, como $\alpha_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C}))$ para todo $i \in I$, o Teorema 3.29 garante que $u \in \text{Hom}_b((\varinjlim G_i, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$.

Exemplo 3.42. Sejam $G, (G_i)_{i \in I}, u_{ji}$ e $\varinjlim G_i$ como no Exemplo 2.14. Consideremos a bornologia de grupo $\mathcal{B}$ em G para a qual os subgrupos finitamente gerados de G constituem um sistema fundamental de limitados e, para cada $i \in I$, seja $\mathcal{B}_i$ a bornologia trivial em G_i . Então $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$ é um sistema indutivo de grupos bornológicos. Além disso, usando a Proposição 3.41 e argumentando como no Exemplo 3.3 de [7], conclui-se que os grupos bornológicos $(G, \mathcal{B})$ e $(\varinjlim G_i, \tilde{\mathcal{B}})$ são isomorfos, onde $(\varinjlim G_i, \tilde{\mathcal{B}})$ designa o limite indutivo bornológico do sistema $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$.

Corolário 3.43. Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$ e $((H_i, \mathcal{C}_i), v_{ji})_{i \in I}$ dois sistemas indutivos de grupos bornológicos e sejam $(\varinjlim G_i, \mathcal{B})$ e $(\varinjlim H_i, \mathcal{C})$ os correspondentes limites indutivos bornológicos. Para cada $i \in I$ seja $\beta_i \in \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H_i, \mathcal{C}_i))$ tal que $v_{ji} \circ \beta_i = \beta_j \circ u_{ji}$ para $i \leq j$. Então existe um único $u \in \text{Hom}_b((\varinjlim G_i, \mathcal{B}); (\varinjlim H_i, \mathcal{C}))$ tal que $u \circ v_i = w_i \circ \beta_i$ para todo $i \in I$, onde $v_i: G_i \rightarrow \varinjlim G_i$ e $w_i: H_i \rightarrow \varinjlim H_i$ são os homomorfismos de grupos canônicos.

$$\begin{array}{ccc} (G_i, \mathcal{B}_i) & \xrightarrow{\beta_i} & (H_i, \mathcal{C}_i) \\ u_{ji} \downarrow & & \downarrow v_{ji} \\ (G_j, \mathcal{B}_j) & \xrightarrow{\beta_j} & (H_j, \mathcal{C}_j) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\varinjlim G_i, \mathcal{B}) & \xrightarrow{u} & (\varinjlim H_i, \mathcal{C}) \\ v_i \uparrow & & \uparrow w_i \\ (G_i, \mathcal{B}_i) & \xrightarrow{\beta_i} & (H_i, \mathcal{C}_i) \end{array}$$

Demonstração. Basta argumentar como na demonstração do Corolário 3.25, aplicando a Proposição 3.41 em lugar da Proposição 3.24.

Observação 3.44. (a) Sejam G e H dois grupos arbitrários e seja $\text{Hom}(G; H)$ o grupo abeliano de todos os homomorfismos de grupos de G e H . Como

$$\text{Hom}(G; H) = \text{Hom}_b((G, 2^G); (H, 2^H)),$$

onde 2^G (respectivamente 2^H) é a bornologia trivial em G (respectivamente H), então a Observação 3.16, as Proposições 3.17, 3.19, 3.20, 3.21, 3.24 e 3.35, os Corolários 3.18, 3.25, 3.27 e 3.28, e o Teorema 3.26 implicam os resultados correspondentes para grupos abelianos.

Por outro lado, os resultados que acabamos de mencionar implicam os resultados correspondentes para R -módulos bornológicos (Exemplo 3.8), R -módulos linearmente bornologizados (Exemplo 3.9), espaços vetoriais bornológicos sobre K e espaços vetoriais bornológicos K -convexos (Exemplo 3.10), e espaços vetoriais bornológicos convexos sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (Exemplo 3.11), como é fácil verificar.

(b) Sejam G, H e $\text{Hom}(G; H)$ como em (a). Como

$$\text{Hom}(G; H) = \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C})),$$

onde $\mathcal{B}$ (respectivamente $\mathcal{C}$) é a bornologia discreta em G (respectivamente H), então a Observação 3.33, as Proposições 3.36, 3.37 e 3.41 e os Corolários 3.38 e 3.43 implicam os resultados correspondentes para grupos abelianos.

4 Uma propriedade universal da bornologia da equilimitação

O objetivo principal desta seção é provar o Teorema 4.2, cuja demonstração é análoga àquela do caso linear do Teorema 3.6 de [7].

Proposição 4.1. *Sejam $((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ um sistema indutivo de grupos bornológicos e $((H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$ um sistema projetivo de grupos bornológicos. Para $(\alpha, \lambda), (\beta, \mu) \in I \times J$, com $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, seja $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}$ o homomorfismo de grupos de $\text{Hom}_b((G_\beta, \mathcal{B}_\beta); (H_\mu, \mathcal{C}_\mu))$ em $\text{Hom}_b((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))$ dado por $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(w) = v_{\lambda\mu} \circ w \circ u_{\beta\alpha}$. Então*

$$\left(\left(\text{Hom}_b((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda} \right), \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)} \right)_{(\alpha, \lambda) \in I \times J}$$

é um sistema projetivo de grupos bornológicos.

Demonstração. $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}$ é $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_\beta}^{\mathcal{C}_\mu} - \mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$ -limitada pois, para $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_\beta}^{\mathcal{C}_\mu}$ e $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ arbitrários, tem-se

$$\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(\mathfrak{X})(B_\alpha) = v_{\lambda\mu}(\mathfrak{X}(u_{\beta\alpha}(B_\alpha))) \in \mathcal{C}_\lambda.$$

Como as outras condições da Definição 3.22 são facilmente justificáveis, a demonstração está concluída.

Nas condições da Proposição 4.1, sejam $(G, \mathcal{B})$ o limite indutivo bornológico do sistema $((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ e $(H, \mathcal{C})$ o limite projetivo bornológico do sistema $((H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$. Para cada $\alpha \in I$ seja $u_\alpha: G_\alpha \rightarrow G$ o homomorfismo de grupos canônico, e para cada $\lambda \in J$ seja $v_\lambda: H \rightarrow H_\lambda$ o homomorfismo de grupos canônico. Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$ seja $\Psi_{(\alpha, \lambda)}$ o homomorfismo de grupos de $\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ em $\text{Hom}_b((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))$ dado por $\Psi_{(\alpha, \lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ u_\alpha$. Raciocinando como na demonstração da Proposição 4.1, verifica-se que $\Psi_{(\alpha, \lambda)}$ é $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} - \mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$ -limitada. Além disso, a família $(\Psi_{(\alpha, \lambda)}(u))_{(\alpha, \lambda) \in I \times J}$ pertence ao grupo $\varprojlim \text{Hom}_b((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))$ para qualquer $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$. Realmente, se $(\alpha, \lambda), (\beta, \mu) \in I \times J$ e $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, tem-se

$$\begin{aligned} \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}\left(\Psi_{(\beta, \mu)}(u)\right) &= v_{\lambda\mu} \circ \Psi_{(\beta, \mu)}(u) \circ u_{\beta\alpha} = (v_{\lambda\mu} \circ v_\mu) \circ u \circ (u_\beta \circ u_{\beta\alpha}) \\ &= v_\lambda \circ u \circ u_\alpha = \Psi_{(\alpha, \lambda)}(u). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} (G_\beta, \mathcal{B}_\beta) & \xrightarrow{w} & (H_\mu, \mathcal{C}_\mu) & & (G, \mathcal{B}) & \xrightarrow{u} & (H, \mathcal{C}) \\ u_{\beta\alpha} \uparrow & & \downarrow v_{\lambda\mu} & & u_\alpha \uparrow & & \downarrow v_\lambda \\ (G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(w)} & (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) & & (G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) & \xrightarrow{\Psi_{(\alpha, \lambda)}(u)} & (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) \end{array}$$

Podemos então enunciar o seguinte

Teorema 4.2. *Nas condições acima, o homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \Gamma: u \in \left(\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right) &\longmapsto \Gamma(u) = \left(\psi_{(\alpha, \lambda)}(u) \right)_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \\ &\in \left(\varprojlim \text{Hom}_b((G_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (H_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D} \right) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos bornológicos, onde o contradomínio de Γ é o limite projetivo bornológico do sistema dado na Proposição 4.1.

Antes de provar o Teorema 4.2, estabeleçamos um resultado auxiliar:

Lema 4.3. *Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$ uma família de grupos bornológicos, G um grupo e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G_i \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos. Suponhamos que $G = [\bigcup_{i \in I} \text{Im}(u_i)]$ e seja $\mathcal{B}$ a bornologia de grupo final para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$. Então, para todo grupo bornológico $(H, \mathcal{C})$ e para todo conjunto $\mathfrak{X}$ de homomorfismos de grupos de G em H , as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$;
- (b) $\mathfrak{X} \circ u_i = \{u \circ u_i; u \in \mathfrak{X}\} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}}$ para todo $i \in I$.

Demonstração do Lema 4.3. Como (a) claramente implica (b), provemos que (b) implica (a). Com efeito, seja $B \in \mathcal{B}$ arbitrário. Pela Observação 3.30(b), existem $i_1, \dots, i_m \in I$, $B_{i_1} \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, B_{i_m} \in \mathcal{B}_{i_m}$ tais que $B \subset u_{i_1}(B_{i_1}) + \dots + u_{i_m}(B_{i_m})$. Como, por hipótese, $(\mathfrak{X} \circ u_{i_k})(B_{i_k}) \in \mathcal{C}$ para $k = 1, \dots, m$, a inclusão

$$\mathfrak{X}(B) \subset (\mathfrak{X} \circ u_{i_1})(B_{i_1}) + \dots + (\mathfrak{X} \circ u_{i_m})(B_{i_m})$$

implica que $\mathfrak{X}(B) \in \mathcal{C}$. Portanto, $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Passemos à

Demonstração do Teorema 4.2. Primeiramente, provemos que Γ é um isomorfismo de grupos. Realmente, seja

$$g = (g_{(\alpha, \lambda)})_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \in \varprojlim \text{Hom}_b((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}); (H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda})) \text{ arbitrário.}$$

Fixemos $\lambda \in J$ e consideremos a família $(g_{(\alpha, \lambda)})_{\alpha \in I}$. Como

$$g_{(\beta, \lambda)} \circ u_{\beta\alpha} = v_{\lambda\lambda} \circ g_{(\beta, \lambda)} \circ u_{\beta\alpha} = \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \lambda)}(g_{(\beta, \lambda)}) = g_{(\alpha, \lambda)}$$

para $\alpha \leq \beta$, a Proposição 3.41 garante a existência de um único $\theta_{\lambda} \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda}))$ tal que $g_{(\alpha, \lambda)} = \theta_{\lambda} \circ u_{\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Por outro lado, tem-se $\theta_{\lambda} = v_{\lambda\mu} \circ \theta_{\mu}$ para $\lambda \leq \mu$. De fato, para todo $\alpha \in I$,

$$\theta_{\lambda} \circ u_{\alpha} = g_{(\alpha, \lambda)} = \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\alpha, \mu)}(g_{(\alpha, \mu)}) = v_{\lambda\mu} \circ g_{(\alpha, \mu)} \circ u_{\alpha\alpha} = v_{\lambda\mu} \circ g_{(\alpha, \mu)} = v_{\lambda\mu} \circ \theta_{\mu} \circ u_{\alpha},$$

e do fato de que todo elemento de G pode ser expresso como uma soma finita de elementos da forma $u_{\alpha}(x_{\alpha})$ resulta que $\theta_{\lambda} = v_{\lambda\mu} \circ \theta_{\mu}$. Logo, pela Proposição 3.24, existe um único $u \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ tal que $\theta_{\lambda} = v_{\lambda} \circ u$ para todo $\lambda \in J$. Além disso,

$$\Gamma(u) = (v_{\lambda} \circ u \circ u_{\alpha})_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} = (\theta_{\lambda} \circ u_{\alpha})_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} = (g_{(\alpha, \lambda)})_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} = g,$$

sendo u o único elemento de $\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ cuja imagem por Γ é g . Portanto, Γ é um isomorfismo de grupos.

Provemos que Γ é um isomorfismo de grupos bornológicos. Com efeito, seja $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ arbitrário. Como $\Gamma(\mathfrak{X}) \in \mathcal{D}$ se e somente se $\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{\alpha}}^{\mathcal{C}_{\lambda}}$ para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$ e como cada aplicação $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} - \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{\alpha}}^{\mathcal{C}_{\lambda}}$ -limitada, então $\Gamma(\mathfrak{X}) \in \mathcal{D}$. Logo, Γ é limitada. Finalmente, verifiquemos que Γ^{-1} é limitada. De fato, seja $\mathcal{Y}$ um conjunto $\mathcal{D}$ -limitado arbitrário. Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, seja $G_{(\alpha,\lambda)}$ o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} (g_{(\beta,\mu)})_{(\beta,\mu) \in I \times J} &\in \varprojlim \text{Hom}_b((G_{\beta}, \mathcal{B}_{\beta}); (H_{\mu}, \mathcal{C}_{\mu})) \mapsto g_{(\alpha,\lambda)} \\ &\in \text{Hom}_b((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}); (H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda})). \end{aligned}$$

Então $G_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{\alpha}}^{\mathcal{C}_{\lambda}}$ para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$. Pela bijetividade de Γ , para cada $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \in \mathcal{Y}$ existe um único $u_g \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ tal que $\Gamma(u_g) = g$. Afirmamos que $\mathfrak{X} = \{u_g; g \in \mathcal{Y}\}$ ($= \Gamma^{-1}(\mathcal{Y})$) pertence a $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Realmente, como $\mathcal{C}$ é a bornologia inicial para a família $((H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda}), v_{\lambda})_{\lambda \in J}$, $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se e somente se $v_{\lambda} \circ \mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{\lambda}}$ para todo $\lambda \in J$. Mas, para $\lambda \in J$ fixado, $G_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{Y}) = (v_{\lambda} \circ \mathfrak{X}) \circ u_{\alpha} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{\alpha}}^{\mathcal{C}_{\lambda}}$ para todo $\alpha \in I$, e o Lema 4.3 garante que $v_{\lambda} \circ \mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{\lambda}}$. Portanto, $\Gamma^{-1}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, provando que Γ^{-1} é limitada.

Isto conclui a demonstração.

Corolário 4.4. *Sejam $((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}))_{\alpha \in I}$ e $((H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda}))_{\lambda \in J}$ duas famílias de grupos bornológicos, $(G, \mathcal{B})$ a soma direta bornológica da família $((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}))_{\alpha \in I}$ e $(H, \mathcal{C})$ o produto bornológico da família $((H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda}))_{\lambda \in J}$. Então os grupos bornológicos*

$$\left(\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right)$$

e

$$\left(\prod_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \text{Hom}_b((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}); (H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda})), \prod_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{\alpha}}^{\mathcal{C}_{\lambda}} \right)$$

são isomorfos.

Demonstração. Consideremos I (respectivamente J) munido da relação de igualdade. Como, nesse caso, os grupos bornológicos

$$\left(\varprojlim \text{Hom}_b((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}); (H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda})), \mathcal{D} \right)$$

e

$$\left(\prod_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \text{Hom}_b((G_{\alpha}, \mathcal{B}_{\alpha}); (H_{\lambda}, \mathcal{C}_{\lambda})), \prod_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{\alpha}}^{\mathcal{C}_{\lambda}} \right)$$

coincidem, o resultado segue imediatamente do Teorema 4.2.

Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ij})_{i \in I}$ um sistema projetivo de grupos bornológicos e $(H, \mathcal{C})$ um grupo bornológico arbitrário. Para $i, j \in I$, $i \leq j$, consideremos o homomorfismo de grupos limitado

$$u_{ij}^H: v_j \in (\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_j, \mathcal{B}_j)), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_j}) \mapsto u_{ij} \circ v_j \in (\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_i}).$$

Pela Proposição 4.1,

$$\left(\left(\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_i} \right), u_{ij}^H \right)_{i \in I}$$

é um sistema projetivo de grupos bornológicos.

Proposição 4.5. *Seja $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ij})_{i \in I}$ como acima e seja $(G, \mathcal{B})$ o limite projetivo bornológico desse sistema. Sejam $(H, \mathcal{C})$ e $(L, \mathcal{D})$ dois grupos bornológicos arbitrários e $u \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (L, \mathcal{D}))$ arbitrário, e consideremos os homomorfismos de grupos limitados*

$$\tilde{u}: v \in (\text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G, \mathcal{B})), \mathcal{E}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}) \mapsto v \circ u \in (\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G, \mathcal{B})), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})$$

e

$$\tilde{u}_i: v_i \in (\text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}_i}) \mapsto v_i \circ u \in (\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_i}) (i \in I).$$

Então $(\tilde{u}_i)_{i \in I}$ é um sistema projetivo de homomorfismos de grupos limitados de $((\text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}_i}), u_{ij}^L)_{i \in I}$ em $((\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_i}), u_{ij}^H)_{i \in I}$. Além disso,

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G, \mathcal{B})), \mathcal{E}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{R_L} & (\varprojlim \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \tilde{\mathcal{D}}) \\ \tilde{u} \downarrow & & \downarrow \varprojlim \tilde{u}_i \\ (\text{Hom}_b((L, \mathcal{C}); (G, \mathcal{B})), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{R_H} & (\varprojlim \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \tilde{\mathcal{D}}) \end{array}$$

é um diagrama comutativo de homomorfismos de grupos limitados, onde $(\varprojlim \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \tilde{\mathcal{D}})$ (respectivamente $(\varprojlim \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \tilde{\mathcal{D}})$) é o limite projetivo bornológico do sistema $((\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_i}), u_{ij}^H)_{i \in I}$ (respectivamente $((\text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i)), \mathcal{E}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}_i}), u_{ij}^L)_{i \in I}$), $\varprojlim \tilde{u}_i((v_i)_{i \in I}) = (\tilde{u}_i(v_i))_{i \in I}$ para $(v_i)_{i \in I} \in \varprojlim \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i))$ (obviamente, $\varprojlim \tilde{u}_i$ é um homomorfismo de grupos), $R_H(v) = (u_i \circ v)_{i \in I}$ para $v \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G, \mathcal{B}))$ e $R_L(v) = (u_i \circ v)_{i \in I}$ para $v \in \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G, \mathcal{B}))$, sendo $u_i: G \rightarrow G_i$ o homomorfismo de grupos canônico.

Demonstração. Para provar a primeira afirmação devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_j, \mathcal{B}_j)) & \xrightarrow{\tilde{u}_j} & \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_j, \mathcal{B}_j)) \\ u_{ij}^L \downarrow & & \downarrow u_{ij}^H \\ \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i)) & \xrightarrow{\tilde{u}_i} & \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i)) \end{array}$$

é comutativo para $i \leq j$ ([5], p.79). Realmente, para qualquer $v_j \in \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_j, \mathcal{B}_j))$,

$$(u_{ij}^H \circ \tilde{u}_j)(v_j) = u_{ij} \circ (v_j \circ u) = (u_{ij} \circ v_j) \circ u = \tilde{u}_i(u_{ij} \circ v_j) = (\tilde{u}_i \circ u_{ij}^L)(v_j).$$

Para provar a segunda afirmação, notemos inicialmente que $\varprojlim \tilde{u}_i$ é uma aplicação limitada. De fato, para cada $i \in I$ seja T_i^H o homomorfismo de grupos de $\varprojlim \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i))$ em $\text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (G_i, \mathcal{B}_i))$ dado por $T_i^H((w_j)_{j \in I}) = w_i$. Então, pelo Teorema 1.11, $\varprojlim \tilde{u}_i$ é limitada se e somente se $T_i^H \circ \varprojlim \tilde{u}_i$ é limitada para todo $i \in I$. Mas, para cada $i \in I$,

$$(T_i^H \circ \varprojlim \tilde{u}_i)((v_j)_{j \in I}) = T_i^H((\tilde{u}_j(v_j))_{j \in I}) = \tilde{u}_i(v_i) = v_i \circ u$$

para qualquer $(v_j)_{j \in I} \in \varprojlim \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G_i, \mathcal{B}_i))$, e daí resulta a limitação de $T_i^H \circ \varprojlim \tilde{u}_i$. Além disso, R_H e R_L são isomorfismos de grupos bornológicos em virtude do Teorema 4.2. Finalmente, para qualquer $v \in \text{Hom}_b((L, \mathcal{D}); (G, \mathcal{B}))$,

$$\begin{aligned} (\varprojlim \tilde{u}_i \circ R_L)(v) &= \varprojlim \tilde{u}_i((u_i \circ v)_{i \in I}) = (\tilde{u}_i(u_i \circ v))_{i \in I} \\ &= ((u_i \circ v) \circ u)_{i \in I} = (u_i \circ (v \circ u))_{i \in I} = R_H(v \circ u) = (R_H \circ \tilde{u})(v), \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração da segunda afirmação.

Sejam $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$ um sistema indutivo de grupos bornológicos e $(H, \mathcal{C})$ um grupo bornológico arbitrário. Para $i, j \in I$, $i \leq j$, consideremos o homomorfismo de grupos limitado

$$u_{ij}^H: \gamma_j \in (\text{Hom}_b((G_j, \mathcal{B}_j); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_j}^{\mathcal{C}}) \mapsto \gamma_j \circ u_{ji} \in (\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}}).$$

Pela Proposição 4.1,

$$\left(\left(\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}} \right), u_{ij}^H \right)_{i \in I}$$

é um sistema projetivo de grupos bornológicos.

Proposição 4.6. *Seja $((G_i, \mathcal{B}_i), u_{ji})_{i \in I}$ como acima e seja $(G, \mathcal{B})$ o limite indutivo bornológico desse sistema. Sejam $(H, \mathcal{C})$ e $(L, \mathcal{D})$ dois grupos bornológicos arbitrários e $u \in \text{Hom}_b((H, \mathcal{C}); (L, \mathcal{D}))$ arbitrário, e consideremos os homomorfismos de grupos limitados*

$$\tilde{u}: v \in (\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) \mapsto u \circ v \in (\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (L, \mathcal{D})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}})$$

e

$$\tilde{u}_i: \gamma_i \in (\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}}) \mapsto u \circ \gamma_i \in (\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (L, \mathcal{D})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{D}}) (i \in I).$$

Então $(\tilde{u}_i)_{i \in I}$ é um sistema projetivo de homomorfismos de grupos limitados de $((\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}}), u_{ij}^H)_{i \in I}$ em $((\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (L, \mathcal{D})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{D}}), u_{ij}^L)_{i \in I}$. Além disso,

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{R_H} & (\varprojlim \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \tilde{\mathcal{E}}) \\ \tilde{u} \downarrow & & \downarrow \varprojlim \tilde{u}_i \\ (\text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (L, \mathcal{D})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}) & \xrightarrow[R_L]{} & (\varprojlim \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (L, \mathcal{D})), \tilde{\tilde{\mathcal{E}}}) \end{array}$$

é um diagrama comutativo de homomorfismos de grupos limitados, onde $(\varprojlim \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \tilde{\mathcal{E}})$ (respectivamente $(\varprojlim \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (L, \mathcal{D})), \tilde{\tilde{\mathcal{E}}})$) é o limite projetivo bornológico do sistema $((\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}}), u_{ij}^H)_{i \in I}$ (respectivamente $((\text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (L, \mathcal{D})), \mathcal{E}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{D}}), u_{ij}^L)_{i \in I}$), $\varprojlim \tilde{u}_i((\gamma_i)_{i \in I}) = (\tilde{u}_i(\gamma_i))_{i \in I}$ para $(\gamma_i)_{i \in I} \in \varprojlim \text{Hom}_b((G_i, \mathcal{B}_i); (H, \mathcal{C}))$ (obviamente, $\varprojlim \tilde{u}_i$ é um homomorfismo de grupos), $R_H(v) = (v \circ v_i)_{i \in I}$ para $v \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (H, \mathcal{C}))$ e $R_L(v) = (v \circ v_i)_{i \in I}$ para $v \in \text{Hom}_b((G, \mathcal{B}); (L, \mathcal{D}))$, sendo $v_i: G_i \rightarrow G$ o homomorfismo de grupos canônico.

Demonstração. Análoga à da Proposição 4.5.

5 Uma propriedade universal da bornologia da equicontinuidade

O objetivo desta seção é provar o Teorema 5.12, cuja demonstração é análoga àquela do Teorema 4 de [8]. Mas antes, vejamos alguns preliminares sobre grupos topológicos.

Proposição 5.1 ([23], Teorema 1.9). *Sejam $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos, G um grupo e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G \rightarrow G_i$ um homomorfismo de grupos. Se τ é a topologia inicial para a família $((G_i, \tau_i), u_i)_{i \in I}$ ([3], pp. 28-31), então (G, τ) é um grupo topológico. Logo, para todo grupo topológico (H, θ) e para todo homomorfismo de grupos $u: H \rightarrow G$, tem-se que $u \in \text{Hom}_c((H, \theta); (G, \tau))$ se e somente se $u_i \circ u \in \text{Hom}_c((H, \theta); (G_i, \tau_i))$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} (H, \theta) & \xrightarrow{u} & (G, \tau) \\ u_i \circ u \searrow & & \swarrow u_i \\ & (G_i, \tau_i) & \end{array}$$

Como consequência imediata da Proposição 5.1, temos o seguinte

Corolário 5.2. (a) *Se (G, τ) é um grupo topológico e M é um subgrupo de G , então (M, τ_M) é um grupo topológico, onde τ_M é a topologia induzida por τ em M .*

(b) *Sejam $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos, $\prod_{i \in I} G_i$ o grupo produto e $\prod_{i \in I} \tau_i$ a topologia produto em $\prod_{i \in I} G_i$. Então $\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \tau_i \right)$ é um grupo topológico.*

(c) *Se $(\tau_i)_{i \in I}$ é uma família de topologias de grupo em um grupo G , então $(G, \sup_{i \in I} \tau_i)$ é um grupo topológico.*

Definição 5.3. Seja $((G_i, \tau_i), u_{ij})_{i \in I}$ um sistema projetivo de grupos topológicos (isto significa que I é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, (G_i, τ_i) é um grupo topológico para todo $i \in I$, $u_{ij} \in \text{Hom}_c((G_j, \tau_j); (G_i, \tau_i))$ para $i, j \in I$ com $i \leq j$, $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$ e $u_{ij} \circ u_{jk} = u_{ik}$ para $i, j, k \in I$ com $i \leq j \leq k$). Para cada $i \in I$ seja $u_i: \varprojlim G_i \rightarrow G_i$ o homomorfismo de grupos canônico (Definição 2.3) e seja τ a topologia inicial para a família $((G_i, \tau_i), u_i)_{i \in I}$. O grupo topológico $(\varprojlim G_i, \tau)$ (Proposição 5.1) é dito o *limite projetivo topológico* do sistema $((G_i, \tau_i), u_{ij})_{i \in I}$.

Observação 5.4. Seja $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos. Munamos I da relação de igualdade e definamos $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$. Então $((G_i, \tau_i), u_{ii})_{i \in I}$ é um sistema projetivo de grupos topológicos cujo limite projetivo topológico coincide com $\left(\prod_{i \in I} G_i, \prod_{i \in I} \tau_i \right)$.

Argumentando como na demonstração da Proposição 3.24, usando a Proposição 5.1 em lugar do Teorema 1.11, obtém-se a seguinte

Proposição 5.5. *Nas condições da Definição 5.3, $(\varprojlim G_i, \tau)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo grupo topológico (H, θ) e para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ (onde $\alpha_i \in \text{Hom}_c((H, \theta); (G_i, \tau_i))$ para todo $i \in I$) tal que $u_{ij} \circ \alpha_j = \alpha_i$ para $i \leq j$, existe um único $u \in \text{Hom}_c((H, \theta); (\varprojlim G_i, \tau))$ tal que $u_i \circ u = \alpha_i$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} (G_j, \tau_j) & \xrightarrow{u_{ij}} & (G_i, \tau_i) \\ \alpha_j \swarrow & & \nearrow \alpha_i \\ (H, \theta) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (H, \theta) & \xrightarrow{u} & (\varprojlim G_i, \tau) \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow u_i \\ (G_i, \tau_i) & & \end{array}$$

Como todo grupo abeliano topológico é um $\mathbb{Z}$ -módulo topológico ($\mathbb{Z}$ munido da topologia discreta), a Proposição 1.4.2 de [2] fornece o seguinte resultado:

Proposição 5.6. *Sejam $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos, G um grupo e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G_i \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos. Então existe uma única topologia de grupo τ em G que é final para a família $((G_i, \tau_i), u_i)_{i \in I}$, no seguinte sentido: para todo grupo topológico (H, θ) e para todo homomorfismo de grupos $u: G \rightarrow H$, tem-se que $u \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ se e somente se $u \circ u_i \in \text{Hom}_c((G_i, \tau_i); (H, \theta))$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} (G, \tau) & \xrightarrow{u} & (H, \theta) \\ u_i \swarrow & & \nearrow u \circ u_i \\ (G_i, \tau_i) & & \end{array}$$

Definição 5.7. Sejam $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos, G o grupo $\bigoplus_{i \in I} G_i$ e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G_i \rightarrow G$ a injeção canônica. Se $\bigoplus_{i \in I} \tau_i$ é a topologia de grupo final para a família $((G_i, \tau_i), u_i)_{i \in I}$, $\left(G, \bigoplus_{i \in I} \tau_i\right)$ é dita a *soma direta topológica* da família $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$.

Definição 5.8. Seja $((G_i, \tau_i), u_{ji})_{i \in I}$ um sistema indutivo de grupos topológicos (isto significa que I é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, (G_i, τ_i) é um grupo topológico para todo $i \in I$, $u_{ji} \in \text{Hom}_c((G_i, \tau_i); (G_j, \tau_j))$ para $i, j \in I$ com $i \leq j$, $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$ e $u_{kj} \circ u_{ji} = u_{ki}$ para $i, j, k \in I$ com $i \leq j \leq k$). Para cada $i \in I$ seja $v_i: G_i \rightarrow \varinjlim G_i$ o homomorfismo de grupos canônico (lembrar a Proposição 2.11 e a Definição 2.12) e seja τ a topologia de grupo final para a família $((G_i, \tau_i), v_i)_{i \in I}$. O grupo topológico $(\varinjlim G_i, \tau)$ é dito o *limite indutivo topológico* do sistema $((G_i, \tau_i), u_{ji})_{i \in I}$.

Observação 5.9. Seja $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos. Munamos I da relação de igualdade e ponhamos $u_{ii} = 1_{G_i}$ para todo $i \in I$. Então $((G_i, \tau_i), u_{ii})_{i \in I}$ é um sistema indutivo de grupos topológicos cujo limite indutivo topológico coincide com $\left(\bigoplus_{i \in I} G_i, \bigoplus_{i \in I} \tau_i\right)$.

Argumentando como na demonstração da Proposição 3.41, usando a Proposição 5.6 em lugar do Teorema 3.29, obtém-se a seguinte

Proposição 5.10. *Nas condições da Definição 5.8, $(\varinjlim G_i, \tau)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo grupo topológico (H, θ) e para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ (onde $\alpha_i \in \text{Hom}_c((G_i, \tau_i); (H, \theta))$) para todo $i \in I$) tal que $\alpha_j \circ u_{ji} = \alpha_i$ para $i \leq j$, existe um único $u \in \text{Hom}_c((\varinjlim G_i, \tau); (H, \theta))$ tal que $u \circ v_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$.*

$$\begin{array}{ccc} (G_i, \tau_i) & \xrightarrow{u_{ji}} & (G_j, \tau_j) \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow \alpha_j \\ & (H, \theta) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\varinjlim G_i, \tau) & \xrightarrow{u} & (H, \theta) \\ v_i \nwarrow & & \nearrow \alpha_i \\ & (G_i, \tau_i) & \end{array}$$

Proposição 5.11. *Sejam $((G_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ um sistema indutivo de grupos topológicos e $((H_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$ um sistema projetivo de grupos topológicos. Para $(\alpha, \lambda), (\beta, \mu) \in I \times J$, com $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, seja $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}$ o homomorfismo de grupos de $\text{Hom}_c((G_\beta, \tau_\beta); (H_\mu, \theta_\mu))$ em $\text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda))$ dado por $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(w) = v_{\lambda\mu} \circ w \circ u_{\beta\alpha}$. Então*

$$\left(\left(\text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda)), \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda} \right), \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)} \right)_{(\alpha, \lambda) \in I \times J}$$

é um sistema projetivo de grupos bornológicos.

Demonstração. Mostremos que $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}$ é $\mathcal{E}_{\tau_\beta}^{\theta_\mu} - \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$ -limitada. De fato, sejam $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\tau_\beta}^{\theta_\mu}$ e V_λ uma θ_λ -vizinhança de 0 em H_λ . Como $v_{\lambda\mu}: (H_\mu, \theta_\mu) \rightarrow (H_\lambda, \theta_\lambda)$ é contínua, existe uma θ_μ -vizinhança V_μ de 0 em H_μ tal que $v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda$; e, como $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\tau_\beta}^{\theta_\mu}$, existe uma τ_β -vizinhança U_β de 0 em G_β tal que $\mathfrak{X}(U_\beta) \subset V_\mu$. Finalmente, como $u_{\beta\alpha}: (G_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (G_\beta, \tau_\beta)$ é contínua, existe uma τ_α -vizinhança U_α de 0 em G_α tal que $u_{\beta\alpha}(U_\alpha) \subset U_\beta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(\mathfrak{X})(U_\alpha) &= (v_{\lambda\mu} \circ \mathfrak{X} \circ u_{\beta\alpha})(U_\alpha) = (v_{\lambda\mu} \circ \mathfrak{X})(u_{\beta\alpha}(U_\alpha)) \\ &\subset (v_{\lambda\mu} \circ \mathfrak{X})(U_\beta) \subset v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda, \end{aligned}$$

e $\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(\mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$. Como as outras condições da Definição 3.22 são facilmente justificáveis, a demonstração está concluída.

Nas condições da Proposição 5.11, sejam (G, τ) o limite indutivo topológico do sistema $((G_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ e (H, θ) o limite projetivo topológico do sistema $((H_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$. Para cada $\alpha \in I$ seja $u_\alpha: G_\alpha \rightarrow G$ o homomorfismo de grupos canônico, e para cada $\lambda \in J$ seja $v_\lambda: H \rightarrow H_\lambda$ o homomorfismo de grupos canônico. Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$ seja $\Psi_{(\alpha, \lambda)}$ o homomorfismo de grupos de $\text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ em $\text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda))$ dado por $\Psi_{(\alpha, \lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ u_\alpha$. Raciocinando como na demonstração da Proposição 5.11, verifica-se que $\Psi_{(\alpha, \lambda)}$ é $\mathcal{E}_\tau^\theta - \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$ -limitada. Além disso, a família $(\Psi_{(\alpha, \lambda)}(u))_{(\alpha, \lambda) \in I \times J}$ pertence ao grupo $\varprojlim \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda))$ para qualquer $u \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$. Realmente, se $(\alpha, \lambda), (\beta, \mu) \in I \times J$ e $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, tem-se

$$\Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\beta, \mu)}(\Psi_{(\beta, \mu)}(u)) = \Psi_{(\alpha, \lambda)}(u).$$

$$\begin{array}{ccc}
(G_\beta, \tau_\beta) & \xrightarrow{w} & (H_\mu, \theta_\mu) \\
u_{\beta\alpha} \uparrow & & \downarrow v_{\lambda\mu} \\
(G_\alpha, \tau_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_{(\alpha,\lambda)}^{(\beta,\mu)}(w)} & (H_\lambda, \theta_\lambda)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(G, \tau) & \xrightarrow{u} & (H, \theta) \\
u_\alpha \uparrow & & \downarrow v_\lambda \\
(G_\alpha, \tau_\alpha) & \xrightarrow{\Psi_{(\alpha,\lambda)}(u)} & (H_\lambda, \theta_\lambda)
\end{array}$$

Podemos então enunciar o

Teorema 5.12. *Nas condições acima, o homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned}
\Gamma: u \in (\text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta)), \mathcal{E}_\tau^\theta) &\mapsto \Gamma(u) = (\Psi_{(\alpha,\lambda)}(u))_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \\
&\in (\varprojlim \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda)), \mathcal{D})
\end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos bornológicos, onde o contradomínio de Γ é o limite projetivo bornológico do sistema dado na Proposição 5.11.

Antes de provar o Teorema 5.12, estabeleçamos um resultado auxiliar:

Lema 5.13. *Sejam $((G_i, \tau_i))_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos, G um grupo e, para cada $i \in I$, seja $u_i: G_i \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos. Seja τ a topologia de grupo final para a família $((G_i, \mathcal{B}_i), u_i)_{i \in I}$. Então, para todo grupo topológico (H, θ) e para conjunto $\mathfrak{X}$ de homomorfismos de grupos de G em H , as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$;
- (b) $\mathfrak{X} \circ u_i = \{u \circ u_i; u \in \mathfrak{X}\} \in \mathcal{E}_{\tau_i}^\theta$ para todo $i \in I$.

Demonstração do Lema 5.13. Como (a) claramente implica (b), provemos que (b) implica (a). Com efeito, seja $\mathcal{F}(\mathfrak{X}; H)$ o grupo abeliano das funções de $\mathfrak{X}$ em H , munido da topologia da convergência uniforme (τ_u) , a qual o torna um grupo topológico. Consideremos o homomorfismo de grupos $g: G \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{X}; H)$ dado por $g(x)(u) = u(x)$ para $x \in G$ e $u \in \mathfrak{X}$. É claro que $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ se e somente se $g: (G, \tau) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathfrak{X}; H), \tau_u)$ é contínuo. E, pela Proposição 5.6, $g: (G, \tau) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathfrak{X}; H), \tau_u)$ é contínuo se e somente se $g \circ u_i: (G_i, \tau_i) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathfrak{X}; H), \tau_u)$ é contínuo para todo $i \in I$. Fixemos então $i \in I$ e seja V uma θ -vizinhança de 0 em H . Como, por hipótese, $\mathfrak{X} \circ u_i \in \mathcal{E}_{\tau_i}^\theta$, existe uma τ_i -vizinhança U_i de 0 em G_i tal que $(\mathfrak{X} \circ u_i)(U_i) \subset V$. Portanto,

$$(g \circ u_i)(U_i) \subset \{h \in \mathcal{F}(\mathfrak{X}; H); h(\mathfrak{X}) \subset V\},$$

mostrando a continuidade de $g \circ u_i$ e concluindo a demonstração de (a).

Passemos à

Demonstração do Teorema 5.12. Primeiramente, provemos que Γ é um isomorfismo de grupos. Realmente, seja $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda) \in I \times J} \in \varprojlim \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda))$ arbitrário. Fixemos $\lambda \in J$ e consideremos a família $(g_{(\alpha,\lambda)})_{\alpha \in I}$. Como

$$g_{(\beta,\lambda)} \circ u_{\beta\alpha} = v_{\lambda\lambda} \circ g_{(\beta,\lambda)} \circ u_{\beta\alpha} = \Phi_{(\alpha,\lambda)}^{(\beta,\lambda)}(g_{(\beta,\lambda)}) = g_{(\alpha,\lambda)}$$

para $\alpha \leq \beta$, a Proposição 5.10 garante a existência de um único $\theta_\lambda \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H_\lambda, \theta_\lambda))$ tal que $g_{(\alpha, \lambda)} = \theta_\lambda \circ u_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por outro lado, tem-se $\theta_\lambda = v_{\lambda\mu} \circ \theta_\mu$ para $\lambda \leq \mu$. De fato, para todo $\alpha \in I$,

$$\theta_\lambda \circ u_\alpha = g_{(\alpha, \lambda)} = \Phi_{(\alpha, \lambda)}^{(\alpha, \mu)}(g_{(\alpha, \mu)}) = v_{\lambda\mu} \circ g_{(\alpha, \mu)} \circ u_{\alpha\alpha} = v_{\lambda\mu} \circ g_{(\alpha, \mu)} = v_{\lambda\mu} \circ \theta_\mu \circ u_\alpha,$$

e do fato de que todo elemento de G pode ser expresso como uma soma finita de elementos da forma $u_\alpha(x_\alpha)$ resulta que $\theta_\lambda = v_{\lambda\mu} \circ \theta_\mu$. Logo, pela Proposição 5.5, existe um único $u \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ tal que $\theta_\lambda = v_\lambda \circ u$ para todo $\lambda \in J$. Além disso,

$$\Gamma(u) = (v_\lambda \circ u \circ u_\alpha)_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} = (\theta_\lambda \circ u_\alpha)_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} = (g_{(\alpha, \lambda)})_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} = g,$$

sendo u o único elemento de $\text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ cuja imagem por Γ é g . Portanto, Γ é um isomorfismo de grupos.

Provemos que Γ é um isomorfismo de grupos bornológicos. Com efeito, seja $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ arbitrário. Como $\Gamma(\mathfrak{X}) \in \mathcal{D}$ se e somente se $\Psi_{(\alpha, \lambda)}(\mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$ para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$ e como cada aplicação $\Psi_{(\alpha, \lambda)}$ é $\mathcal{E}_\tau^\theta - \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$ -limitada, então $\Gamma(\mathfrak{X}) \in \mathcal{D}$. Logo, Γ é limitada. Finalmente, verifiquemos que Γ^{-1} é limitada. De fato, seja $\mathcal{Y}$ um conjunto $\mathcal{D}$ -limitado arbitrário. Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, seja $G_{(\alpha, \lambda)}$ o homomorfismo de grupos

$$(g_{(\beta, \mu)})_{(\beta, \mu) \in I \times J} \in \varprojlim \text{Hom}_c((G_\beta, \tau_\beta); (H_\mu, \theta_\mu)) \mapsto g_{(\alpha, \lambda)} \\ \in \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda)).$$

Então $G_{(\alpha, \lambda)}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$ para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$. Pela bijetividade de Γ , para cada $g = (g_{(\alpha, \lambda)})_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \in \mathcal{Y}$ existe um único $u_g \in \text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta))$ tal que $\Gamma(u_g) = g$. Afirmamos que $\mathfrak{X} = \{u_g; g \in \mathcal{Y}\}$ ($= \Gamma^{-1}(\mathcal{Y})$) pertence a $\mathcal{E}_\tau^\theta$. Realmente, como θ é topologia inicial para a família $((H_\lambda, \theta_\lambda), v_\lambda)_{\lambda \in J}$, $\mathfrak{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ se e somente se $v_\lambda \circ \mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\tau_\lambda}^{\theta_\lambda}$ para todo $\lambda \in J$. Mas, para $\lambda \in J$ fixado, $G_{(\alpha, \lambda)}(\mathcal{Y}) = (v_\lambda \circ \mathfrak{X}) \circ u_\alpha \in \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$ para todo $\alpha \in I$, e o Lema 5.13 fornece $v_\lambda \circ \mathfrak{X} \in \mathcal{E}_{\tau_\lambda}^{\theta_\lambda}$. Portanto, $\Gamma^{-1}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}_\tau^\theta$, mostrando que Γ^{-1} é limitada.

Isto conclui a demonstração.

Corolário 5.14. *Sejam $((G_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ e $((H_\lambda, \theta_\lambda))_{\lambda \in J}$ duas famílias de grupos topológicos, (G, τ) a soma direta topológica da família $((G_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ e (H, θ) o produto topológico da família $((H_\lambda, \theta_\lambda))_{\lambda \in J}$. Então os grupos bornológicos*

$$\left(\text{Hom}_c((G, \tau); (H, \theta)), \mathcal{E}_\tau^\theta \right) \text{ e } \left(\prod_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda)), \prod_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda} \right)$$

são isomorfos.

Demonstração. Consideremos I (respectivamente J) munido da relação de igualdade. Como, nesse caso, os grupos bornológicos

$$\left(\varprojlim \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda)), \mathcal{D} \right)$$

e

$$\left(\prod_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \text{Hom}_c((G_\alpha, \tau_\alpha); (H_\lambda, \theta_\lambda)), \prod_{(\alpha, \lambda) \in I \times J} \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda} \right)$$

coincidem, o resultado segue imediatamente do Teorema 5.12.

Referências

- [1] M. Akkar, Espaces vectoriels bornologiques K -convexes, *Indag. Math.* 73 (1970), 82-95.
- [2] J. Aragona, Sobre os Módulos Topológicos, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística da USP (1973).
- [3] N. Bourbaki, Topologie Générale, Chapitres 1 et 2, Quatrième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1142, Hermann (1965).
- [4] N. Bourbaki, Topologie Générale, Chapitre 10, Seconde édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1084, Hermann (1967).
- [5] N. Bourbaki, Théorie des Ensembles, Chapitre 3, Seconde édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1243, Hermann (1967).
- [6] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann (1970).
- [7] M.F. Farias & D.P. Pombo Jr., A universal property of bornological modules and topological modules of multilinear mappings, *Indian J. Math.* 53 (2011), 125-161.
- [8] M.F. Farias & D.P. Pombo Jr., A universal property of the equicontinuous bornology on modules of linear mappings, *Internat. Math. Forum* 6 (2011), 2143-2152.
- [9] A. Grothendieck & J.A. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 166, Springer-Verlag (1971).
- [10] H. Hogbe-Nlend, Les racines historiques de la bornologie moderne, *Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, 10 no. 1 (1970-1971), exp. no. 9, 1-6.
- [11] H. Hogbe-Nlend, Distributions et Bornologie, *Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Série Matemática* no. 3 (1973).
- [12] H. Hogbe-Nlend, Bornologies and Functional Analysis, *Notas de Matemática* 62, North-Holland (1977).
- [13] C. Houzel, Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude, *Math. Ann.* 205 (1973), 13-54.
- [14] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, *Collection Enseignement des sciences* 20, Hermann (1974).

- [15] D.P. Pombo Jr., Linear topologies and linear bornologies on modules, J. Indian Math. Soc. 59 (1993), 107-117; errata ibid. 60 (1994), 191.
- [16] D.P. Pombo Jr., Module bornologies, Comment. Math. (Prace Mat.) 36 (1996), 179-188.
- [17] D.P. Pombo Jr., Bornologias lineares, Atas do 43o. Seminário Brasileiro de Análise (1996), 523-555. [P. 527, l. 8: “ $\cup$ ” em lugar de “ $\cap$ ”. P. 528, l. -4: “ E é um espaço topológico, F é um espaço uniforme” em lugar de “ E e F são espaços topológicos”. P. 546, l. -4: “ $\mu_{i_0} \circ u_{i_0}$ ” em lugar de “ $\lambda_{i_0} \circ u_{i_0}$ ”. P. 549, l. 4 e l. 5: “ $F \cap \prod_{i \in I} v_i(B)$ ” em lugar de “ $\prod_{i \in I} v_i(B)$ ”. P. 550, l. -4 e p. 551, l. 5: “ $\subset$ ” em lugar de “ $=$ ”.]
- [18] Séminaire Banach, Lecture Notes in Mathematics 277, Springer-Verlag (1972).
- [19] C. Voigt, Bornological quantum groups, Pacific J. Math. 235 (2008), 93-135.
- [20] L. Waelbroeck, Etude spectrale des algèbres complètes, Acad. Royale Belgique. Mém. Cl. des Sci. (1960).
- [21] L. Waelbroeck, Some theorems about bounded structures, J. Funct. Analysis 1 (1967), 392-408.
- [22] L. Waelbroeck, Topological Vector Spaces and Algebras, Lecture Notes in Mathematics 230 (1971).
- [23] S. Warner, Topological Fields, Notas de Matemática 126, North-Holland (1989).

