A Equação de Euler Generalizada

Carlos F. Vasconcellos [*]

Resumo

Neste trabalho consideramos o método variacional clássico para resolver alguns problemas que envolvem EDP não linear e equações integrais. Ou seja, definindo um funcional semelhante a estes que aparecem frequentemente em cálculo das variações, mostramos que o seu mínimo(ou máximo) satisfaz a uma Equação de Euler generalizada e portanto é solução de alguma equação diferencial ou integral. Este método, inspirado em resultados clássicos e bem conhecidos, permite resolver vários problemas de Equações Diferenciais e Integrais de uma só maneira.

1 Introdução

Neste trabalho nós daremos uma condição necessária para um extremo (máximo ou mínimo) de funcionais do seguinte tipo:

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, Au(x))\, dx, \tag{1.1}$$

onde Ω é un aberto conexo e limitado do $\mathbb{R}^n, n \geq 1$.
Nós mostraremos então, que este extremo vai satisfazer uma equação diferencial ou integral, a qual denominaremos "Equação de Euler Generalizada".
Começaremos, nesta introdução, apresentando algumas definições, notações e hipóteses, que são fundamentais ao nosso principal resultado, o qual será enunciado e provado na seção 2.
Na seção 3 daremos alguns resultados sobre minimização de funcionais não lineares definidos em subconjuntos convexos de espaços de Banach.
Na seção 4 nós daremos aplicações do resultado resolvendo uma EDP não linear e as equações integrais de Volterra e Hammerstein.
Seja $W^{m,p}(\Omega), m \in \mathbb{N}, 1 < p < +\infty$, o espaço de Sobolev das distribuições u em $L^p(\Omega)$ tais

[*]Instituto de Matemática e Estatística - UERJ, R. São Francisco Xavier, 524, Sala 6016, Bloco D - CEP 20550-013, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. e-mail: cfredvasc@ime.uerj.br

que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a m pertencem a $L^p(\Omega)$.
A norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por:

$$||u||_{m,p} = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_p \right\}^{1/p}$$

Considere $C_0^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, com derivadas de todas as ordens contínuas e com suporte compacto. O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$ e seu dual é $W^{-m,p'}(\Omega)$, onde $p' = \dfrac{p}{p-1}\cdot$
Seja $A : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow [L^p(\Omega)]^k = L^p(\Omega) \times .... \times L^p(\Omega),\ k \geq 1$, um operador linear e contínuo, com coordenadas $A_1, ..., A_k$. Para cada $j = 1, 2..., k$, seja A_j^*, o adjunto da restrição do operador A_j ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Observamos que o operador A_j^* é linear contínuo de $L^{p'}(\Omega)$ em $W^{-m,p'}(\Omega)$, satisfazendo:

$$\left\langle A_j^* v,\, h \right\rangle_{-mp',\,p} = \langle v\,, A_j h \rangle_{p',\,p}\,,\ \ v \in L^{p'}(\Omega)\,\mathrm{e}\,h \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

onde, na igualdade acima, a dualidade à esquerda é entre os espaços $W^{-m,p'}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ e a dualidade à direita é entre os espaços $L^{p'}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$.
Seja, agora o conjunto E_k das funções F de valores reais com domínio em $\Omega \times \mathbb{R}^k$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1) Para cada $x \in \Omega$ a função : $y \longmapsto F(x, y)$ pertence a $C^1(\mathbb{R}^k)$

2) Para cada $y \in \mathbb{R}^k$ as funções, $x \longmapsto F(x, y)$ e $x \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial y_j}(x, y),\ j = 1, 2..., k$ são funções mensuráveis em Ω.

3) Para cada $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k)$ em $[L^p(\Omega)]^k$ a função definida por $F(., \varphi)(x) = F(x, \varphi(x)), x \in \Omega$ pertence a $L^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}(., \varphi)\ j = 1, 2..., k$, pertencem a $L^{p'}(\Omega)$.

2 A Equação de Euler Generalizada

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o nosso principal resultado, ou seja uma condição necessária para existência de ponto extremo para funcionais do tipo definido em (1.1).

Teorema 2.1 ***(resultado principal)***
Sejam $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto não vazio de $W^{m,p}(\Omega)$ e F em E_k e suponha que exista u_0 que minimiza o funcional (1.1) em $\mathcal{U}_{ad}$. Se para todo h em $C_0^\infty(\Omega)$ existe $r > 0$ tal que $u_0 + th$ pertence a $\mathcal{U}_{ad}$, sempre que $|t| \leq r$, então u_0 satisfaz a seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^{k} A_j^* \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}(., Au_0) \right) = 0, \text{ em } W^{-m,p'}(\Omega). \tag{2.1}$$

Prova: Pela hipótese 3) sobre o conjunto E_k, as funções $F(., Au)$ e $\frac{\partial F}{\partial y_j}(., Au)$, com $j = 1, 2, ..., k$ pertencem respectivamente a $L^1(\Omega)$ e $L^{p'}(\Omega)$, para todo u em $\mathcal{U}_{ad}$. Como F pertence a E_k e o operador A é linear e contínuo, segue que as aplicações definidas abaixo são contínuas (ver [5] teor.2.1, pag. 22):

$$u \in W^{m,p}(\Omega) \longmapsto F(., Au) \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad u \in W^{m,p}(\Omega) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial y_j}(., Au) \in L^{p'}(\Omega) \tag{2.2}$$

Considere agora, h em $C_0^\infty(\Omega)$ e seja $t_0 > 0$ tal que $u_0 + th$ pertença a $\mathcal{U}_{ad}$ quando $0 \leq t \leq t_0$. Assim, as aplicações $g_o(t) = F(., A(u_0 + th))$ definida de $[0, t_0]$ em $L^1(\Omega)$ e $g_j(t) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(., A(u_0 + th)), j = 1, 2, ..., k$ definida de $[0, t_0]$ em $L^{p'}(\Omega)$, são contínuas. Portanto, para cada t em $[0, t_0]$, a integral $\int_0^t g_j(s)ds$ é bem definida na norma $L^{p'}(\Omega)$, $j = 0, 1, ..., k$.
Daí,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{J(u_0 + th) - J(u_0)}{t} = \frac{1}{t} \int_\Omega F(x, A(u_0 + th)(x)) - F(x, Au_0(x))dx = \\ &= \frac{1}{t} \int_\Omega \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, A(u_0 + sh)(x))A_j h(x)dx = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left\langle \frac{1}{t} \int_0^t g_j(s)ds \, , \, A_j h \right\rangle_{p',p} = \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \langle g_j(s) \, , \, A_j h \rangle_{p',p} ds, \quad \forall t \in [0, t_0]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tomando o limite quando $t \longrightarrow 0^+$ em (2.3), nós obtemos $\sum_{j=1}^{k} \langle g_j(0) \, , \, A_j h \rangle_{p',p} \geq 0$.

Como h é arbitrário, nós podemos concluir que $\sum_{j=1}^{k} \langle g_j(0) \, , \, A_j h \rangle_{p',p} = 0$.

Portanto, $\sum_{j=1}^{k} A^* g_j(0) = \sum_{j=1}^{k} A^* \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}(., Au_0) \right) = 0$ em $W^{-m,p'}(\Omega)$. ■

3 Resultados sobre funcionais não lineares

Nesta seção, com o objetivo de tornar a leitura do presente trabalho auto-suficiente, apresentaremos alguns resultados sobre minimização de funcionais não lineares em espaços de Banach reflexivos.
No que segue consideraremos $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo fechado de um espaço de Banach reflexivo X. Denotaremos por $\| \cdot \|$ a norma em X e por X' seu espaço dual.

Uma sequência $\{u_n\}$ em X converge fraco para um vetor u em X, se para qualquer funcional linear φ em X' tem-se $\varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u)$.

Definição 3.1 *Um funcional não linear* $J : \mathcal{U}_{ad} \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dito fracamente semicontínuo inferiormente(w-s.c.i)em* $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$*, se para toda sequência* $\{u_n\}$*, em* $\mathcal{U}_{ad}$*, fracamente convergente para* u_0 *implicar que* $\liminf J(u_n) \geq J(u_0)$.

Observação 3.1 *Podemos observar o seguinte:*

i) É resultado conhecido de análise funcional que um conjunto convexo fechado é fracamente fechado (ver Brezis [2] (pag 38)).

ii) Um funcional J é fracamente semicontínuo inferiormente (w-s.c.i) em todo domínio se é w-s.c.i em cada ponto do domínio.

Definição 3.2 *Um funcional não linear* $J : \mathcal{U}_{ad} \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dito coercivo se:*

$$J(u) \longrightarrow +\infty \text{ sempre que } \|u\| \longrightarrow +\infty. \tag{3.1}$$

O Teorema a seguir determina as condições para que um funcional J realize o mínimo em um convexo fechado. Para facilitar a leitura do texto daremos sua demonstração (ver também Lions [7](pag 6) e Costa [4] (pag 3)).

Teorema 3.1 ***(mínimo de um funcional)***
Seja $J : \mathcal{U}_{ad} \subset X \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ um funcional fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo e $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo e fechado. Então, existe u_0 em $\mathcal{U}_{ad}$ solução do seguinte problema: $J(u_o) = \min\{J(u) : u \in \mathcal{U}_{ad}\}$.

Prova: Por (3.1) segue que existe $M > 0$, tal que se $u \in \mathcal{U}_{ad}$ e $\|u\| > M$ então $J(u) > 1$.

Por outro lado, considere o conjunto $\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{U}_{ad} : \|u\| \leq M\}$.
Supondo, por absurdo, que o funcional J não seja limitado inferiormente em $\mathcal{N}$, existiria uma sequencia $\{u_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) = -\infty$.
Como $\mathcal{N}$ é limitado, então vai existir uma subsequencia $\{u_{n_k}\}$ que converge fraco para u_1 em $\mathcal{N}$, assim por hipótese $\liminf J(u_{n_k}) \geq J(u_1)$ o que mostra uma contradição.
Portanto, o funcional J é limitado inferiormente em $\mathcal{U}_{ad}$.
Seja $\alpha = \inf\{J(u) : u \in \mathcal{U}_{ad}\}$, logo existe $\{u_n\}$ em $\mathcal{U}_{ad}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) = \alpha$.
Assim, pela coercividade de J, a sequencia $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{U}_{ad}$ e daí existe uma subsequencia $\{u_{n_k}\}$ fracamente convergente para u_o em $\mathcal{U}_{ad}$. Como J é w-s.c.i temos $\alpha = \liminf J(u_{n_k}) \geq J(u_o)$ e concluimos que $J(u_o) = \alpha$ demonstrando o teorema ■

Definição 3.3 *Um funcional não linear $J : \mathcal{U}_{ad} \subset X \longrightarrow \mathrm{I\!R}$, onde $\mathcal{U}_{ad}$ é convexo, é diferenciável à Gateaux em u_o se:*
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{J(u_o + th) - J(u_o)}{t}$ *existe, para todo h em $\mathcal{U}_{ad}$.*
Neste caso este limite é denotado por $\delta J_h(u_o)$

Teorema 3.2 ***(caracterização do mínimo de um funcional)***
Sejam um funcional não linear $J : \mathcal{U}_{ad} \subset X \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ e u_o um ponto de mínimo para este funcional em $\mathcal{U}_{ad}$. Então, se J é diferenciável à Gateaux em u_o, temos $\delta J_h(u_o) = 0$, para todo h em $\mathcal{U}_{ad}$.

Prova: A prova é bem semelhante à feita em Cálculo para funções reais. ■

Observação 3.2 *Os resultados acima caracterizando mínimo de um funcional não line-ar podem ser reescritos para o máximo de um funcional em um conjunto convexo, lembrando que se um vetor é ponto de máximo para J então será de mínimo para $-J$ e que $\limsup J(u_n) \geq \liminf J(u_n)$.*

4 Aplicações

Exemplo 1: (Uma equação diferencial parcial não linear)

Seja Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, satisfazendo as condições de regularidade descritas em Lions [6].

Consideremos $p \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ em $\mathbb{N}^n$ e denotemos por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Seja $(k-1)$ o número de multi-indices definidos a partir de α, com $|\alpha| \leq m$. Assim, podemos representar os vetores de $\mathbb{R}^k$ por $y = ((y_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\ ,\ y_k)$.

Dado f em $L^{p'}(\Omega)$, então a função $F(x,y) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} |y_\alpha|^p\ +\ y_k f(x)$ pertence a E_k.

Seja também o operador $Au = ((D^\alpha u)_{\alpha \leq m}\ , -u)$ onde u é definido em $W^{m,p}(\Omega)$, logo $A^*_\alpha = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$, para $|\alpha| \leq m$ e $A^* = -I$.

Consideremos a função traço $\overrightarrow{\gamma} : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, onde denotamos por Γ a fronteira do conjunto Ω (ver resultados referentes ao Teorema do Traço, por exemplo, em Adams [1]).

Seja g em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ e considere o conjunto $\mathcal{U}_{ad} = \{u \in W^{m,p}(\Omega)\,;\, \overrightarrow{\gamma}(u) = g\}$.

Observamos que como $\overrightarrow{\gamma}$ é um operador linear, contínuo e sobrejetivo com o núcleo $W^{m,p}_0(\Omega)$ (ver por exemplo, Lions [6], Adams [1]) então o conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ é não vazio, fechado e convexo.

Vejamos primeiramente o seguinte problema:

Dado o funcional $J(u) = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{1}{p} \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^p - f(x)u(x) \right) dx$, definido em $W^{m,p}(\Omega)$, encontrar seu mínimo em $\mathcal{U}_{ad}$.

Este resultado é consequência das seguintes propriedades do funcional J:

a) J é fracamente semi-contínuo inferiormente em $W^{m,p}(\Omega)$.

b) $J(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\|u\|_{m,p} \longrightarrow +\infty$ (coercividade).

Assim, pelo Teorem 3.1, segue que existe u_0 em $\mathcal{U}_{ad}$ minimizando J em $\mathcal{U}_{ad}$.

Agora, como o funcional J e o conjunto convexo $\mathcal{U}_{ad}$, satisfazem as hipoteses do Teorema

2.1, podemos afirmar que u_0, pertencente a $\mathcal{U}_{ad}$, é solução da seguinte equação:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(|D^\alpha u_0|^{p-2} D^\alpha u_0\right) = f, \text{ em } W^{-m,p'}(\Omega)\cdot$$

Portanto, u_0 é solução fraca do seguinte problema não linear:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(|D^\alpha u_0|^{p-2} D^\alpha u_0\right) = f \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Observação 4.1 *Nós podemos encontrar resultados relacionados no trabalho de F. Browder [3], sobre o funcional em (1.1), quando o operador A é definido por:*
$Au = (u, ..., D^m u)$ e o conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$ é um subespaço fechado de $W^{m,p}(\Omega)$.
Em Lions [8](cf. pags 182-183) foi usado método direto e método da monotonia para encontrar a solução da equação de Euler relacionada com o funcional (1.1), onde $Au = (u, ..., D^m u)$ e o conjunto $\mathcal{U}_{ad} = W^{m,p}(\Omega)$.

Exemplo 2: (Uma equação integral linear)

Consideramos, agora $m = 0$, $p = 2$ e definimos a função $M : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, onde $Mu(\cdot) = \displaystyle\int_\Omega K(\cdot, y)u(y)dy$, se o núcleo K pertencer à $L^2(\Omega \times \Omega)$ e $\|K\| < 1$. Nós podemos ver que M é um operador linear e contínuo e o operador definido por $Au = u - Mu$ satisfaz ao seguinte:

$$(Au\,,\, Au) \geq (1 - \|K\|)^2 \|u\|^2$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma no espaço $L^2(\Omega)$ e $(\cdot\,,\cdot)$ é o respectivo produto interno.
Pela definição do operador linear A, podemos concluir que $A^* = A$ (cf Riesz-Nagy [11]).
Seja a função: $F(x, y, z) = \dfrac{1}{2}y^2 - f(x)z$, onde f pertence à $L^2(\Omega)$ e o par (y, z) está em $\mathbb{R}^2$ e finalmente seja o conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega)$.
Então, desde que a função F está em E_2 podemos definir o seguinte funcional:

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(Au(x)\right)^2 - f(x)Au(x)\right] dx \tag{4.2}$$

O primeiro problema é encontrar o mínimo do funcional (4.2)em $L^2(\Omega)$.
Como no exemplo 1, acima, o funcional (4.2) tem as seguintes propriedades:

a) J é fracamente semi-contínuo inferiormente em $L^2(\Omega)$.

b) $J(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\|u\| \longrightarrow +\infty$ (coercividade).

Portanto, existe u_0 que minimiza o funcional (4.2) em $L^2(\Omega)$ e assim, pelo Teorema 2.1, u_0 satisfaz a seguinte equação em $L^2(\Omega)$:

$$A^*\left(Au_0 - f\right) = 0\cdot$$

Como A^* é injetiva, temos $Au_0 - f = 0$ em $L^2(\Omega)$.
Podemos então concluir, afirmando que u_0 é solução da seguinte equação integral:

$$u_0(x) - \int_\Omega K(x,y)u_0(y)\,dy = f(x) \text{ q.s. em } \Omega \tag{4.3}$$

Exemplo 3: (a equação de Hammerstein)

Seja φ: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, satisfazendo as seguintes hipóteses:

i) $\varphi'(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

ii) Para cada u em $L^2(\Omega)$, a função $\varphi(u)$ pertence a $L^2(\Omega)$.

Então, podemos observar que a função $\Phi(y) = \displaystyle\int_0^y \varphi(s)ds$, $y \in \mathbb{R}$ aplica $L^2(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$.
Portanto, segue por Krasnosel'skii [5](Teor. 2.1) que as funções $u \longmapsto \varphi(u)$ e $u \longmapsto \Phi(u)$ são contínuas respectivamente de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $L^2(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$.
Sejam o núcleo K e o operador M definidos como no exemplo 2, e além disso vamos supor o seguinte:

i) $K(x,y) = K(y,x)$ para todo x e y em Ω.

ii) Existe $c > 0$ tal que $(Mu\,,\,u) \geq c\|u\|^2$ para todo u pertencente $L^2(\Omega)$.

Definimos $F(x,y,z,w) = \dfrac{1}{2}y^2 + \Phi(z) + f(x)w$, onde $f \in L^2(\Omega)$. Consideramos também $A_1 = M^{\frac{1}{2}}$, $A_2 = I$ e $A_3 = -I$.
O funcional $J(u) = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|A_1u(x)|^2 + \Phi(u(x)) - f(x)u(x)\right] dx$, tem um mínimo em $L^2(\Omega)$.
De fato, como $J_o = \int_\Omega \Phi(u(x))$ é convexo e contínuo ($\Phi''(s) = \varphi'(s) > 0$ e $u \longmapsto \Phi(u)$

é contínuo) e $\|A_1 u\|^2 \geq c\|u\|^2$ segue por Lions-Stampacchia [9] (teor. 2.2) que existe u_0 que minimiza J em $L^2(\Omega)$.

Portanto, como F pertence a E_3, segue pelo teorema 2.1, que u_0 satisfaz a equação $\varphi(u_0) + Mu_0 = f$ em $L^2(\Omega)$.

Portanto $w_0 = \varphi(u_0)$ é solução da equação de Hammerstein:

$$w_0 + \int_\Omega K(x,y)\varphi^{-1}(w_0)dx = f(x) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Observação 4.2 *No trabalho de Krasnosel'skii [5](pag. 306), podemos encontrar um teorema de existência para a equação de Hammerstein, a qual é a equação de Euler associada a um funcional definido em $L^2(\Omega)$, do seguinte tipo: $\phi(u) = \frac{1}{2}(u\,,\,u) + F(u)$.*
Além disso, podemos encontrar outros princípios variacionais sobre a equação de Hammerstein no trabalho de P. Robinson [12].

Referências

[1] R.A.Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H.Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1987.

[3] F.Browder, Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems, Bull. A.M.S., vol.71, (1), 1965, 176-183.

[4] D.G.Costa, *Tópicos em Análise Não-Linear e Aplicações às Equações Diferen-ciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[5] M.A.Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equation*, Pergamon, 1964.

[6] J.L.Lions, *Problémes aux limites dans les equations aux dérivèes partielles*, les Presses de L'Université de Montreal, 1965.

[7] J.L.Lions, *Contrôle optimal de systemes gouvernés par des equations aux dérivèes partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[8] J.L.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[9] J.L.Lions and G.Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure App. Math, vol. XX, 1967, 443-519.

[10] L.A.Medeiros and P.H.Rivera, *Iniciação aos Espaços de Sobolev*, texto de Métodos Matemáticos IM-UFRJ, 1977.

[11] F.Riesz and B.Sz.Nagy, *Functional Analysis*, F. Ungar, 1955.

[12] P.Robinson, Complementary variational principles, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Academic Press, 1971, 507-576.

[13] R.Teman and I.Ekeland, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.