

OS TEOREMAS DE GÖDEL*

FELIPE O. S. NETTO[†]

Resumo

O presente trabalho trata dos teoremas de incompletude de Gödel, que falam da impossibilidade de uma teoria com certas características ser ao mesmo tempo consistente e completa, uma vez que, sendo consistente, não se pode provar sua consistência.

Abstract

This work deals with the Gödel's incompleteness theorems which establish the impossibility of a theory with certain characteristics to be both consistent and complete since, it being consistent, one cannot prove its consistency.

1 Introdução

Em 1931, o matemático austríaco Kurt Gödel publicou o artigo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (v. [1]), no periódico *Monatshefte für Mathematik und Physik*, onde provava dois teoremas de consistência e completude, hoje conhecidos como *os teoremas de incompletude de Gödel*.

O primeiro afirmava que um sistema efetivamente gerado capaz de dizer certas verdades elementares sobre aritmética não pode ser consistente e completo. O segundo teorema dizia que, num tal sistema, se este for consistente, então não se pode provar sua consistência.

2 Os teoremas

Uma vez que os teoremas de Gödel tratam de consistência e completude, é necessário entender bem estes conceitos. Por uma teoria *consistente*, entende-se uma teoria que não gera contradição, ou seja, não existe nela uma proposição P de modo a se poder provar tanto P como sua negação formal $\neg P$. Já uma teoria *completa* é aquela que permite concluir a veracidade ou falsidade de qualquer

*Trabalho de monitoria da disciplina *Análise I para comunicação na X Semana do IME*, orientado pela prof. Jeanne Denise B. de Barros (jeanne@ime.uerj.br).

Palavras-chave: Análise, Lógica, Incompletude, Metamatemática

[†]Instituto de Matemática e Estatística/UERJ, f.dachshund@gmail.com

sentença que se possa formular, ou seja, para toda proposição P , podemos provar P ou provar $\neg P$.

Uma teoria é *efetivamente gerada* quando seus axiomas são recursivamente enumeráveis, ou seja, quando temos um axioma conhecido e, a partir de cada axioma da teoria, podemos encontrar um novo axioma através de uma regra explícita. Quando os axiomas da teoria são em número finito, podemos concluir que a teoria é efetivamente gerada, uma vez que todo conjunto finito é recursivamente enumerável.

Se a teoria é efetivamente gerada, então seus axiomas são enumeráveis. Todavia a recíproca não é válida. Isto porque, para que os axiomas sejam recursivamente enumeráveis, eles precisam de uma expressão recursiva *explícita*, que envolva somente os números naturais.

A par destes conceitos, podemos enunciar os dois teoremas de incompletude de Gödel.

Primeiro Teorema de Gödel. *Numa teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar, existe uma sentença verdadeira mas indemonstrável.*

Segundo Teorema de Gödel. *É impossível provar a consistência de uma teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar.*

3 Enumeração de Gödel

A chave para as demonstrações está em associar, de forma unívoca, um número natural a cada símbolo. Fixamos um inteiro positivo para cada símbolo primitivo constante. Para os símbolos variáveis, devemos estabelecer uma regra de enumeração, já que o número destes numa sentença é indefinido. Esta enumeração de símbolos deve ser feita de forma adequada à teoria.

Em seguida, utilizam-se os números primos para associar univocamente um número natural a cada sentença, que é uma sequência finita de símbolos que obedece às regras de formação da teoria. Assim, sendo $P \equiv a_1 a_2 \dots a_n$ e $G(a_i)$ o número associado ao i -ésimo símbolo de P , definimos o *número de Gödel* de P como sendo $G(P) = p_1^{G(a_1)} p_2^{G(a_2)} \dots p_n^{G(a_n)}$, onde p_i é o i -ésimo número primo.

Algo análogo é feito para as demonstrações, que são sequências finitas de sentenças: o número de Gödel da demonstração $d \equiv P_1 P_2 \dots P_n$ é $G(d) = p_1^{G(P_1)} p_2^{G(P_2)} \dots p_n^{G(P_n)}$.

Com isto, podemos definir uma função ‘subst’ que, a cada terno de números naturais x, y, z , retorna o número de Gödel $\text{subst}(x, y, z)$ da sentença obtida

substituindo-se, na sentença de número de Gödel x , a variável de número de Gödel y pelo valor do numeral z .

Podemos ainda definir, graças a enumerabilidade recursiva dos axiomas, uma fórmula $\text{dem}(x, y)$ que diga que a sequência de sentenças de número de Gödel x é uma demonstração para a sentença de número de Gödel y . Esta fórmula é definida de tal forma que, para cada x e y especificados, $\text{dem}(x, y)$ é demonstrável se, e somente se, é verdadeira.

4 Sentença de Gödel

Podemos agora definir uma sentença Γ que, metamaticamente, diga ser ela mesma indemonstrável. Para tanto, definimos primeiro a fórmula

$$\alpha \equiv \alpha(y) \equiv \forall x(\neg \text{dem}(x, \text{subst}(y, G_y, y))),$$

onde G_y é o número de Gödel da segunda variável numérica de uma sentença (a variável ' y ' na fórmula α).

Em seguida, definimos a *sentença de Gödel* da teoria,

$$\Gamma \equiv \alpha(G(\alpha)) \equiv \forall x(\neg \text{dem}(x, \text{subst}(G(\alpha), G_y, G(\alpha)))).$$

Observa-se que Γ é obtida substituindo-se, na fórmula α , a variável y pelo valor de $G(\alpha)$. Logo seu número de Gödel é

$$G(\Gamma) = \text{subst}(G(\alpha), G_y, G(\alpha)),$$

valendo então a equivalência

$$\Gamma \equiv \forall x(\neg \text{dem}(x, G(\Gamma))).$$

Assim, interpretada metamaticamente, Γ diz ser ela mesma não demonstrável.

5 Fim da demonstração

Se Γ fosse demonstrável, sua demonstração corresponderia a um número de Gödel x que satisfaria $\text{dem}(x, G(\Gamma))$, donde $\text{dem}(x, G(\Gamma))$ seria demonstrável. Assim, seria demonstrável também a sentença $\exists x(\text{dem}(x, G(\Gamma))) \equiv \neg \Gamma$. Sendo Γ e $\neg \Gamma$ ambas demonstráveis, teríamos uma teoria inconsistente. Portanto, se a teoria é consistente, Γ é indemonstrável. Mais ainda, vemos agora que a interpretação metamatemática de Γ é válida, logo Γ é verdadeira. Portanto, se a teoria é consistente, existe nela uma sentença Γ que é verdadeira mas não demonstrável, o que prova o primeiro teorema.

Para provar o segundo teorema, primeiro formalizamos o conceito de consistência da teoria sob a forma de uma sentença C . Em meio à demonstração do primeiro teorema, provamos que, se a teoria é consistente, então Γ é verdadeira. Assim, formalizando esta demonstração, concluímos que a sentença $C \rightarrow \Gamma$ é demonstrável. Logo, se C fosse demonstrável, por Modus ponens, Γ também o seria, o que é absurdo sob a hipótese de consistência da teoria. Portanto a consistência de uma teoria consistente é indemonstrável, como afirma o segundo teorema.

6 Sob a hipótese de ω -consistência

Uma teoria capaz de expressar a aritmética elementar é dita ω -inconsistente quando nela existe uma fórmula $\varphi(x)$ sobre os números naturais tal que se pode provar $\exists x(\varphi(x))$ e, para cada x específico, pode-se provar $\neg\varphi(x)$. Caso contrário, a teoria é dita ω -consistente.

Inconsistência e ω -inconsistência não são a mesma coisa. A ideia é a de que, mesmo existindo um x tal que $\varphi(x)$, pode não ser possível encontrá-lo; bem como, mesmo havendo, para cada x , uma demonstração diferente para $\neg\varphi(x)$, pode não haver uma demonstração para x genérico.

Porém inconsistência implica ω -inconsistência: se existe P tal que P e $\neg P$ podem ser ambas demonstradas, fazemos $\varphi(x) \equiv P$ para provar a ω -inconsistência. Em contraposição, segue que ω -consistência implica consistência.

Com este novo conceito, Gödel chegou a provar outro resultado: toda teoria ω -consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar é incompleta. Lembrando que uma teoria é dita *incompleta* quando apresenta uma sentença *indecidível*, isto é, uma sentença P tal que não se pode provar P nem $\neg P$.

A sentença indecidível, neste caso, é a própria sentença de Gödel Γ da teoria. Se a teoria é ω -consistente, então é também consistente e, pelo que já foi provado, Γ não pode ser provada. Falta provar que também $\neg\Gamma$ é indemonstrável.

Se $\neg\Gamma$ é demonstrável, então é demonstrável ainda a sentença equivalente $\exists x(\varphi(x))$, onde $\varphi(x) \equiv \text{dem}(x, G(\Gamma))$. Apesar de $\neg\Gamma$, interpretada metamatemáticamente, afirmar haver uma demonstração para Γ , nada garante ser possível encontrar esta demonstração. Apenas se pudermos encontrar um x específico tal que $\varphi(x)$ poderemos concluir que Γ é demonstrável. Neste caso, a teoria será inconsistente e, conseqüentemente, ω -inconsistente.

Mesmo que a teoria seja consistente, podemos provar $\neg\varphi(x)$ para cada x especificado, uma vez que se podem provar $\varphi(x) \rightarrow \Gamma$ e, por suposição, $\neg\Gamma$.

Temos assim uma fórmula $\varphi(x)$ tal que se pode provar $\exists x(\varphi(x))$ e, para cada x específico, pode-se provar também $\neg\varphi(x)$. A teoria também acaba sendo ω -inconsistente. Portanto, se a teoria é ω -consistente, não só Γ , mas também $\neg\Gamma$ é indemonstrável. Ou seja, Γ é indecidível e a teoria é incompleta.

Referências

- [1] GÖDEL, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Mathematik und Physik, v. 38, 1931, pp. 173-198.
- [2] GÖDEL, K. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems, tradução de B. Meltzer, Dover Publications, Nova Iorque, 1962.
- [3] GÖDEL, K. On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I, tradução parcial de Martin Hirzel, disponível no site <http://www.research.ibm.com/people/h/hirzel/papers/canon00-goedel.pdf>.
- [4] MONTEIRO, L. Sobre a Demonstração do Teorema de Gödel, slides, disponível no site <http://ctp.di.fct.unl.pt/GODEL/godel-lm.pdf>.
- [5] NAGEL, E. e NEWMAN, J. Gödel's Proof, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1959.
- [6] vários autores. Gödel's incompleteness theorems, disponível no site http://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6del%27s_incompleteness_theorems.