Equações Integro-Diferenciais do Tipo Barbashin*

R. P. MARIA† P. N DA SILVA‡ C. F. VASCONCELLOS§

Resumo

Analisamos equações integro-diferenciais do tipo Barbashin quando os multiplicadores $c = c(t,s)$ e núcleos $k = k(t,s,\mu)$ são estacionários. Consideramos os casos analisamos o problema quando o multiplicador c é limitado e quando não é limitado. A existência e unicidade de soluções são deduzidas através de teoremas de ponto-fixo.

Abstract

We study equations of Barbashin when the multipliers c and kernels k are stationary. We analyze the problem for bounded and unbounded multipliers c. The existence and uniqueness of solutions are deduced through fixed-point theorems.

1 Introdução

A equação[1]

$$\dot{x} = Fx, \tag{1.1}$$

onde F é um operador definido em um conjunto de funções absolutamente contínuas, é chamada de equação diferencial funcional. Assim, (1.1) tanto é uma generalização da equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.2}$$

como também se refere à equação integro-diferencial

$$\dot{x}(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

Em muitas das hipóteses da física clássica, admite-se que a taxa de variação (dx/dt) do estado $x(t)$ de um processo em um dado instante t_0 depende apenas do estado do processo nesse instante. Assim, a descrição matemática de tal processo é dada por (1.2). Essa hipótese não permite o uso da equação (1.2) na descrição de processos em que não há como ignorar os estados passados ou futuros do processo. Além disso, outra generalização útil de (1.2) consiste na substituição do

* *Palavras chave:* Equações Integro-Diferenciais, Equações do Tipo Barbashin

† discente Mestrado em Ciências Computacionais

‡ Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ

§ Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ

[1] Nesta seção, usamos a referência: Azbelev *et al.* [2]

espaço finito-dimensional $\mathbb{R}^n$ (em que as soluções x assumem valores) por um espaço de Banach arbitrário. Esta generalização se fundamenta na teoria das equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. Ela interpreta equações diferenciais parciais como se fossem equações da forma (1.2), em que os valores de $x(t)$ pertencem a um espaço de Banach adequado.

A equação :

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_a^b k(t,s,\mu)x(t,\mu)d\mu + f(t,s) \tag{1.4}$$

é uma equação integro-diferencial linear do tipo Barbashin. Sejam $J \subset \mathbb{R}$, um intervalo limitado ou não e X, um espaço de Banach de funções reais definidas em $[a,b]$. Se identificarmos a função real $x = x(t,s)$ dependente das duas variáveis (t,s) com a função abstrata $x = x(t)$ dependente da variável $t \in J$, que assume valores em X e que é definida por $x(t)(s) = x(t,s)$, a equação (1.4) pode ser reescrita como uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1.5}$$

No caso das equações do tipo Barbashin, o operador $A(t)$ em (1.5) tem uma estrutura especial: ele é dado por uma soma $A(t) = C(t) + K(t)$. A primeira parcela $C(t)$ é um operador multiplicativo:

$$C(t)x(s) = c(t,s)x(s)$$

e a segunda é um operador integral:

$$K(t)x(s) = \int_a^b k(t,s,\mu)x(t,\mu)d\mu.$$

A função $c(t,s)$ é chamada de MULTIPLICADOR e a função $k(t,s,\mu)$, de NÚCLEO da equação (1.4).

Um procedimento básico na abordagem proposta por Appel *et al.* [1] consiste em analisar inicialmente a equação “reduzida”

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + f(t). \tag{1.6}$$

E em seguida, interpretar a equação “completa” (1.5) é como uma *perturbação integral* de (1.6).

Na Seção 2, analisamos a existência e unicidade de solução do problema de valor inicial para a equação (1.4). Na Seção 3, restringimos nossa atenção às equações do tipo Barbashin com multiplicadores e núcleos estacionários e analisamos um problema de valor de contorno associado.

2 Equações Integro-Diferenciais do tipo Barbashin

Considere a equação integro-diferencial linear do tipo Barbashin

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_a^b k(t,s,\mu)x(t,\mu)d\mu + f(t,s). \tag{2.7}$$

Aqui $c = c(t,s), k = k(t,s,\mu)$, e $f = f(t,s)$ são funções reais definidas em $J\times[a,b]$, $J\times[a,b]\times[a,b]$, e $J \times [a,b]$, respectivamente, com $-\infty < a < b < \infty$ e sendo J um intervalo limitado ou não; a função $x = x(t,s)$ é desconhecida. No caso em que temos $f(t,s) \equiv 0$ a equação (2.7) é dita homogênea, caso contrário, é dita não-homogênea.

2.1 Equações Diferenciais em Espaços de Banach

Uma ferramenta básica para o estudo da equação de Barbashin (2.7) é tratar esta equação como uma equação diferencial ordinária linear em um espaço de Banach X adequado. Formalmente, isto pode ser feito reescrevendo (2.7) simplesmente como

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{2.8}$$

onde o operador $A(t) : X \to X$ é dado por

$$A(t)x(s) = c(t,s)x(t,s) + \int_a^b k(t,s,\mu)x(t,\mu)d\mu \quad (t \in J) \tag{2.9}$$

e a função $f(t) \in X$ é dada por

$$f(t) = f(t,\cdot) \quad (t \in J). \tag{2.10}$$

Em outras palavras, nós identificamos a função $(t,s) \to x(t,s)$ definida em $J\times[a,b]$ com a função $t \to x(t,\cdot)$ definida em J com valores no espaço de Banach X. No entanto, isto só faz sentido sob certas hipóteses sobre as funções c, k e f que garantam que o vetor (2.10) e o operador (2.9) assumam valores no espaço de Banach escolhido X e no espaço $\mathcal{L}(X)$ dos operadores lineares limitados em X, respectivamente. Vale lembrar que mesmo que todas estas hipóteses sejam satisfeitas, as equações (2.7) e (2.8) podem não ser equivalentes. Em primeiro lugar, a equação (2.7) pode admitir uma solução x que não possa ser interpretada como um vetor com valores em X (por exemplo, porque a solução $x(t,\cdot)$ não pertence a X para algum $t \in J$). Segundo, as soluções de (2.8) não precisam ser soluções (clássicas) de (2.7) (por exemplo, porque a derivada de $\partial x/\partial t$ em (2.7) e dx/dt em (2.8) podem não ter o mesmo sentido).

Se X é o espaço de Lebesgue $L^p = L^p([a,b])$ de todos as funções p-integráveis ($1 \leq p < \infty$) ou funções essencialmente limitadas ($p = \infty$) em $[a,b]$, a maior dificuldade dessa identificação se deve ao fato dos elementos de L^p não serem funções, mas classes de equivalência de funções (mais precisamente, classes de equivalência de funções que coincidem em quase toda parte). Assim, para considerar uma função $x = x(t)$ definida em J com valores em L^p como uma função real $x = x(t,s)$ de duas variáveis em $J \times [a,b]$, é necessário escolher um representante de $x(t) \in X$ de tal forma que a função $(t,s) \to x(t,s)$ tenha "boas" propriedades. Dada qualquer função diferenciável $x(t)$ ($t \in J$) com valores em L^p, pode-se encontrar uma função mensurável $x = x(t,s)$ em $J \times [a,b]$ absolutamente contínua em t para todo $s \in [a,b]$ que admite derivada parcial $\partial x(t,s)/\partial t$ e é tal que $x(t)$ é equivalente a $x(t,\cdot)$ e $x'(t)$ é equivalente a $\partial x(t,\cdot)/\partial t$. Este resultado, entretanto, não garante de modo geral que, se X é um espaço de Banach e $x = x(t)$

é uma solução continuamente diferenciável de (2.8) em J com valores em X, então a função real correspondente $x(t, s)$ é uma solução de (2.7) em $J \times [a, b]$. Nesse caso, podemos afirmar apenas que x satisfaz (2.7) em quase toda parte. Daqui por diante, chamaremos estas funções de *soluções generalizadas* de (2.7).

Definição 2.1 (Solução generalizada)**.** *Dizemos que $x = x(t, s)$ é solução generalizada de (2.7) se:*

1. *x é mensurável em $J \times [a, b]$;*

2. *$x(\cdot, s)$ é absolutamente contínua em J para cada $s \in [a, b]$;*

3. *x satisfaz à equação (2.7) em quase em toda parte de $J \times [a, b]$.*

Para referência futura, introduziremos agora algumas notações. Dado um espaço de Banach X de funções reais definidas em $[a, b]$, por $C_t(X)$ denotamos o espaço de todas as funções de duas variáveis $x : J \times [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que a aplicação $t \to x(t, \cdot)$ é contínua de J em X. Também, por $C_t^1(X)$ denotamos o espaço de todo $x \in C_t(X)$ tal que $x(\cdot, s)$ é continuamente diferenciável em J para cada $s \in [a, b]$ e $\partial x/\partial t$ pertence a $C_t(X)$ também.

2.2 O Operador de Evolução

Vamos relembrar as propriedades básicas das equações diferenciais lineares (2.8) quando o operador $A = A(t)$. Como de costume, denotemos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares de X em Y; em particular, $\mathcal{L}(X, X) =: \mathcal{L}(X)$.

Não é difícil ver que a equação integral

$$Z(t) = I + \int_\tau^t A(\xi)Z(\xi)d\xi \tag{2.11}$$

tem uma solução $U = U(t, \tau)(t, \tau \in J)$ que é única na classe de todos os operadores integráveis em J com valores no espaço $\mathcal{L}(X)$.

Esta solução pode ser obtida como o limite (em $\mathcal{L}(X)$) das aproximações sucessivas

$$Z_{n+1}(t) = I + \int_\tau^t A(\xi_n)Z_n(\xi_n)d\xi \quad (n = 0, 1, \ldots; Z_0(t) = I) \tag{2.12}$$

Podemos usar (2.12) para caracterizar o operador $U(t, \tau)$ por uma série. Observe que, $Z_0(t)$ é o operador identidade e

$$Z_1(t) = I + \int_\tau^t A(\xi_1)d\xi_1,$$

Note que $A(t) \in \mathcal{L}(X)$. Logo, $A(t)$ é fechado. Pelo Lema 2.1 ([7], p. 24)

$$Z_2(t) = I + \int_\tau^t A(\xi_1)d\xi_1 + \int_\tau^t \int_\tau^{\xi_1} A(\xi_1)A(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1,$$

$$Z_3(t) = I + \int_\tau^t A(\xi_1)d\xi_1 + \int_\tau^t \int_\tau^{\xi_1} A(\xi_1)A(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1 + \int_\tau^t \int_\tau^{\xi_1} \int_\tau^{\xi_2} A(\xi_1)A(\xi_2)A(\xi_3)d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1.$$

Um argumento indutivo nos mostra que a solução também pode ser obtida como limite (em $\mathcal{L}(X)$) da série

$$U(t,\tau) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} A(t_1)\dots A(t_n)dt_n \dots dt_1. \tag{2.13}$$

A série acima, converge uniformemente em J. De fato, temos

$$\left\| \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} A(t_1)\dots A(t_n)dt_n \dots dt_1 \right\| \leq \frac{1}{n!} \left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

A igualdade

$$\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} \|A(t_1)\| \dots \|A(t_n)\|\, dt_n \dots dt_1 = \frac{1}{n!} \left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

será provada por indução. Para $n = 1$:

$$\int_\tau^t \|A(t_1)\|\, dt_1 = \frac{1}{1!} \left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^1.$$

Para entender o passo de indução que será feito posteriormente, basta usar integração por partes. Admita que a igualdade

$$\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-2}} \|A(t_1)\| \dots \|A(t_{n-1})\|\, dt_{n-1} \dots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^{n-1} \tag{2.14}$$

seja válida para $n-1$ parcelas. Vamos mostrar que a igualdade também é válida para n. Temos

$$\begin{aligned} &\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} \|A(t_1)\| \dots \|A(t_n)\|\, dt_n \dots dt_1 \\ &\quad = \int_\tau^t \|A(t_1)\| \left[\int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} \|A(t_2)\| \dots \|A(t_n)\|\, dt_n \dots dt_2 \right] dt_1. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução (2.14) aplicada à expressão entre colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} (n-1)! &\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} \|A(t_1)\| \dots \|A(t_n)\|\, dt_n \dots dt_1 \\ &= \int_\tau^t \|A(t_1)\| \left[\int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^{n-1} dt_1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vamos usar integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_\tau^t \|A(t_1)\| \left[\int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^{n-1} dt_1 &= \int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d\xi \left[\int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^{n-1} \Bigg|_\tau^t \\ &- \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d\xi (n-1) \left[\int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^{n-2} \|A(t_1)\|\, dt_1 \\ = \left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^n &- (n-1) \int_\tau^t \left[\int_\tau^{t_1} \|A(\xi)\|\, d(\xi) \right]^{n-1} \|A(t_1)\|\, dt_1. \end{aligned}$$

Por (2.15), temos então

$$\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} \|A(t_1)\| \ldots \|A(t_n)\|\, dt_n \ldots dt_1 = \frac{1}{n!}\left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi)\right]^n.$$

Vimos que

$$\left\|\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} A(t_1)\ldots A(t_n) dt_n \ldots dt_1\right\| \leq \frac{1}{n!}\left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d(\xi)\right]^n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Como

$$\exp\left(\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d\xi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d\xi\right]^n,$$

concluímos, além da convergência da série (2.13), que

$$\|U(t,\tau)\| \leq \exp\left(\int_\tau^t \|A(\xi)\|\, d\xi\right) \quad (t, \tau \in J). \tag{2.16}$$

Vamos resumir as propriedades básicas do operador $U = U(t,\tau)$ nos dois próximos lemas. Admitiremos que o operador A é fortemente contínuo.

Definição 2.2 (Operador fortemente contínuo)**.** *Um operador $A : J \to \mathcal{L}(X)$ é chamado de fortemente contínuo se, para cada $x \in X$, a aplicação $t \mapsto A(t)x$ for contínua de J em X*[2] *.*

Lema 2.1. *Suponha que o operador $t \to A(t)$ seja fortemente contínuo em X, então o operador $(t,\tau) \to U(t,\tau)$ é contínuo em $J \times J$ e a função vetorial $(t,\tau) \to U(t,\tau)x$ é diferenciável em t e τ para cada $x \in X$. Além disso, o operador $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}$ é contínuo em τ, para todo $t \in J$, e é fortemente contínuo em t para todo $\tau \in J$. Finalmente, o operador $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau}$ é contínuo em t, para todo $\tau \in J$, e fortemente contínuo em τ, para todo $t \in J$.*

Prova. Do fato de $A(t)$ ser fortemente contínuo, segue que

$$\sup_{t\in J} \|A(t)x\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Pelo Teorema 2.4 ([7], p. 23), existe uma constante M tal que

$$\|A(t)x\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X,\ \forall t \in J. \tag{2.17}$$

Considere a solução da equação integral

$$V(t,s) = I + \int_s^t V(t,\xi)A(\xi)d\xi. \tag{2.18}$$

Ela é solução do problema de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial s}V(t,s) = -V(t,s)A(s), \qquad V(t,t) = I \tag{2.19}$$

[2] "Por abuso de linguagem", vamos dizer que o operador $A = A(t)$ é "fortemente contínuo" em X.

Temos

$$\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)U(s,\tau) = -V(t,s)A(s)U(s,\tau) + V(t,s)A(s)U(s,\tau) = 0.$$

Logo, o operador $V(t,s)U(s,\tau)$ não depende de s. Isto é

$$V(t,s)U(s,\tau) = V(t,r)U(r,\tau), \quad \forall r,s \in J.$$

Tomando $s=\tau$ e $r=t$, temos

$$V(t,\tau) = V(t,\tau)U(\tau,\tau) = V(t,t)U(t,\tau) = U(t,\tau) \tag{2.20}$$

Sejam $(t,\tau),(t_1,\tau_1) \in J \times J$. Por (2.17), (2.16) e (2.17), temos

$$\|U(t,\tau) - U(t_1,\tau_1)\| \le M\left(|\tau-\tau_1|e^{|\tau-\tau_1|M} + |t-t_1|e^{\max\{|t-\tau_1|,|t_1-\tau_1|\}M}\right).$$

Logo, $U(t,\tau)$ é contínuo em $J \times J$.

Seja $(t,\tau) \in J \times J$. Temos

$$U(t+h,\tau) - U(t,\tau) - A(t)U(t,\tau)h = \int_t^{t+h} (A(\xi)U(\xi,\tau) - A(t)U(t,\tau))d\xi.$$

Logo

$$\|U(t+h,\tau) - U(t,\tau) - A(t)U(t,\tau)h\| \overset{(2.16),(2.17)}{\le} \int_t^{t+h} M\left(\exp\left(M|\xi-\tau|\right) + \exp\left(M|t-\tau|\right)\right)d\xi.$$

Portanto,

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t} = A(t)U(t,\tau). \tag{2.21}$$

Segue de (2.16)–(2.18) que

$$\|A(t)U(t,\tau) - A(t)U(t,\tau_1)\| \le M^2 \exp(M\max\{|t-\tau|,|t-\tau_1|\})|\tau-\tau_1|.$$

Consequentemente, $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}$ é contínuo em τ, para todo $t \in J$.

Seja $x \in X$. Por (2.11), (2.16) e (2.17)

$$\|A(t)U(t,\tau)x - A(t_1)U(t_1,\tau)x\| \le M^2\|x\|\exp(M\max\{|t-\tau|,|t_1-\tau|\})|t-t_1| + \|(A(t)-A(t_1))U(t_1,\tau)x\|.$$

Consequentemente, $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}$ é fortemente contínuo em t, para todo $\tau \in J$.

Resta, agora, verificar que o operador $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau}$ é contínuo em t, para todo $\tau \in J$, e fortemente contínuo em τ, para todo $t \in J$.

Segue de (2.20) que

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau} = -U(t,\tau)A(\tau). \tag{2.22}$$

Além disso, (2.12), (2.16) e (2.17) implicam em

$$\|U(t,\tau)A(\tau) - U(t_1,\tau)A(\tau)\| \le M^2 \exp(M \max\{|t-\tau|, |t_1-\tau|\})|t-t_1|.$$

Consequentemente, $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau}$ é contínuo em t, para todo $\tau \in J$. Usando (2.11), (2.16) e (2.17), temos ainda que

$$\begin{aligned}\|U(t,\tau)A(\tau)x - U(t,\tau_1)A(\tau_1)x\| &\le M^2\|x\| \exp(M \max\{|t-\tau|, |t-\tau_1|\})|\tau-\tau_1| \\ &+ \exp(M|t-\tau_1|)\|(A(\tau)-A(\tau_1))x\|.\end{aligned}$$

Consequentemente, $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau}$ é fortemente contínuo em τ, para todo $t \in J$.

Mostraremos, por último, que a função vetorial $(t,\tau) \to U(t,\tau)x$ é diferenciável em t e τ para cada $x \in X$.

Sabemos que

$$\frac{U(t+h,\tau)x - U(t,\tau)x}{h} = \frac{[U(t+h,\tau) - U(t,\tau)]\,x}{h} \tag{2.23}$$

ao tomarmos o limite de h tendendo zero em (2.23), teremos

$$\lim_{h\to 0} \frac{[U(t+h,\tau) - U(t,\tau)]\,x}{h} = \frac{\partial\,(U(t,\tau)x)}{\partial t} = \frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}x$$

Como vimos em (2.21)

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t} = A(t)U(t,\tau)$$

então

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}x = A(t)U(t,\tau)x.$$

A prova para $\dfrac{\partial U(t,\tau)x}{\partial \tau}$ é análoga. □

Lema 2.2. *Suponha que o operador $t \to A(t)$ é fortemente contínuo em X. Então o operador $(t,\tau) \to U(t,\tau)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) $U(t,t) = I \quad (t \in J)$;

(ii) $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau) \quad (t,\tau,s \in J)$;

(iii) $U(t,\tau)^{-1} = U(\tau,t) \quad (t,\tau \in J)$.

Prova. *(i)* Para verificar que $U(t,t) = I$ basta fazer $t = \tau$ em (2.12)

$$U(t,t) = I + \int_t^t A(\xi)U(\xi,t)d\xi = I.$$

(ii) Mostraremos agora que $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$; $(t,\tau,s \in J)$.
Segue de (2.20)

$$U(t,s)U(s,\tau) = V(t,s)U(s,\tau) = V(t,t)U(t,\tau) = U(t,\tau).$$

(iii) Por fim, é fácil ver que $U(t,\tau)^{-1} = U(\tau,t)$; $(t,\tau \in J)$.

Se $U(t,\tau)^{-1} = U(\tau,t)$, devemos verificar que $U(t,\tau)U(\tau,t) = I$. De fato, $U(t,\tau)U(\tau,t) = U(t,t)$ de acordo com *(ii)* e $U(t,t) = I$ de acordo com *(i)*. Portanto,

$$U(t,\tau)^{-1} = U(\tau,t)$$

O operador $U = U(t,\tau)$ é normalmente chamado de *operador de evolução* ou *operador de Cauchy*.

Teorema 2.1. *Suponha que o operador $t \mapsto A(t)$ é fortemente contínuo em X. Então para cada valor fixo de $\tau \in J, x_\tau \in X$ e $f \in C_t(X)$, a equação diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{2.24}$$

tem uma única solução $x = x(t)$ satisfazendo a condição inicial

$$x(\tau) = x_\tau \tag{2.25}$$

Esta solução é dada por

$$x(t) = U(t,\tau)x_\tau + \int_\tau^t U(t,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{2.26}$$

Prova. Aplicando o operador $U(t,\xi)$ a ambos os lados da identidade abaixo

$$\frac{dx(\xi,\tau)}{d\xi} = A(t)x(\xi,\tau) + f(\xi)$$

ficamos com

$$U(t,\xi)\frac{dx(\xi,\tau)}{d\xi} = U(t,\xi)A(t)x(\xi,\tau) + U(t,\xi)f(\xi). \tag{2.27}$$

Ao derivarmos, nós temos

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[U(t,\xi)x(\xi,\tau)\right] = \frac{\partial U(t,\xi)}{\partial\xi}x(\xi,\tau) + U(t,\xi)\frac{\partial x(\xi,\tau)}{\partial\xi}$$

Usando (2.22) e (2.27), nós obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[U(t,\xi)x(\xi,\tau)\right] = -U(t,\xi)A(\xi)x(\xi,\tau) + U(t,\xi)A(\xi)x(\xi,\tau) + U(t,\xi)f(\xi).$$

Integrando com respeito a ξ de τ a t, nós obtemos (2.26)

$$x(t,\tau) = U(t,\tau)x(\tau,\tau) + \int_\tau^t U(t,\xi)f(\xi)d\xi.$$

3 Equações do Tipo Barbashin Estacionárias

Nesse momento, vamos restringir nossa atenção ao caso de multiplicadores e núcleos ESTACIONÁRIOS (i.e. independentes de t).

3.1 Problemas de Valores de Contorno Estacionários

Nesta seção, vamos estudar a equação integro-diferencial linear do tipo Barbashin

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(s)x(t,s) + \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu + f(t,s). \tag{3.28}$$

para $(t,s) \in Q = [0,T] \times [-1,1] = J \times [a,b]$, sujeita às condições de fronteira

$$\begin{cases} x(0,s) = \phi(s), & 0 < s \leq 1, \\ x(T,s) = \psi(s), & -1 \leq s < 0, \end{cases} \tag{3.29}$$

onde $\phi : (0,1] \to \mathbb{R}$ e $\psi : [-1,0) \to \mathbb{R}$ são funções dadas.

Na análise de existência e unicidade de solução para o problema (3.28)/(3.29), aplicaremos o método de ponto fixo em espaços K-normados.

3.1.1 O Problema Abstrato

Vamos reescrever (3.28) como uma equação diferencial linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{3.30}$$

onde o operador $A : X \to X$ é dado por

$$Ax(s) = c(s)x(s) + \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(\mu)d\mu. \tag{3.31}$$

As condições de fronteira (3.29) podem ser escritas na forma

$$P_+x(0) = \phi, \quad P_-x(T) = \psi, \tag{3.32}$$

onde P_+ (respectivamente P_-) denota o operador restrição de $X = L^p([-1,1])$ a $X_+ = L^p([0,1])$ (respectivamente a $X_- = L^p([-1,0])$). Acima, identificamos as funções escalares $(t,s) \mapsto x(t,s)$ e $(t,s) \mapsto f(t,s)$ com as funções $t \mapsto x(t,\cdot)$ e $t \mapsto f(t,\cdot)$ definidas em $[0,T]$ com valores no espaço de Banach X.

Mencionamos anteriormente que um ponto crucial ao passar de (3.28)/(3.29) para (3.30)/(3.32) é fazer uma escolha adequada do espaço funcional X. É claro que a escolha $X = C([-1,1])$ de funções contínuas é muito restrita. De fato, mesmo quando as funções c, k e f em (3.28) são nulas, e as funções ϕ e ψ em (3.29) definidas na fronteira são contínuas, certamente não há solução de (3.28)/(3.29) se a "condição de compatibilidade"

$$\lim_{s\to 0^+} \phi(s) = \lim_{s\to 0^-} \psi(s)$$

não se verificar.

Relembramos agora que tipo de solução procuraremos para o problema (3.28)/(3.29)

Definição 3.1. *Dizemos que a função mensurável $x : Q \to \mathbb{R}$ é uma* SOLUÇÃO GENERALIZADA *de (3.28)/(3.29) se $x(\cdot, s)$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ para quase todo $s \in [-1, 1]$, e satisfaz a (3.28) q.t.p. em $Q = [0, T] \times [-1, 1]$ e também a (3.29) q.t.p. em $[-1, 1]$.*

3.2 Operador Integral Parcial

Um método útil para o estudo do problema (3.28)/(3.29) consiste em considerar operadores definidos em espaços de funções de duas variáveis, onde a integração é realizada somente com respeito a uma das variáveis. Tais operadores são, por vezes, chamados de operadores integrais parciais. Eles são uma ferramenta poderosa tanto para a teoria quanto para aplicações de equações integro-diferenciais.

Seja $X = L^p([-1, 1])$ $(1 \le p < \infty)$, dizemos que $x \in C_t(X)$ se a função de duas variáveis $x : Q \to \mathbb{R}$ é tal que a aplicação que associa $t \mapsto x(t, \cdot)$ é contínua de $J = [0, T]$ em X. Se, além disso, $x(\cdot, s)$ é absolutamente contínua para quase todo $s \in [-1, 1]$ e $\partial x / \partial t$ também pertence a $C_t(X)$, escrevemos $x \in C_t^1(X)$. Os espaços $C_t(X)$ e $C_t^1(X)$ serão munidos com as normas naturais

$$\|x\|_{C_t(X)} = \max_{0 \le t \le T} \|x(t, \cdot)\|_X$$

e

$$\|x\|_{C_t^1(X)} = \max_{0 \le t \le T} \left[\|x(t, \cdot)\|_X + \left\| \frac{\partial x(t, \cdot)}{\partial t} \right\|_X \right],$$

respectivamente.

Lema 3.1. *Seja $c \in L^\infty([-1, 1])$. Então, para qualquer $\phi \in X_+, \psi \in X_-$ e $f \in C_t(X)$, o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(t, s)}{\partial t} = c(s) g(t, s) + f(t, s), & (t, s) \in Q, \\ g(0, s) = \phi(s), & 0 < s \le 1, \\ g(T, s) = \psi(s), & -1 \le s < 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

tem uma única solução $g \in C_t^1(X)$. Essa solução é definida para quase todo $(t, s) \in Q$ por

$$g(t, s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau, s) d\tau + e^{tc(s)} \phi(s), & (0 < s \le 1), \\ \displaystyle\int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau, s) d\tau + e^{(t-T)c(s)} \psi(s), & (-1 \le s < 0). \end{cases} \tag{3.34}$$

Prova. Em primeiro lugar, verificaremos que $g(t,s)$ é solução do problema no intervalo $0 < s \leq 1$.

$$g(t,s) = \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s) = e^{tc(s)} \int_0^t e^{-\tau c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s).$$

Derivando $g(t,s)$ com respeito a t

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(t,s)}{\partial t} &= c(s)e^{tc(s)} \int_0^t e^{-\tau c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}e^{-tc(s)} f(t,s) + c(s)e^{tc(s)}\phi(s)\\ &= c(s)\left(\int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s)\right) + f(t,s).\end{aligned}$$

E portanto,

$$\frac{\partial g(t,s)}{\partial t} = c(s)g(t,s) + f(t,s)$$

Verificaremos, agora as condições de fronteira para $0 < s \leq 1$

$$g(0,s) = \int_0^0 e^{(0-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{0c(s)}\phi(s) = \phi(s)$$

A verificação de que $g(t,s)$ é solução do problema para o intervalo $-1 \leq s < 0$ é análoga.

Vamos mostrar agora que $g(t,s)$ é solução única:

Suponha que g e h sejam soluções do problema, então

$$\frac{\partial g(t,s)}{\partial t} = c(s)g(t,s) + f(t,s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial h(t,s)}{\partial t} = c(s)h(t,s) + f(t,s)$$

então

$$\frac{\partial\left(g(t,s) - h(t,s)\right)}{\partial t} - c(s)(g-h)(t,s) = 0.$$

Multiplicando a equação por $(g-h)(t,s)$ ficamos com

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left((g-h)^2(t,s)\right)}{\partial t} - c(s)(g-h)^2(t,s) = 0.$$

Multiplicando agora por $2e^{-2c(s)t}$ teremos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(g-h)^2(t,s)e^{-2c(s)t}\right] = 0.$$

Vamos integrar de 0 a 1 com respeito a s

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[(g-h)^2(t,s)e^{-2c(s)t}\right] ds = 0. \tag{3.35}$$

Vamos, agora integrar de 0 a t com respeito a t

$$\int_0^1 \left[(g-h)^2(t,s)e^{-2c(s)t}\right] ds = 0.$$

Como temos $(g-h)^2e^{-2c(s)t} \geq 0$, devemos ter, então $g-h=0$, ou seja, $g=h$ para $0 < s \leq 1$ e $t \in [0,T]$.

Alterando o intervalo de integração em (3.35) de 0 a 1 para -1 a 0, ficamos com

$$\int_{-1}^{0} \frac{\partial}{\partial t}\left[(g-h)^2(t,s)e^{-2c(s)t}\right] ds = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-1}^{0}\left[(g-h)^2(t,s)e^{-2c(s)t}\right] ds = 0.$$

Vamos, agora integrar de T a t com respeito a t

$$\int_{-1}^{0}\left[(g-h)^2(t,s)e^{-2c(s)t}\right] ds = 0.$$

Novamente, como temos $(g-h)^2e^{-2c(s)t} \geq 0$, devemos ter, então $g-h=0$, ou seja, para $-1 \leq s < 0$ e $t \in [0,T]$.

Resta provar que $g \in C_t^1(X)$. Observe que se provarmos que $g \in C_t(X)$, o fato de que $\partial g/\partial t \in C_t(X)$ segue de termos $f \in C_t(X)$ e da estrutura da equação (3.33).

Seja $F(t,s,\tau) = e^{(t-\tau)c(s)}f(\tau,s)$. Para $t_0 \in [0,T]$ fixo, nós temos

$$\|g(t,\cdot)-g(t_0,\cdot)\|_g = \left\{\int_0^1 \left|\int_0^t F(t,s,\tau)d\tau - \int_0^{t_0} F(t_0,s,\tau)d\tau + \phi(s)(e^{tc(s)}-e^{t_0c(s)})\right|^p ds\right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{0}\left|\int_T^t F(t,s,\tau)d\tau - \int_T^{t_0} F(t_0,s,\tau)d\tau + \psi(s)(e^{(t-T)c(s)}-e^{(t_0-T)c(s)})\right|^p ds\right\}^{1/p}$$

pelas desigualdades triangular e de Hölder

$$\leq 2e^{T\|c\|_{L^\infty([-1,1])}}\|f\|_{C_t(X)}|t-t_0|^{(p-1)/p} + \left\{\int_0^1\left|\int_0^{t_0}(e^{(t-\tau)c(s)}-e^{(t_0-\tau)c(s)})f(\tau,s)d\tau\right|^p ds\right\}^{1/p}$$
$$+\left\{\int_0^1\left|\phi(s)(e^{tc(s)}-e^{t_0c(s)})\right|^p ds\right\}^{1/p} + \left\{\int_{-1}^{0}\left|\psi(s)(e^{(t-T)c(s)}-e^{(t_0-T)c(s)})\right|^p ds\right\}^{1/p}$$
$$+\left\{\int_{-1}^{0}\left|\int_T^{t_0}(e^{(t-\tau)c(s)}-e^{(t_0-\tau)c(s)})f(\tau,s)d\tau\right|^p ds\right\}^{1/p}.$$

A continuidade de $g(t,\cdot)$ em t_0 segue das hipóteses sobre ϕ,ψ e f e do Teorema da Convergência Dominada. $\square$

Lema 3.2. *Se o operador integral*

$$Kx(s) = \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(\mu)d\mu$$

é limitado em $X = L^p([-1,1])$, o operador integral parcial

$$\hat{K}x(t,s) = \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu$$

é limitado em $L^p(Q), C_t(X)$ e $C_t^1(X)$.

Prova.

1. Observe que $\hat{K}$ é tal que $\hat{K} : L^p(Q) \to L^p(Q)$. De fato, se $x \in L^p(Q)$. Temos
$$\int_0^T \int_{-1}^1 |\hat{K}x(t,s)|^p ds dt \leq \int_0^T \|K\|^p_{\mathcal{L}(X)} \|x(t,\cdot)\|^p_X dt = \|K\|^p_{\mathcal{L}(X)} \|x\|^p_{L^p(Q)}.$$
Da estimativa acima, segue que $\hat{K}$ é limitado em $L^p(Q)$.

2. Observe que $\hat{K}$ é tal que $\hat{K} : C_t(X) \to C_t(X)$. De fato, se $t, t_1 \in [0,T]$ e $x \in C_t(X)$, temos
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |\hat{K}x(t,s) - \hat{K}x(t_1,s)|^p ds &= \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 k(s,\mu)(x(t,\mu) - x(t_1,\mu)) d\mu \right|^p ds \\ &\leq \|K\|^p_{\mathcal{L}(X)} \|x(t,\cdot) - x(t_1,\cdot)\|^p_X.\end{aligned}$$
Analogamente, temos
$$\|\hat{K}x(t,\cdot)\|^p_X \leq \|K\|^p_{\mathcal{L}(X)} \|x(t,\cdot)\|^p_X.$$
Logo, $\hat{K}$ é limitado em $C_t(X)$.

3. Observe que $\hat{K}$ é tal que $\hat{K} : C^1_t(X) \to C^1_t(X)$. Pelo item anterior, basta mostrar que $\frac{\partial}{\partial t}x \in C_t(X)$. Se $x \in C^1_t(X)$, $\frac{\partial}{\partial t}x \in C_t(X)$. Consequentemente, pelo Teorema 2.9 ([7], p. 25) $\frac{\partial}{\partial t}\hat{K}x$ é continuamente diferenciável e
$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{K}x(t,s) = \int_{-1}^1 k(s,\mu) \frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu) d\mu.$$
Sejam $t, t_1 \in [0,T]$. Da estimativa feita em $C_t(X)$, segue que
$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \hat{K}x(t,\cdot) - \hat{K}x(t_1,\cdot) \right\|_X \leq \|\hat{K}\|_{\mathcal{L}(C_t(X))} \|x(t,\cdot) - x(t_1,\cdot)\|_{C_t(X)}$$
e
$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial \hat{K}x(t,\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial \hat{K}x(t_1,\cdot)}{\partial t} \right\|_X \leq \|\hat{K}\|_{\mathcal{L}(C_t(X))} \left\| \frac{\partial x(t,\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial x(t_1,\cdot)}{\partial t} \right\|_{C_t(X)}$$
Consequentemente, o operador é limitado em $C^1_t(X)$.

□

Vamos denotar por L o operador definido por
$$Lx(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s) d\tau, & 0 < s \leq 1, \\ \displaystyle\int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s) d\tau, & -1 \leq s < 0. \end{cases} \tag{3.36}$$
Como consequência do Lema 3.2, obtemos o lema abaixo:

Lema 3.3. *Se $c \in L^{\infty}([-1,1])$ e o operador integral*

$$Kx(s) = \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(\mu)d\mu \tag{3.37}$$

é regular em $X = L^p([-1,1])$, então L é um operador limitado de $L^p(Q)$ em $C_t(X)$.

Prova. Sendo K regular em $X = L^p([-1,1])$, pelo Teorema **??**, K é limitado em X. Pelo Lema 3.2,

$$\hat{K}x(t,s) = \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu$$

é limitado em $L^p(Q)$.

Provaremos agora que $L : L^p(Q) \to C_t(X)$. Suponha que $x \in L^p(Q)$ e $0 < s \leq 1$. Sejam $N = \|c\|_{L^{\infty}([-1,1])}$ e $t_1 < t \in [0,T]$. Temos

$$\int_0^1 |Lx(t,s) - Lx(t_1,s)|^p ds \leq 2^p e^{|t-t_1|Np} |t-t_1|^{p-1} \|\hat{K}\|^p_{\mathcal{L}(L^p(Q))} \|x\|^p_{L^p(Q)}.$$

Argumentando de modo análogo no caso em que $-1 \leq s < 0$, podemos deduzir que $Lx \in C_t(X)$.

Com a mesma estimativa acima, prova-se que L é um operador limitado de $L^p(Q)$ em $C_t(X)$.

□

Combinando os últimos três lemas, obtemos ainda uma nova formulação do problema (3.28)/(3.29):

Teorema 3.1. *Seja $c \in L^{\infty}([-1,1])$, e suponha que o operador (3.37) seja regular em $X = L^p([-1,1])$. Então cada solução do problema (3.28)/(3.29) resolve a equação*

$$x(t,s) = Lx(t,s) + g(t,s), \tag{3.38}$$

onde L é definido por (3.36) e g é definido por (3.34). Por outro lado, cada solução $x \in C_t(X)$ de (3.38) com L dado por (3.36) e g dado por (3.34), é uma solução do problema (3.28)/(3.29).

Prova. Para mostrar a equivalência, em primeiro lugar, admitiremos (3.38) para deduzir (3.28)/(3.29).

Seja $x(t,s)$ no intervalo $0 < s \leq 1$

$$x(t,s) = \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s)d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s). \tag{3.39}$$

Ao derivarmos em relação a t, ficaremos com

$$\begin{aligned}\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} &= c(s)\left(\int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s)d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s)\right) \\ &\quad + \hat{K}(t,s)x(t,s) + f(\tau,s).\end{aligned}$$

Por (3.39),

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} - c(s)x(t,s) = \hat{K}(t,s)x(t,s) + f(\tau,s).$$

Como sabemos que $\hat{K}x(t,s) = \displaystyle\int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu$, então

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} - c(s)x(t,s) = \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu + f(\tau,s).$$

Para verificar a condição da fronteira neste mesmo intervalo, $0 < s \leq 1$, vamos calcular $x(0,s)$.

$$x(0,s) = \int_{0}^{0} e^{(0-\tau)c(s)}\hat{K}x(\tau,s)d\tau + \int_{0}^{0} e^{(0-\tau)c(s)}f(\tau,s)d\tau + e^{0c(s)}\phi(s) = \phi(s)$$

Analogamente, para $x(t,s)$ no intevalo $-1 \leq s < 0$, temos

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} - c(s)x(t,s) = \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu + f(\tau,s)$$

e vale a condição da fronteira

$$x(T,s) = \int_{T}^{T} e^{(T-\tau)c(s)}\hat{K}x(\tau,s)d\tau + \int_{T}^{T} e^{(T-\tau)c(s)}f(\tau,s)d\tau + e^{(T-T)c(s)}\psi(s) = \psi(s).$$

Agora, admitiremos (3.28)/(3.29) e deduziremos (3.34).

Multiplicando a equação

$$\frac{\partial x(\tau,s)}{\partial t} = c(s)x(\tau,s) + \int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(\tau,\mu)d\mu + f(\tau,s)$$

por $e^{-\tau c(s)}$, temos

$$e^{-\tau c(s)}\frac{\partial x(\tau,s)}{\partial t} = e^{-\tau c(s)}c(s)x(\tau,s) + \int_{-1}^{1} e^{-\tau c(s)}k(s,\mu)x(\tau,\mu)d\mu + e^{-\tau c(s)}f(\tau,s).$$

Isto é

$$e^{-\tau c(s)}\frac{\partial x(\tau,s)}{\partial \tau} - e^{-\tau c(s)}c(s)x(\tau,s) = \int_{-1}^{1} e^{-\tau c(s)}k(s,\mu)x(\tau,\mu)d\mu + e^{-\tau c(s)}f(\tau,s)$$

Note que o lado esquerdo da equação é a derivada de um produto. Sendo assim, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-tc(s)}x(\tau,s)\right] = \int_{-1}^{1} e^{-\tau c(s)}k(s,\mu)x(\tau,\mu)d\mu + e^{-\tau c(s)}f(\tau,s)$$

substituindo $\displaystyle\int_{-1}^{1} k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu$ por $\hat{K}x(\tau,s)$:

$$= e^{-\tau c(s)}\hat{K}x(\tau,s) + e^{-\tau c(s)}f(\tau,s)$$

A partir deste momento, teremos duas etapas que nos permitirão chegar às condições de fronteira de (3.28)/(3.29).
Nesta primeira etapa, vamos calcular a integral de 0 a t em relação a τ e teremos

$$x(t,s) = \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s)d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}x(0,s).$$

Como estamos assumindo válida a equação (3.28)/(3.29), usaremos a informação $x(0,s) = \phi(s)$ e assim teremos (3.34) para o intervalo $0 < s \leq 1$.

$$x(t,s) = \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s) + \int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s) + e^{tc(s)}\phi(s).$$

Na segunda etapa, calcularemos a integral variando de T a t com relação a τ.

$$x(t,s) = \int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} \int_{-1}^1 k(s,\mu)x(\tau,\mu)d\mu d\tau + \int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{(t-T)c(s)}x(T,s).$$

Como estamos assumindo válida a equação (3.28)/(3.29), usaremos a informação $x(T,s) = \psi(s)$ e substituiremos $\displaystyle\int_{-1}^1 k(s,\mu)x(t,\mu)d\mu$ por $\hat{K}x(\tau,s)$ e assim teremos (3.34) para o intervalo $-1 \leq s < 0$.

$$x(t,s) = \int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} \hat{K}x(\tau,s) + \int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s) + e^{(t-T)c(s)}\psi(s).$$

□

Pelo Teorema 3.1, podemos discutir a existência e unicidade de solução do problema para a equação de Barbashin (3.28) no espaço $C_t^1(X) = C_t^1(L^p)$ analisando o problema (3.38) no espaço $C_t(X)$.

Vamos introduzir algumas notações. Para $0 \leq t,\tau \leq T$ e $0 < s \leq 1$, definimos

$$\begin{aligned} u(t,s) &= x(t,s), \qquad & v(t,s) &= x(t,-s) \\ \xi(t,s) &= g(t,s), \qquad & \eta(t,s) &= g(t,-s) \end{aligned}$$

Além disso, para $0 \leq t,\tau < T$ e $0 < s,\mu \leq 1$, denotamos

$$\begin{cases} a(t,\tau,s,\mu) = e^{(t-\tau)c(s)}k(s,\mu) \\ b(t,\tau,s,\mu) = e^{(t-\tau)c(s)}k(s,-\mu) \\ \overline{c}(t,\tau,s,\mu) = e^{(t-\tau)c(-s)}k(-s,\mu) \\ d(t,\tau,s,\mu) = e^{(t-\tau)c(-s)}k(-s,-\mu) \end{cases} \tag{3.40}$$

As funções $a, b, \overline{c}$ e d dão origem a quatro operadores A, B, C e D definidos por

$$\begin{cases} Au(t,s) = \displaystyle\int_0^t \int_0^1 a(t,\tau,s,\mu)u(\tau,\mu)d\mu d\tau, \\ Bv(t,s) = \displaystyle\int_0^t \int_0^1 b(t,\tau,s,\mu)v(\tau,\mu)d\mu d\tau, \\ Cu(t,s) = \displaystyle\int_T^t \int_0^1 \overline{c}(t,\tau,s,\mu)u(\tau,\mu)d\mu d\tau, \\ Du(t,s) = \displaystyle\int_T^t \int_0^1 d(t,\tau,s,\mu)v(\tau,\mu)d\mu d\tau, \end{cases} \tag{3.41}$$

respectivamente. A equação (3.38) pode, então ser escrita como um sistema

$$\begin{cases} u(t,s) = Au(t,s) + Bv(t,s) + \xi(t,s), \\ v(t,s) = Cu(t,s) + Dv(t,s) + \eta(t,s), \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} I-A & -B \\ -C & I-D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

A matriz (3.42) admite inversa se os operadores $(I-A)^{-1}$ e $(I-D)^{-1}$ existem e os operadores $I-A-B(I-D)^{-1}C$ e $I-D-C(I-A)^{-1}B$ ou, equivalentemente, os operadores $I-(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C$ e $I-(I-D)^{-1}C(I-A)^{-1}B$ são invertíveis[3].

Além disso, se $I-(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C$ não fosse invertível, existiria uma solução não-trivial x do problema

$$(I-(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C)x = 0.$$

Mas isto é equivalente a termos

$$((I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C)x = x.$$

$$B(I-D)^{-1}Cx = x - Ax.$$

Isto é, 1 seria autovalor de $(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C$. Portanto, a matriz (3.42) admite inversa se 1 não pertence ao espectro do operador $(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C$:

$$1 \notin \sigma((I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C). \tag{3.43}$$

De fato, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Seja $c \in L^\infty([-1,1])$ e suponha que o operador (3.37) seja regular em $X = L^p([-1,1])$. Então (3.43) implica que o operador $I-L$, com L dado por (3.36), é invertível em $C_t(X)$.*

[3] Note que se $(I-A)^{-1}$ e $(I-D)^{-1}$ existem e os operadores $I-A-B(I-D)^{-1}C$ e $I-D-C(I-A)^{-1}B$, então $I-(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C$ e $I-(I-D)^{-1}C(I-A)^{-1}B$ são invertíveis. Reciprocamente, se $(I-A)^{-1}$ e $(I-D)^{-1}$ existem e $I-(I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C$ e $I-(I-D)^{-1}C(I-A)^{-1}B$ são invertíveis, então os operadores $I-A-B(I-D)^{-1}C$ e $I-D-C(I-A)^{-1}B$ são invertíveis.

Prova. Observe inicialmente que se

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

é um operador matricial em blocos tal que D é invertível, então

$$M = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Como o primeiro e o terceiro operador matricial do lado direito da identidade acima são invertíveis, segue que (sob a hipótese de existência de D^{-1}), M é invertível se e somente se também é invertível seu complemento de Schur (com relação a D): $A - BD^{-1}C$.

No caso do operador (3.42), se admitimos que $I - D$ é invertível, ele será invertível se e somente se seu complemento de Schur (com relação a $I - D$): $I - A - B(I - D)^{-1}C$. Admitindo também a inversibilidade de $I - A$, temos que $I - A - B(I - D)^{-1}C$ é invertível se e somente se $I - (I - A)^{-1}B(I - D)^{-1}C$. Vimos que isto é equivalente a que (3.43) se verifique. Neste sentido, para provar o teorema, basta mostrar que 1 não pertence nem ao espectro $\sigma(A)$ do operador A nem ao espectro $\sigma(D)$ do operador D (pois isto garante que $I - A$ e $I - D$ são invertíveis).

Para isto, é suficiente que os raios espectrais de A e D satisfaçam:

$$r_\sigma(A) = r_\sigma(D) = 0$$

onde $r_\sigma(K)$ denota o raio espectral de um operador $K \in \mathcal{L}(X)$.

Pelo Teorema **??**, temos

$$r_\sigma(K) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Como c é uma função limitada, existe $M > 0$ tal que $e^{Tc(s)} \le M$ para quase todo $s \in [-1, 1]$. Isto implica que

$$|a(t, \tau, s, \mu)| \le M|k(s, \mu)|, \quad |d(t, \tau, s, \mu)| \le M|k(-s, -\mu)|,$$

portanto

$$|Au(t, s)| \le \overline{A}u(t, s), \quad |Dv(t, s)| \le \overline{D}v(t, s), \tag{3.44}$$

onde os operadores $\overline{A}$ e $\overline{D}$ são definidos por

$$\overline{A}u(t, s) = M \int_0^t \int_0^1 |k(s, \mu)|u(\tau, \mu)d\mu d\tau, \tag{3.45}$$

e

$$\overline{D}v(t,s) = M\int_t^T\int_0^1 |k(-s,-\mu)|v(\tau,\mu)d\mu d\tau, \tag{3.46}$$

respectivamente. É fácil provar que as iteradas dos operadores de Volterra (3.45) e (3.46) satisfazem às estimativas

$$\|\overline{A}^n\|, \|\overline{D}^n\| \leq \frac{1}{n!}M^nT^n\||K|\|^n, \tag{3.47}$$

onde

$$|K|x(s) = \int_{-1}^1 |k(s,\sigma)|x(\mu)d\mu. \tag{3.48}$$

Mas (3.47) implica que os raios espectrais de $\overline{A}$ e $\overline{D}$, e consequentemente, (por (3.44)) também os de A e D são nulos. □

O próximo exemplo ilustra quão essencial (3.43) é no Teorema 3.2.

Exemplo. Sejam $c(s) \equiv 0$ e

$$k(s,\mu) = \begin{cases} 0, & s,\mu > 0 \text{ ou } s,\mu < 0, \\ 1, & s > 0 \text{ e } \sigma < 0, \\ -1, & s < 0 \text{ e } \sigma > 0. \end{cases}$$

Nós consideramos os operadores (3.41) para $T = \frac{\pi}{2}$, isto é, $(t,s) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1,1]$. Neste caso temos $Au(t,s) = Dv(t,s) \equiv 0$,

$$Bv(t,s) = \int_0^t\int_0^1 v(\tau,\mu)d\mu d\tau$$

e

$$Cu(t,s) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^t\int_0^1 u(\tau,\mu)d\mu d\tau.$$

Como a função $u(t,s) = \operatorname{sen} t$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ satisfaz $u = BCu$, concluímos que $1 \in \sigma(BC) = \sigma((I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C)$. A conclusão do Teorema 3.2 é falsa, pois a função

$$x(t,s) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 < s \leq 1, \\ \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad -1 \leq s < 0, \end{cases}$$

pertence a $C_t(X)$ e satisfaz $x - Lx = 0$.

Nós agora temos condição de estabelecer nosso principal resultado de existência da equação integro-diferencial (3.28) com condições de fronteira (3.29).

Teorema 3.3. *Seja $c \in L^\infty([-1,1])$ e suponha que o operador (3.37) seja regular em $X = L^p([-1,1])$. Assuma que (3.43) seja válido para os operadores A, B, C e D dados por (3.41). Então o problema (3.28)/(3.29) tem solução única $x \in C_t^1(X)$ para qualquer $\phi \in X_+, \psi \in X_-$ e $f \in C_t(X)$.*

Prova. Pelo Teorema 3.1 toda solução de (3.28)/(3.29) é uma solução da equação (3.38), e vice versa. Pelo Teorema 3.2, por sua vez, a condição (3.43) garante a unicidade de solução da equação (3.38) para qualquer g. Isto é suficiente para provar o teorema. □

3.3 Espaços K-normados

Nesta seção, deduziremos resultados de existência e unicidade de solução para o problema estacionário (3.28)/(3.29) através de um teorema de ponto fixo. Inicialmente, vamos introduzir uma estrutura de ordenação em um espaço vetorial que permite generalizar a noção de desigualdade de espaços Euclidianos.

3.3.1 Espaço vetorial parcialmente ordenado

Definição 3.2. *Seja E um espaço vetorial. Um conjunto $K \subset E$ é chamado de cone se $0 \in K$ e $\lambda x \in K$ para todo $\lambda \geq 0$ e todo $x \in K$.*

Definição 3.3. *Seja E um espaço vetorial munido de uma relação de ordem $\geq$. Dizemos que a relação de ordem $\geq$ é compatível com a estrutura algébrica de E se além de ser reflexiva, simétrica e transitiva ela satisfaz, para todo $x \geq y$, às seguintes condições:*

1. *$x + z \geq y + z$, para todo $z \in E$ e*

2. *$\lambda x \geq \lambda y$ para todo $\lambda \geq 0$.*

Um espaço vetorial E equipado com tal relação de ordem é chamado de espaço vetorial parcialmente ordenado. O conjunto E^+ de todos os vetores positivos de E é chamado de CONE POSITIVO *de E.*

É possível definir uma ordem em E a partir de um cone $K \subset E$ da seguinte maneira:

Dizemos que $x \leq y$ se $y - x \in K$.

3.3.2 K-normas

Sejam X um espaço vetorial e Z um espaço vetorial real ordenado por um cone $K \subset Z$.

Definição 3.4. *Um funcional $]|\cdot|[: X \to K$ é chamado de K-norma em X se*

1. *$]|x|[= 0$ se e somente se $x = 0$;*

2. $]|\lambda x|[= |\lambda|]|x|[$;

3. $]|x+y|[\leq]|x|[+]|y|[$
(para $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$). O espaço $(X,]|\cdot|[)$ é então chamado de espaço K-normado.

Seja X um espaço K-normado. Dizemos que a sequência $(x_n) \subset X$ é K-convergente para x em X (respectivamente K-Cauchy) se existe uma sequência $(z_n) \subset K$ que converge monotonicamente para zero e satisfaz $]|x_n - x|[\leq z_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ (respectivamente, $]|x_m - x_n|[\leq z_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ e $m > n$). Um espaço K-normado X é chamado K-completo se toda sequência K-Cauchy de X é K-convergente em X.

As normas usuais correspondem à escolha $Z = \mathbb{R}$ e K, o cone positivo de Z: $\mathbb{R}^+$. Um dos exemplos não-triviais mais simples de espaço K-normado é obtido tomando $Z = \mathbb{R}^2$ e K como o cone positivo de Z: $(\mathbb{R}^2)^+$.

3.3.3 Um teorema de ponto fixo

O próximo teorema é uma extensão natural para espaços K-normados do teorema de ponto fixo de Banach-Caccioppoli.

Teorema 3.4. *Seja $(X,]|\cdot|[)$ um espaço K-normado completo com K-norma $]|\cdot|[: X \to K \subset Z$, onde $Z = \mathbb{R}^2$ e $K = Z^+$. Seja $Q : K \to K$ um operador linear com raio espectral $r_\sigma(Q) < 1$. Suponha que $F : X \to X$ é um operador (linear ou não), que satisfaz uma condição do tipo contração*

$$]|Fx_1 - Fx_2|[\leq Q(]|x_1 - x_2|[), \quad (x_1, x_2 \in X). \tag{3.49}$$

Então F tem um único ponto fixo em X; este ponto fixo pode ser obtido como limite das aproximações sucessivas $x_{n+1} = Fx_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; x_0 \in X$ arbitrário).

Prova. Ver Teorema 2, Chur-Jen [3], p. 292.

Claramente, a escolha $Z = \mathbb{R}$ e K, o cone positivo de Z: $\mathbb{R}^+$ nos leva a $Gz = qz$ com $q < 1$. Tal situação corresponde ao princípio de contração usual do teorema de ponto fixo de Banach-Caccioppoli.

Agora vamos aplicar o Teorema 3.4 ao problema (3.28)/(3.29). Para tanto, tomamos $B = L^p([0,1]) \times L^p([0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$, equipado com a norma

$$\|(u,v)\|_B = \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Além disso, seja $X = L^p([0,T], B)$ o espaço de Bochner-Lebesgue das funções $t \mapsto x(t,\cdot) = (u(t,\cdot), v(t,\cdot))$, munido da norma

$$\|x\| = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \|x(s)\|_B^p ds \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup\{\|x(s)\|_B,\ s \in [0,T]\}, & p = \infty \end{cases} \tag{3.50}$$

e da K-norma

$$]|x|[= (\|u(t,\cdot)\|_{L^p}, \|v(t,\cdot)\|_{L^p}). \tag{3.51}$$

Assim, a K-norma (3.51) assume valores no cone positivo do espaço de Banach $Z = L^p([0,T],\mathbb{R}^2)$.

É fácil ver que a norma (3.50) é equivalente em X à norma

$$\|x\| = \left\{\int_0^T \int_0^1 [|u(t,s)| + |v(t,s)|]^p dtds\right\}^{1/p} \tag{3.52}$$

$$\int_0^T \|x(s)\|_B^p ds = \int_0^T \left(\left(\int_0^1 |u(\tau,\mu)|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |v(\tau,\mu)|^p d\mu\right)^{1/p}\right)^p d\tau$$

que será considerada daqui em diante. Como vimos na Seção 3.2, o problema (3.28)/(3.29) pode ser reduzido à equação para o operador matricial

$$\begin{pmatrix} I-A & -B \\ -C & I-D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

onde $u(t,s) = x(t,s)$ e $v(t,s) = x(t,-s)$ para $0 \le t \le T$ e $0 < s \le 1$,

$$\begin{cases} \xi(t,s) = \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s), \\ \eta(t,s) = \displaystyle\int_T^t e^{(t-\tau)c(-s)} f(\tau,-s)d\tau + e^{(t-T)c(-s)}\psi(-s), \end{cases}$$

e os operadores A, B, C e D são dados por (3.41). Com auxílio das funções (3.40) que geram os operadores (3.41), podemos definir o operador Q que aparece na condição de contração (3.49).

Suponha que

$$\begin{cases} \left\|\int_0^1 a(t,\tau,\cdot,\mu)u(\mu)d\mu\right\| \le \alpha\|u\| \\ \left\|\int_0^1 b(t,\tau,\cdot,\mu)v(\mu)d\mu\right\| \le \beta\|v\| \\ \left\|\int_0^1 c(t,\tau,\cdot,\mu)u(\mu)d\mu\right\| \le \gamma\|u\| \\ \left\|\int_0^1 d(t,\tau,\cdot,\mu)v(\mu)d\mu\right\| \le \delta\|v\| \end{cases} \tag{3.54}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Todas as normas em (3.54) são tomadas no espaço L^p correspondente.

Sejam $F : X \to X$ dado por

$$F\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(t,s) \\ \eta(t,s) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

e $Q : Z \to Z$, por

$$Qz(t) = Q\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t [\alpha u(\tau) + \beta v(\tau)]d\tau \\ \int_t^T [\gamma u(\tau) + \delta v(\tau)]d\tau \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
]|Fx_1 - Fx_2|[&= \left]\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t,s) - u_2(t,s) \\ v_1(t,s) - v_2(t,s) \end{pmatrix}\right|\right[\\
&= \begin{pmatrix} \left(\int_0^1 |A(u_1(t,s) - u_2(t,s)) + B(v_1(t,s) - v_2(t,s))|^p ds\right)^{1/p} \\ \left(\int_0^1 |C(u_1(t,s) - u_2(t,s)) + D(v_1(t,s) - v_2(t,s))|^p ds\right)^{1/p} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por (3.54), cada coordenada é menor ou igual à coordenada correspondente de $Q(]|x_1 - x_2|[)$. Logo

$$
\leq Q(]|x_1 - x_2|[)
$$

Pela definição (3.55) do operador F, todo ponto fixo (u, v) de F satisfaz

$$
\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(t,s) \\ \eta(t,s) \end{pmatrix}.
$$

Logo

$$
\begin{pmatrix} I - A & -B \\ -C & I - D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(t,s) \\ \eta(t,s) \end{pmatrix}.
$$

Isto é, (u, v) é uma solução da equação (3.53), e vice-versa.

Assim, para aplicar o Teorema 3.4 resta impormos condições adequadas que garantam que o operador (3.56) tem raio espectral $r_\sigma(Q) < 1$. Vamos explorar o fato de Q ser um operador positivo em Z. Para tanto, usaremos o teorema clássico de Krein-Rutman:

Teorema 3.5. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$ auto-adjunto. Seja $K \subset X$ um cone com interior $\operatorname{int} K$ não-vazio. Se $T(\operatorname{int} K) \subset \operatorname{int} K$, então $r_\sigma(T)$ é um autovalor associado a um autovetor $u \in K \setminus \{0\}$. Isto é, $Tu = r_\sigma(T)u$.*

Prova. Ver K-R's Teorema, Phat e Dieu [8], p. 495.

□

Vamos determinar $\rho > 0$ tal $Qz = \rho z$ para alguma função não-negativa $z = (u, v) \in Z$. Posteriormente, vamos exigir que $\rho < 1$. Pelo Teorema de Krein-Rutman (v. Teorema 3.5), isto garante que $r_\sigma(Q) < 1$. Explicitando as componentes de $Qz = \rho z$, obtemos o sistema

$$
\begin{cases} \rho u(t) = \displaystyle\int_0^t [\alpha u(\tau) + \beta v(\tau)] d\tau, \\ \rho v(t) = \displaystyle\int_t^T [\gamma u(\tau) + \delta v(\tau)] d\tau. \end{cases} \tag{3.57}
$$

Diferenciando (3.57), obtemos

$$\begin{cases} \rho u' = \alpha u + \beta v, \\ \rho v' = -\gamma u - \delta v. \end{cases} \tag{3.58}$$

com condições de contorno $u(0) = v(T) = 0$. Como $\rho = 0$ para $(\beta, \gamma) = (0, 0)$, vamos supor $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$. Sem perda de generalidade, seja $\beta \neq 0$.

Isolando v na primeira equação e substituindo na segunda equação de (3.58), obtemos

$$\frac{\rho u'' - \alpha u'}{\beta} = v' = \frac{-\gamma u}{\rho} - \frac{\delta(\rho u' - \alpha u)}{\beta\rho}.$$

Isto é, temos uma equação diferencial de segunda ordem:

$$u'' - \frac{\alpha - \delta}{\rho} u' - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\rho^2} u = 0.$$

Resolvendo a equação característica correspondente:

$$\lambda^2 - \frac{\alpha - \delta}{\rho} \lambda - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\rho^2} = 0.$$

encontramos os autovalores

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha - \delta)}{2\rho} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\rho} = \frac{(\alpha - \delta) + \sqrt{\Delta}}{2\rho} = \frac{A + B}{\rho}$$
$$\lambda_2 = \frac{(\alpha - \delta)}{2\rho} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\rho} = \frac{(\alpha - \delta) - \sqrt{\Delta}}{2\rho} = \frac{A - B}{\rho}$$

O comportamento da solução de (3.58) depende, é claro, do sinal do discriminante da equação característica

$$\frac{(\alpha - \delta)^2 + 4(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\rho^2} = \frac{\Delta}{\rho^2},$$

com $\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4\beta\gamma$. Ou seja, comportamento da solução de (3.58) depende, é claro, do sinal Δ.

Se $\Delta > 0$, então $u = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. Utilizando a condição de contorno $u(0) = 0$, temos

$$0 = c_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + c_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

Assim

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} - c_1 e^{\lambda_2 t} = c_1(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) = c_1 e^{\frac{A}{\rho} t}(e^{\frac{B}{\rho} t} - e^{-\frac{B}{\rho} t})$$

Sabendo que $v = \frac{\rho u' - \alpha u}{\beta}$ e usando as condições de fronteira $v(T) = 0$, ficamos com

$$\rho = \frac{T\sqrt{\Delta}}{\ln\left(\frac{(\alpha+\delta)+\sqrt{\Delta}}{(\alpha+\delta)-\sqrt{\Delta}}\right)}$$

O cálculo é análogo quando consideramos $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$. Chegamos, então à fórmula

$$\rho = \begin{cases} \frac{T\sqrt{\Delta}}{\ln \frac{\alpha+\delta+\sqrt{\Delta}}{\alpha+\delta-\sqrt{\Delta}}}, & \Delta > 0, \\ \frac{T(\alpha+\delta)}{2}, & \Delta = 0, \\ \frac{T\sqrt{-\Delta}}{2\arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{\alpha+\delta}}, & \Delta < 0,\ \alpha+\delta \neq 0 \\ \frac{T\sqrt{-\Delta}}{\pi}, & \Delta < 0,\ \alpha+\delta = 0. \end{cases}$$

Assim, temos agora todas as informações necessárias para aplicar o Teorema 3.4 para a equação (3.53) e, portanto, à equação integro-diferencial (3.28) com a condição de contorno (3.29). Resumimos nossos resultados no seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Seja $c \in L^\infty([-1,1])$ e suponha que o operador integral definido pelo núcleo k é regular em $X = L^p([-1,1])$. Assuma que as estimativas (3.54) sejam válidas, e que uma das quatro condições é satisfeita:*

1. $\Delta = (\alpha+\delta)^2 - 4\beta\gamma > 0$ *e* $T\sqrt{\Delta} < \ln \frac{\alpha+\delta+\sqrt{\Delta}}{\alpha+\delta-\sqrt{\Delta}}$;

2. $(\alpha+\delta)^2 = 4\beta\gamma$ *e* $T(\alpha+\delta) < 2$;

3. $\Delta < 0, \alpha+\delta \neq 0,$ *e* $T\sqrt{-\Delta} < 2\arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{\alpha+\delta}$;

4. $\Delta < 0, \alpha+\delta = 0,$ *e* $T\sqrt{-\Delta} < \pi$.

Então o problema (3.28)/(3.29) tem uma única solução para todo $\phi \in X_+, \psi \in X_-$, e $f \in C_t(X)$.

3.4 Multiplicadores Não-limitados

No Teorema 3.6 acima, bem como em todos os resultados de existência e unicidade de (3.28)/(3.29) deduzidos nas seções anteriores, admitimos que $c \in L^\infty([-1,1])$. Daqui em diante, consideramos multiplicadores c não-limitados e exigiremos que

$$c(s) \leq -1 \quad (0 < s \leq 1), \qquad c(s) \geq 1 \quad (-1 \leq s < 0). \tag{3.59}$$

Sob esta hipótese, o próximo exemplo nos mostra que os resultados de existência e unicidade obtidos anteriormente podem não ser válidos:

Exemplo Seja $X = L^1([-1,1]), c(s) = -1/s, k(s,\mu) \equiv 0, f(t,s) \equiv 0, \phi(s) \equiv 1$, e $\psi(s) \equiv 0$, ou seja, nós consideramos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t} = -\dfrac{x(t,s)}{s}, & (t,s) \in Q, \\ x(0,s) = 1, & 0 < s \leq 1, \\ x(1,s) = 0, & -1 \leq s < 0, \end{cases}$$

Temos, certamente, $\phi \in X_+, \psi \in X_-$, e $f \in C_t(X)$, mas a solução de (3.28)/(3.29) neste caso é dada por

$$x(t,s) = \begin{cases} e^{-t/s}, & 0 < s \leq 1, \\ 0, & -1 \leq s < 0 \end{cases} \tag{3.60}$$

não pertence a $C_t^1(X)$, uma vez que $\frac{\partial x}{\partial t}(0,\cdot) \notin X$.

Este fenômeno se deve ao fato de que, mesmo com dados ϕ, ψ e f muito suaves, a solução correspondente x pode tornar-se singular na fronteira $t = 0$ ou $t = T$. Esta dificuldade pode ser superada de duas maneiras distintas: ou enfraquecemos a exigência de regularidade sobre as possíveis soluções na fronteira, ou tomamos dados em espaços funcionais com peso.

Consideraremos $X = L^p([-1,1])$ e uma função mensuravel w ("função peso") definida em $[-1,1]$ e que nunca se anula, denotamos por $X(w)$, $X_+(w)$, e $X_-(w)$, os espaços de Banach munidos das normas

$$\|x\|_{X(w)} = \|wx\|_X, \qquad \|x\|_{X_\pm(w)} = \|wx\|_{X_\pm}, \tag{3.61}$$

respectivamente.

Agora, se c é um multiplicador que satisfaz (3.59), há uma relação entre os espaços X, $X(c)$ e $X\left(\frac{1}{c}\right)$. De fato, observe que segue de (3.59) que

$$|c(s)| \geq 1, \quad s \in [-1,0) \cup (0,1].$$

Se $x \in X(c)$, temos

$$\|x\|_X^p = \int_{-1}^1 |x(s)|^p ds = \|x\|_X^p = \int_{-1}^1 |x(s)c(s)|^p \frac{1}{|c(s)|^p} ds \leq \int_{-1}^1 |x(s)c(s)|^p ds = \|x\|_{X(c)}^p.$$

Logo, $X(c) \subset X$. Analogamente, se $x \in X$, temos

$$\|x\|_{X\left(\frac{1}{c}\right)}^p = \int_{-1}^1 \left| x(s)\frac{1}{c(s)} \right|^p ds \leq \int_{-1}^1 |x(s)|^p ds = \|x\|_X^p.$$

Portanto, $X \subset X\left(\frac{1}{c}\right)$. Valem as imersões

$$X(c) \subseteq X \subseteq X\left(\frac{1}{c}\right), \qquad X_\pm(c) \subseteq X_\pm \subseteq X_\pm\left(\frac{1}{c}\right), \tag{3.62}$$

com constantes de imersão iguais a 1.

Os dois lemas apresentados abaixo são completamente análogos ao Lema 3.1.

Lema 3.4. *Sejam $X = L^p([-1,1])$, $\phi \in X_+(c), \psi \in X_-(c)$ e $f \in C_t(X(c))$. Suponha que c satisfaz (3.59). Então, o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(t,s)}{\partial t} = c(s)g(t,s) + f(t,s), & (t,s) \in Q, \\ g(0,s) = \phi(s), & 0 < s \leq 1, \\ g(T,s) = \psi(s), & -1 \leq s < 0 \end{cases} \tag{3.63}$$

tem uma única solução $g \in C_t^1(X)$. Essa solução é definida para quase todo $(t,s) \in Q$ por

$$g(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{tc(s)}\phi(s), & (0 < s \leq 1), \\ \displaystyle\int_T^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau + e^{(t-T)c(s)}\psi(s), & (-1 \leq s < 0). \end{cases} \tag{3.64}$$

Prova. Basta repetir a prova do Lema 3.1. Para repetir a prova de que $g \in C_t^1(X)$, basta observar que

$$\int_{-1}^0 \left| \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau \right|^p ds \overset{(3.59)}{\leq} \|f\|_{C_t(X)}^p |t-t_0|^{p-1},$$
$$\int_0^1 \left| \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)c(s)} f(\tau,s)d\tau \right|^p ds \overset{(3.59)}{\leq} \|f\|_{C_t(X)}^p |t-t_0|^{p-1}.$$

Consequentemente

$$\int_{-1}^1 \left| \int_{t_0}^t F(t,s,\tau)d\tau \right|^p ds \leq 2\|f\|_{C_t(X)}^p |t-t_0|^{p-1}.$$

Além disso, (3.59) também garante juntamente com as hipóteses sobre ϕ, ψ e f que o Corolário **??** pode ser usado para obtermos continuidade de $g(t,\cdot)$ em t_0.

Observe que $\partial g/\partial t \in C_t(X)$ segue das hipóteses sobre ϕ, ψ e f e da estrutura de g em (3.64).

□

As afirmações abaixo são análogas às feitas nos Lema 3.3 e no Teorema 3.1 , respectivamente, a prova é uma consequência direta das imersões (3.62).

Observe que não podemos repetir a prova do Lema 3.3 pois usamos essencialmente o fato de $c(s)$ ser limitado.

Lema 3.5. *Se c satisfaz (3.59), e o operador integral definido pelo núcleo k é regular em $X = L^p([-1,1])$, então (3.36) é um operador limitado de $L^p(Q)$ em $C_t(X)$.*

Prova. Sendo K regular em $X = L^p([-1,1])$, pelo Teorema **??**, K é limitado em X. Pelo Lema 3.2, $\hat{K}$ é um operador limitado de $L^p(Q)$.

Provaremos agora que $L : L^p(Q) \to C_t(X)$. Suponha que $x \in L^p(Q)$ e $0 < s \leq 1$. Sejam $t_1 < t \in [0,T]$. Temos

$$(t-\tau)c(s) \leq 0, \ \forall \tau \in [0,t] \quad \text{e} \quad (t_1-\tau)c(s) \leq 0, \ \forall \tau \in [0,t_1]. \tag{3.65}$$

Da convexidade da função x^p e de (3.65), segue que

$$\int_0^1 |Lx(t,s) - Lx(t_1,s)|^p ds \quad \leq 2^p \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} |(e^{(t-t_1)c(s)} - 1)\hat{K}x(\tau,s)| d\tau \right)^p ds + 2^p \int_0^1 \left(\int_{t_1}^t |\hat{K}x(\tau,s)| d\tau \right)^p ds.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Lx(t,s) - Lx(t_1,s)|^p ds \leq 2^p T^{p-1} \int_0^1 \int_0^T |(e^{(t-t_1)c(s)} - 1)\hat{K}x(\tau,s)|^p d\tau ds \\ + 2^p (t-t_1)^{p-1} \int_0^1 \int_{t_1}^t |\hat{K}x(\tau,s)|^p d\tau ds. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Analogamente, se $-1 \leq s < 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 |Lx(t,s) - Lx(t_1,s)|^p ds \leq 2^p T^{p-1} \int_0^1 \int_0^T |(1 - e^{(t_1-t)c(s)})\hat{K}x(\tau,s)|^p d\tau ds \\ + 2^p (t-t_1)^{p-1} \int_0^1 \int_{t_1}^t |\hat{K}x(\tau,s)|^p d\tau ds. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Como

$$2|\hat{K}x(\tau,s)| \geq \begin{cases} |(e^{(t-t_1)c(s)} - 1)\hat{K}x(\tau,s)|, & 0 < s \leq 1 \\ |(1 - e^{(t_1-t)c(s)})\hat{K}x(\tau,s)|, & -1 \leq s < 0 \end{cases}$$

e $\hat{K}x(\tau,s) \in L^p(Q)$, pelo Corolário 2.2 ([7], p.21), podemos deduzir que $Lx \in C_t(X)$.

Com a mesma estimativa acima, prova-se que L é um operador limitado de $L^p(Q)$ em $C_t(X)$.

□

Teorema 3.7. *Suponha que c satisfaz (3.59), e que o operador integral definido pelo núcleo k é regular em $X = L^p([-1,1])$, então toda solução de (3.28)/(3.29) resolve a equação*

$$x(t,s) = Lx(t,s) + g(t,s). \tag{3.68}$$

Reciprocamente, toda solução $x \in C_t(X)$ de (3.68) é uma solução do problema (3.28)/(3.29) e a derivada parcial $\partial x/\partial t \in C_t\left(X\left(\frac{1}{c}\right)\right)$.

Prova. Basta repetir a prova do Teorema 3.1. Observe que o enfraquecimento da regularidade de $\partial x/\partial t$ é consequência de $x, f \in C_t(X)$ e da estrutura de (3.28). De fato, por (3.28) temos

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial t} \right\|_{X\left(\frac{1}{c}\right)}^p \leq \|x(t,\cdot)\|_X^p + \left\| \hat{K}\left(\frac{x(t,\cdot)}{c(\cdot)} \right) \right\|_X^p + \left\| \frac{f(t,\cdot)}{c(\cdot)} \right\|_X^p.$$

Das inclusões (3.62) e de $x, f \in C_t(X)$ segue que $\partial x/\partial t \in C_t\left(X\left(\frac{1}{c}\right)\right)$.

□

Com os espaços de função com peso, o Teorema 3.3 pode ser reescrito como segue.

Teorema 3.8. *Suponha que c satisfaz (3.59), e que o operador integral definido pelo núcleo k é regular em* $X = L^p([-1,1])$*. Assuma que*

$$1 \notin \sigma((I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C), \tag{3.69}$$

onde os operadores A, B, C *e* D *foram definidos em (3.41). Então o operador* $I - L$*, com* L *dado em (3.36), é invertível em* $C_t(X)$*. Consequentemente, o problema (3.28)/(3.29) tem solução única* $x \in C_t(X)$ *com* $\partial x/\partial t \in C_t\left(X\left(\frac{1}{c}\right)\right)$ *para qualquer* $\phi \in X_+, \psi \in X_-$ *e* $f \in C_t(X)$*.*

4 Considerações Finais

Os resultados de existência e unidade para problemas de valores de contorno que obtidos na Subseção 3.4 possuem varias aplicações. Em Maria [7], eles foram aplicados a um problema de radiação modelado por uma equação integro-diferencial do tipo Barbashin. Esta equação foi originalmente proposta para tratamento numérico pelo professor Ricardo Carvalho de Barros ao seu orientando Emilio Jorge Lydia no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional [6]. As funções $\sigma_T(t), \sigma_S(t)$ e $S(t)$ foram consideradas constantes com respeito a t. Consequentemente, os multiplicadores c e núcleos k não dependem de t. Em Maria [7], os multiplicadores e núcleos são estacionários.

Referências

[1] APPELL, J.M,; KALITVIN, A.S.; ZABREJKO, P.P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, Marcel Dekker, New York (2000).

[2] AZBELEV, N.V.; MAKSIMOV, V.P.; RAKHMATULLINA, L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations*: methods and applications, vol. 3, World Federation Publishers, Atlanta, Ga, USA, 1995, (de Advanced Series in Mathematical Science and Engineering).

[3] JEN, C. Chur, *Nonlinear Integro-Differential Equations of Barbashin Type*: Topological and Monotonicity Methods, Journal of Integral Equations and Applications, 8(3), 287-305, 1986.

[4] KRASNOSEL'SKII, M.A. et al *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Leyden: Noordhoff International Publishing, 1976.

[5] KREIN, S.G. *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 29, American Math. Society, Providence, R.I., 1970.

[6] LYDIA, E.J.; BARROS, R.C.. Fórum de Ciência e Tecnologia do Centro de Tecnologia e Ciências, 1., 2010, Rio de Janeiro, *Modelagem matemática do transporte de nêutrons*

em um meio material. Anais do Fórum de Ciência e Tecnologia do CTC, UERJ, Rio de Janeiro, 2010.

[7] MARIA, R.m. *A*nálise Matemática de uma Equação Integro-Diferencial para Simulação de Transporte de Nêutrons. (dissertação), Mestrado em Ciências Computacionais, Rio de Janeiro, UERJ, 2011.

[8] PHAT, V.N.; DIEU, T.C. *On the Krein-Rutman Teorema and Its Applications to Controllability*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 120, No. 2, 495-500, 1994.