

ENVOLTÓRIAS DE CURVAS PLANAS *

M. A. VILCHES †

Resumo

Diferentes fenômenos ocorrem naturalmente nas curvas planas e são de interesse em Topologia, Teoria das Catástrofes, Geometria Algébrica e em Computação Gráfica. Nestas notas, apresentaremos uma abordagem totalmente elementar da teoria das envoltórias de curvas planas com algumas aplicações. Essencialmente, utilizaremos algumas noções elementares de Geometria Diferencial e Geometria Algébrica.

Abstract

Based on classical geometric concepts we studied the geometry of envelopes. The envelopes are connected with light caustics, geometric computer graphics, modeling of gear teeth in mechanical engineering. The main focus of this work is on envelopes of plane curves.

1 Introdução

As envoltórias, inicialmente foram estudadas por Leibniz e Bernoulli interessados nos chamados problemas de tangência. As envoltórias de curvas planas são frequentemente utilizadas para definir novos tipos de curvas, a partir de outras conhecidas. Como envoltórias aparecem diversas curvas notáveis, como a astróide, a cicloide e as chamadas roulettes ou rolantes. Atualmente, o interesse nas envoltórias vai da Geometria Algébrica à Teoria das Catástrofes, passando pela Computação Gráfica, Arquitetura e pela Engenharia Mecânica. Antes de entrar no estudo das envoltórias das curvas planas, precisamos enunciar alguns resultados clássicos da Análise em várias variáveis.

Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k , $0 < k \leq +\infty$, $p \in \mathbb{R}^m$ e denotemos por $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ as funções coordenadas de f . Definimos e denotamos a matriz jacobiana de f em p como a matriz $n \times m$: $J(f(p)) = (\nabla f_i(p))$, onde ∇f_i é o gradiente da função coordenada f_i . O ponto $p \in \mathbb{R}^m$ é dito regular de f e a função f é uma submersão se a matriz jacobiana $J(f(p))$ tem posto n ; logo, $n \leq m$. Isto é, a derivada de f no ponto p é sobrejetiva, ou seja, $Df(p)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. Se $n = 1$, p é regular se, e somente se $\nabla f(p) \neq 0$. Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f se cada ponto da preimagem é um ponto regular; logo, se $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular, então $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^m$ só possui pontos regulares. O conjunto de nível $f^{-1}(c)$ é estudado exaustivamente em Teoria de Morse. Em geral, $f^{-1}(c)$ pode ter várias componentes conexas e ter auto-interseções e sua topologia pode ser muito complicada. Um ponto que não é regular é dito ponto crítico ou ponto singular. Do teorema de Sard, segue que o

*

Palavras chave: Curvas Planas, Singularidades

†Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ

conjunto dos pontos críticos de uma função de classe C^k tem medida de Lebesgue nula. Consideremos $f : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão de classe C^k . Do teorema da Função Inversa, temos que se $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de dimensão n . No caso $n = p = 1$, $f^{-1}(c)$ é uma curva regular na vizinhança do ponto regular e no caso $n = 1$ e $p = 2$, $f^{-1}(c)$ é uma superfície regular na vizinhança do ponto regular. Se $n = 1$, não é difícil ver que o vetor gradiente de f é normal a cada curva da família; se a superfície de nível $f^{-1}(c)$ possui autointerseções transversais e p é um ponto da interseção, então $\nabla f(p) = 0$, pois o único vetor normal a todas as componentes é o vetor nulo. Lembremos que a equação $f(x, y, z) = 0$ define implicitamente a função $z = \Phi(x, y)$ se, e somente se $f(x, y, \Phi(x, y)) = 0$. Isto é, o gráfico de Φ está contido na superfície de nível $f^{-1}(0)$. Do Teorema da Função Implícita, temos que existe $\Phi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^k tal que $f(x, \Phi(x)) = 0$, para todo $x \in U$. O teorema diz que se a matriz jacobiana de f é não singular num ponto, numa vizinhança do ponto a equação $f(x, \Phi(x)) = 0$ pode ser resolvida. Em particular, se $n = p = 1$ e f é tal que $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, então existe uma única Φ tal que $\Phi(0) = 0$ e numa vizinhança da origem, $f(x, y) = 0$ se, e somente se $y = \Phi(x)$. A matriz Hessiana de f em p é matriz a $m \times m$ definida e denotada por $Hess(f)(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ tal que $1 \leq i, j \leq m$, onde as derivadas parciais são calculadas no ponto correspondente.. Um ponto crítico é não degenerado se a matriz hessiana no ponto é invertível.

2 Envoltórias

A equação $f(x, y, \lambda) = 0$ define uma família de curvas planas; isto é, para cada λ_0 fixado, a equação $f(x, y, \lambda_0) = 0$ define implicitamente uma curva no plano. Consideremos a submersão de classe C^k :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \lambda) &\rightarrow f(x, y, \lambda) \end{aligned}$$

tal que a família de curvas planas $f(x, y, \lambda) = 0$ seja a superfície de nível zero de f , quando o parâmetro λ é considerado como a coordenada z . Para cada λ arbitrário, consideramos a submersão $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , definida por $f_\lambda(x, y) = f(x, y, \lambda)$; suponha que para todo λ , zero é valor regular de f_λ , isto é, $\nabla f_\lambda \neq 0$, logo $C_\lambda = f_\lambda^{-1}(0)$ é uma curva parametrizada (sobre a superfície de nível zero de f) numa vizinhança do ponto regular. Se a função f é polinomial, as curvas são algébricas. A envoltória de uma família de curvas planas que dependem de um parâmetro é uma curva, que não pertence à família e que é tangente a todas as curvas da família. Essencialmente, a envoltória se obtém eliminando o parâmetro que caracteriza a família entre a equação desta e sua derivada em relação a λ . Em geral, a envoltória de uma família de curvas pode não existir, mas no caso em que exista deve satisfazer ao seguinte resultado:

Teorema 2.1 A envoltória de $f(x, y, \lambda) = 0$, onde $x = x(\lambda)$ e $y = y(\lambda)$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Prova: Considere uma vizinhança do ponto de tangência da envoltória com a família de curvas planas, nessa vizinhança existe parametrização regular da envoltória; logo, nesta vizinhança a envoltória satisfaz: $f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$ tal que $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Derivando implicitamente $f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$ em relação a λ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0.$$

No ponto comum de tangência, devemos ter:

$$\nabla f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) \cdot (x'(\lambda), y'(\lambda)) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(\lambda) = 0,$$

onde \cdot é o produto interno de \mathbb{R}^2 ; logo, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0.$$

Segue do teorema que (x_0, y_0) pertence à envoltória da família se, e somente se, existe λ tal que:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Em geral, este sistema é não linear e pode ser utilizada a teoria do resultante de Sylvester, para resolvê-lo. Ao eliminar o parâmetro λ , obtemos uma expressão em x e y que é a equação de uma curva, na forma implícita, cujo traço é a envoltória da família. Também segue do teorema anterior, que a envoltória da família é, localmente, a interseção das curvas da família, numa vizinhança de λ . De fato, seja (x_0, y_0) o ponto de interseção; então $f(x_0, y_0, \lambda) = f(x_0, y_0, \lambda + \varepsilon)$, se $\varepsilon \rightarrow 0$; logo:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, \lambda + \varepsilon) - f(x_0, y_0, \lambda)}{\varepsilon} = 0.$$

O seguinte teorema nos oferece as condições para que uma família de curvas planas possua envoltória.

Teorema 2.2 A condição suficiente para a existência da envoltória nos pontos regulares de uma família de curvas planas é que $f \in C^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \neq 0$ e que:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \lambda} \end{vmatrix} \neq 0$$

Prova: Como por hipótese, o jacobiano de f é não nulo, segue do Teorema da Função Implícita que existem soluções $x = x(\lambda)$ e $y = y(\lambda)$. Derivando o sistema 2.1, em relação a λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial y} y'(\lambda) + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que as soluções $x = x(\lambda)$ e $y = y(\lambda)$ não podem ser constantes; caso contrário, se $x'(\lambda) = y'(\lambda) = 0$, segue da segunda equação do sistema 2.2 que $\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0$, o que contraria a hipótese. Por outro lado, como $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$, o sistema 2.2 é equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(\lambda) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial y} y'(\lambda) + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0 \end{cases}$$

Este último sistema tem solução, pois seu determinante é o jacobiano de f , o qual é não nulo. Finalmente, o sistema possui solução não trivial devido a $\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \neq 0$.

A seguir, apresentaremos uma aplicação clássica da teoria das envoltórias.

Sejam $c > h > 0$, constantes e consideremos a seguinte família de círculos $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - h^2 \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - 1 \right] = 0$. Note que f satisfaz às hipóteses do teorema; logo, para determinar sua envoltória resolvamos o sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - h^2 \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - 1 \right] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -2x + 2\lambda \left[1 - \frac{h^2}{c^2} \right] = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos: $\lambda = \frac{c^2 x}{c^2 - h^2}$ e substituindo na primeira obtemos a hipérbole $\frac{x^2}{c^2 - h^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$ que é a envoltória da família de círculos.

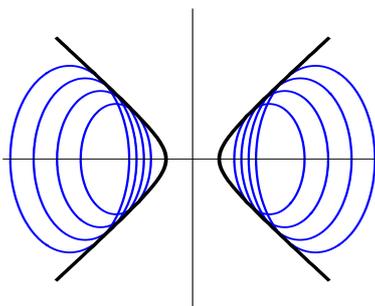


Figura 1: A família de círculos e sua envoltória.

A família de círculos $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - h^2 \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - 1 \right] = 0$ no primeiro e quarto quadrantes, isto é $x > 0$ é modelo para estudar um fenômeno em Acústica, chamado de zona de audibilidade. Por exemplo, considere um avião a jato que voa a uma certa altura fixa de h metros da superfície terrestre e viaja a uma velocidade constante v ; em cada instante de tempo t , o jato se encontra sobre certo ponto do espaço, cuja projeção sobre o plano xy descreve uma linha reta paralela à trajetória do avião a jato. Sem perda de generalidade, podemos considerar este problema localmente plano e a reta pode ser parametrizada por $(vt, 0)$, onde t é o tempo transcorrido, em segundos. É possível provar que a zona de audibilidade, isto é, os pontos onde se ouve ou se ouviu o som do motor do avião a jato é uma região plana que tem como fronteira ou limite, a envoltória da família de círculos centrados em $(vt, 0)$ e de

raios $\sqrt{u^2 t^2 - h^2}$, onde u é a velocidade de propagação do som no ar. Logo, a região de audibilidade do avião é dada por:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, (x - vt)^2 + y^2 \leq u^2 t^2 - h^2\}.$$

Fazendo $\lambda = vt$ e $c = \frac{v}{u} h$, obtemos que a zona de audibilidade do barulho do motor do jato é dada por

$f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - h^2 \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - 1 \right] \leq 0$, se $x > 0$. Portanto, o limite da zona de audibilidade do som do motor do jato é a envoltória, no primeiro e segundo quadrantes, da família, ou seja, a hipérbole: $\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1$.

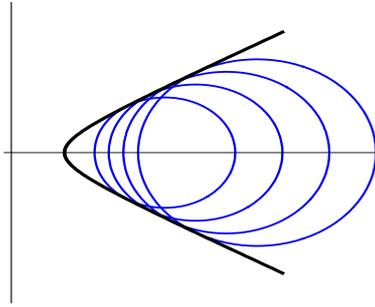


Figura 2: Zona de audibilidade.

O seguinte exemplo mostra que famílias de curvas planas diferentes podem ter a mesma envoltória. De fato, consideremos primeiramente a família de retas: $f(x, y, \lambda) = x \operatorname{sen}(\lambda) + y \operatorname{cos}(\lambda) - d \operatorname{cos}(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda)$, tal que $\operatorname{sen}(\lambda) \operatorname{cos}(\lambda) \neq 0$. Então, determinamos a solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = x \operatorname{sen}(\lambda) + y \operatorname{cos}(\lambda) - d \operatorname{cos}(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = x \operatorname{cos}(\lambda) - y \operatorname{sen}(\lambda) - d \operatorname{cos}(2\lambda) = 0; \end{cases}$$

multiplicando a primeira equação por $\operatorname{sen}(\lambda)$, a segunda por $\operatorname{cos}(\lambda)$ e somando ambas as equações, obtemos $x = d \operatorname{cos}^3(\lambda)$ e $y = d \operatorname{sen}^3(\lambda)$. Da primeira equação, temos que a envoltória da família é a astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$. Agora, consideremos a família de elipses $f(x, y, \lambda) = \lambda^{-2} x^2 + (1 - \lambda)^{-2} y^2 - d^2$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Determinemos a solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = \lambda^{-2} x^2 + (1 - \lambda)^{-2} y^2 - d^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lambda^{-3} x^2 - (1 - \lambda)^{-3} y^2 = 0; \end{cases}$$

da segunda equação temos que $x^2 = \lambda^3 (1 - \lambda)^{-3} y^2$; substituindo na primeira, temos que $y^2 = d^2 (1 - \lambda)^3$ e $x^2 = d^2 \lambda^3$; eliminando λ , obtemos novamente a astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$.

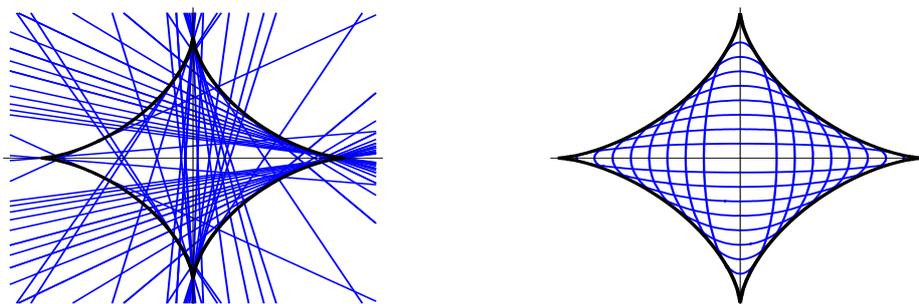


Figura 3: As famílias de retas, de elipses e a envoltória, respectivamente.

2.1 Singularidades

Observemos que a solução do sistema 2.1 que determina a envoltória da família de curvas pode conter, além da envoltória, alguns pontos singulares e algumas curvas da própria família. Seja $f(x, y) = 0$ uma família de curvas planas. Consideremos a submersão $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , tal que a família de curvas sejam as curvas de nível zero de f . O ponto (x_0, y_0) é um ponto singular de f se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Equivalentemente, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

Proposição 2.1 *A envoltória contém o conjunto dos pontos singulares da família de curvas.*

Prova: A envoltória é obtida como solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 = 0. \end{cases}$$

As soluções singulares, isto é, as soluções tais que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, também satisfazem ao sistema (2.1). De fato, derivando $f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$ em relação a λ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0,$$

como $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, temos que $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$.

Por exemplo, em Engenharia Mecânica quando se projeta uma peça mecânica como uma engrenagem, é interessante ao determinar a envoltória de uma família de curvas, achar os pontos singulares da família, pois estes pontos correspondem, em geral, a pontos de atrito, como os dentes da engrenagem. Denotemos por H o determinante da matriz Hessiana de f :

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]^2,$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto (x, y) . Da teoria clássica das curvas planas, temos que se (x_0, y_0) é um ponto singular de f , então:

1. Se $H(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) é um ponto isolado.
2. Se $H(x_0, y_0) = 0$, (x_0, y_0) é um ponto de cúspide.
3. Se $H(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) é um ponto múltiplo ou nodal

Consideremos a família $f(x, y, \lambda) = (x^2 + (y - \lambda)^2)(x - 2) + x = 0$. Determinemos a solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = (x^2 + (y - \lambda)^2)(x - 2) + x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -2(x - 2)(y - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Note que a reta $x = 2$ não pertence à família; na verdade é uma assíntota da família. Se $y = \lambda$ na segunda equação, então na primeira obtemos $x = 0$ e $x = 1$. Determinemos os pontos singulares resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x + 1 + (y - \lambda)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x - \lambda)(y - \lambda) = 0 \end{cases}$$

donde obtemos que $x = 1$ é o lugar geométrico dos pontos singulares. Note que $H(x, \lambda) = -4$; logo, os pontos singulares são nodos. Então, a envoltória da família é a reta vertical $x = 0$.

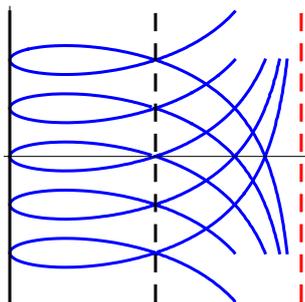


Figura 4: A família de curvas, a envoltória, a reta os pontos singulares e a assíntota.

Consideremos a família $f(x, y, \lambda) = (y - \lambda)^2 - \frac{2(x - \lambda)^3}{3} = 0$. Determinemos a solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = (y - \lambda)^2 - \frac{2(x - \lambda)^3}{3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -2(y - \lambda) + 2(x - \lambda)^2 = 0; \end{cases}$$

obtemos: $\lambda = x$ e $\lambda = x - \frac{2}{3}$. Se $\lambda = x$, então $x = y$; se $\lambda = x - \frac{2}{3}$ então $y = x - \frac{2}{3}$. Determinemos os pontos singulares resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x - \lambda)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - \lambda) = 0 \end{cases}$$

logo, temos que $x = y$ é o lugar geométrico dos pontos singulares. Note que $H(x, x) = 0$; logo, as singularidades são cúspides.

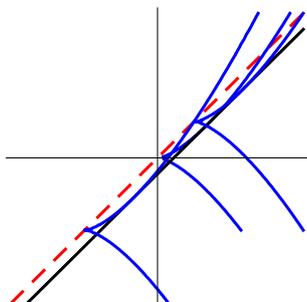


Figura 5: A família de curvas, a envoltória e a reta os pontos singulares.

3 Aplicações

As notações, definições e alguns resultados deste parágrafo podem ser vistos [MV]. Seja Γ uma curva plana; denotemos por $r(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ uma parametrização local de classe C^k de Γ . Para todo $\lambda \in I$ existem os vetores $\vec{t}(\lambda) = (x'(\lambda), y'(\lambda))$ e $\vec{n}(\lambda) = (-y'(\lambda), x'(\lambda))$ ortogonais tais que $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^2 ; logo, um ponto genérico p de $r = r(\lambda)$ se escreve $p = r(\lambda_0) + \alpha \vec{t}(\lambda_0) + \beta \vec{n}(\lambda_0)$, para algum λ_0 . Note que os vetores \vec{t} e \vec{n} devem ser paralelos. A curvatura (com sinal) de Γ no ponto $r(\lambda)$ é denotada e definida por $\vec{t}'(\lambda) = k(\lambda) \vec{n}(\lambda)$. Como $k(\lambda) = \vec{t}'(\lambda) \cdot \vec{n}(\lambda)$, então:

$$k(\lambda) = \frac{r''(\lambda) \cdot \vec{n}(\lambda)}{\|r'(\lambda)\|^3} = \frac{x'(\lambda)y''(\lambda) - x''(\lambda)y'(\lambda)}{\|r'(\lambda)\|^3}.$$

$k = k(\lambda)$ é uma função com a mesma classe de diferenciabilidade de Γ . Note que temos: $\vec{n}'(\lambda) = -k(\lambda) \vec{t}(\lambda)$. Intuitivamente a curvatura é uma medida do afastamento da curva de sua reta tangente. Na verdade, não é difícil provar que Γ tem curvatura zero se, e somente se é uma reta. A curvatura é intrínseca. De fato, suponha que r é parametrizada pelo comprimento de arco; então:

$$(r' \ r'') = (\vec{t} \ \vec{n}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

onde todas as funções são calculadas em t . Logo, $k = \det(r', r'')$. Seja I uma isometria e $\beta = I \circ r$; então $I(r', r'') = (\beta', \beta'')$. Como $\det(I) = 1$ temos que: $k(r) = \det(r' \ r'') = \det(I) \det(\beta', \beta'') = k(\beta)$. Note que $k(\lambda_0) > 0$, implica em que $\vec{t}'(\lambda_0)$ e $\vec{n}(\lambda_0)$ tenham a mesma direção e $k(\lambda_0) < 0$, implica em que $\vec{t}'(\lambda_0)$ e $\vec{n}(\lambda_0)$ tenham sentidos opostos. Γ possui um vértice em λ_0 , se $k = k(\lambda)$ tem um ponto crítico em λ_0 .

Evolutas

Se $k(\lambda_0) \neq 0$, a quantidade $R_{\lambda_0} = \frac{1}{|k(\lambda_0)|}$ e o ponto $c_{\lambda_0} = r(\lambda_0) + \frac{1}{k(\lambda_0)} \vec{n}(\lambda_0)$ são ditos raio de curvatura ou centro focal e centro de curvatura de $r = r(\lambda)$ em λ_0 , respectivamente. A evoluta de uma curva é o lugar geométrico dos centros de curvatura da curva. Segue diretamente do teorema que:

Corolário 3.1 *A envoltória da família das retas normais a uma curva dada é a evoluta da curva.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva $r = r(\lambda)$ está parametrizada por comprimento de arco. Consideremos a função $f(p, \lambda) = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{t}(\lambda)$, onde $\vec{t}(\lambda)$ é vetor tangente unitário e \cdot é o produto interno em \mathbb{R}^2 . Note que 0 é um valor regular de f e $f^{-1}(0)$ é a reta normal a $r = r(\lambda)$ passando por p . Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} f(p, \lambda) = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{t}(\lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = (p - r(\lambda)) \cdot r''(\lambda) - r'(\lambda) \cdot r'(\lambda) = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{n}(\lambda) k(\lambda) - 1 = 0, \end{cases}$$

onde \vec{n} e k são o vetor normal unitário e a curvatura em p , respectivamente. Sabemos que, localmente, um ponto da curva é da forma $p = r(\lambda) + \alpha \vec{t}(\lambda) + \beta \vec{n}(\lambda)$. Segue da primeira equação do sistema que $\alpha = 0$ e da segunda que $\beta = \frac{1}{k(\lambda)}$ se $k(\lambda) \neq 0$. Logo, a curva é parametrizada por:

$$e_r(\lambda) = r(\lambda) + \frac{1}{k(\lambda)} \vec{n}(\lambda)$$

isto é, a evoluta da curva $r = r(\lambda)$

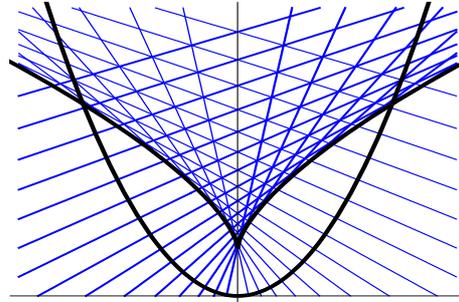


Figura 6: A família das normais a parábola e a envoltória

O vetor tangente à evoluta é $\vec{t}_{e_r} = -k^{-1}(\lambda) k'(\lambda) \vec{n}(\lambda)$, logo a evoluta é regular nos pontos, onde $k(\lambda) \neq 0$ e $k'(\lambda) \neq 0$. Então, as singularidades da evoluta são os vértices de Γ . Determinemos o conjunto dos pontos de bifurcação da evoluta, isto é, o pontos que satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} f(p, \lambda) = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{t}(\lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{n}(\lambda) k(\lambda) - 1 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = (p - r(\lambda)) \cdot (k'(\lambda) \vec{n}(\lambda) - k^2(\lambda) \vec{t}(\lambda)) = 0; \end{cases}$$

temos que os pontos de bifurcação ocorrem quando $k(\lambda) = k'(\lambda) = 0$, isto é, nos vértices da curva. As singularidades são cúspides se $k''(\lambda) \neq 0$.

Curvas Offset

A curva paralela ou offset de uma curva dada é o lugar geométrico dos pontos que (localmente) estão a uma distância fixada da curva; equivalentemente, a curva cujas tangentes são paralelas às tangentes da curva dada, nos pontos com normal comum. As curvas offset ou paralelas também podem ser consideradas como envoltórias de círculos de raios fixos. Segue diretamente do teorema que:

Corolário 3.2 *As curvas offset ou paralelas são as envoltórias de círculos de raios fixos.*

Considere $f(p, \lambda) = \|p - r(\lambda)\|^2 - d^2$. Note que 0 é um valor regular de f e $f^{-1}(0)$ é círculo centrado em $r = r(\lambda)$ e raio fixo $d > 0$. Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} f(p, \lambda) = \|p - r(\lambda)\|^2 - d^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{t}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

isto é, $(p - r(\lambda))$ é ortogonal a $\vec{t}(\lambda)$; logo $(p - r(\lambda))$ é paralelo ao vetor normal, então $(p - r(\lambda)) = \beta \vec{n}(\lambda)$; da primeira equação, temos que $\beta = \pm d$. Logo, a curva é parametrizada por:

$$r_d(\lambda) = r(\lambda) + d \vec{n}(\lambda)$$

isto é, curva paralela ou offset à r a uma distância $\pm d$.

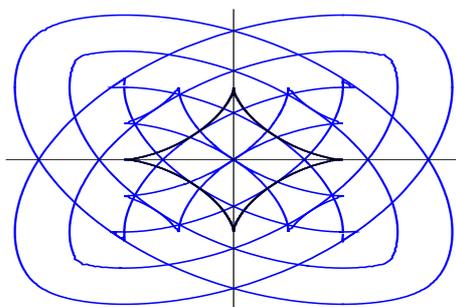


Figura 7: Offset da astróide a diversas distâncias

Em topologia, a família de curvas offset de uma curva é também chamado fibrado normal à curva. O vetor tangente à curva offset é $\vec{t}_{r_d} = (1 - dk(\lambda)) \vec{t}(\lambda)$, se $\vec{t}(\lambda) \neq 0$, para todo t , as singularidades aparecem nos pontos tais que $k(\lambda_0) = \frac{1}{d}$, isto é, quando o raio de curvatura de Γ é d . Determinemos o

conjunto dos pontos de bifurcação da curva offset, isto é, os pontos que satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} f(p, \lambda) = \|p - r(\lambda)\|^2 - d^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{t}(\lambda) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = (p - r(\lambda)) \cdot \vec{n}(\lambda) k(\lambda) - 1 = 0; \end{cases}$$

temos que os pontos de bifurcação da curva offset estão na evoluta de $r = r(\lambda)$

Curvas Offset Generalizadas

Consideremos o lugar geométrico dos pontos que (localmente) estão a uma distância variável da curva. Estas curvas também podem ser consideradas como envoltórias de círculos de raios variáveis.

Consideremos a função $f(p, \lambda) = \|p - r(\lambda)\|^2 - d^2(\lambda) = 0$ tal que $d = d(\lambda) > 0$ é uma função de classe C^k . Em coordenadas, a função pode ser escrita como $f(x, y, \lambda) = (X - x(\lambda))^2 + (y - y(\lambda))^2 - d^2(\lambda) = 0$, onde $r(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$. Então temos o sistema:

$$\begin{cases} (X - x(\lambda))^2 + (y - y(\lambda))^2 - d^2(\lambda) = 0 \\ x'(\lambda)(X - x(\lambda)) + y'(\lambda)(y - y(\lambda)) + d(\lambda)d'(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Primeiramente resolvamos o seguinte sistema algébrico:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - d^2 = 0 \\ a u + b v + d d_1 = 0. \end{cases}$$

tal que, $a, b \neq 0$. Da segunda equação temos $a u = d d_1 - b v$; logo, da primeira equação obtemos $(a^2 + b^2)v^2 + (2 d b d_1)v + d^2(d_1^2 - a^2) = 0$ que tem as raízes $v = \frac{d}{a^2 + b^2} [-b d_1 \pm a \sqrt{a^2 + b^2 - d_1^2}]$ e $u = \frac{d}{a^2 + b^2} [-a d_1 \mp b \sqrt{a^2 + b^2 - d_1^2}]$, as raízes são reais se $d_1^2 \leq a^2 + b^2$. Se $a = x'(\lambda)$, $b = y'(\lambda)$, $d = d(\lambda)$, $d_1 = d'(\lambda)$, $u = X - x(\lambda)$ e $v = Y - y(\lambda)$ e temos que a envoltória da curva é dada por:

$$\begin{aligned} X &= x(\lambda) + d(\lambda) \left[\frac{-x'(\lambda) d'(\lambda) \pm y'(\lambda) \sqrt{x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda) - d'^2(\lambda)}}{x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)} \right] \quad \text{e} \\ Y &= y(\lambda) + d(\lambda) \left[\frac{-y'(\lambda) d'(\lambda) \mp x'(\lambda) \sqrt{x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda) - d'^2(\lambda)}}{x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)} \right]. \end{aligned}$$

Se d é constante, temos uma curva offset. No caso em que a curva está parametrizada por comprimento de arco, isto é, $x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} X &= x(\lambda) + d(\lambda) \left[-x'(\lambda) d'(\lambda) \pm y'(\lambda) \sqrt{1 - d'^2(\lambda)} \right] \quad \text{e} \\ Y &= y(\lambda) + d(\lambda) \left[-y'(\lambda) d'(\lambda) \mp x'(\lambda) \sqrt{1 - d'^2(\lambda)} \right]. \end{aligned}$$

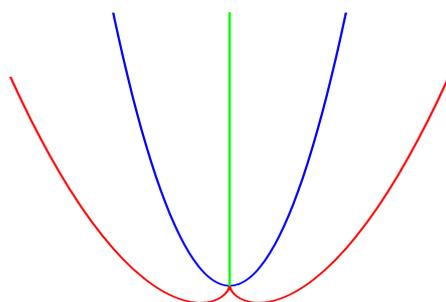


Figura 8: Paralelas a parábola a distância λ , as duas soluções, respectivamente.

Silhueta ou Contorno aparente de uma superfície

Finalmente, daremos uma aplicação na Computação Gráfica. Considere uma superfície em \mathbb{R}^3 de coordenadas (x, y, λ) e a projeção ortogonal usual. A interseção da superfície com cada plano $\lambda = c$ é uma curva de nível, as quais formam uma família de curvas no espaço. Em cada curva existem pontos que tem a propriedade de pertencer ao contorno ou silhueta da superfície, isto é, ao considerar os planos tangentes a esses pontos, sua projeção é uma reta. Ao projetar a curva e os pontos que pertencem ao contorno da superfície, tal reta é tangente à curva pela projeção dos pontos do contorno. A projeção da família de curvas de nível gera uma curva, que possui a propriedade de contactar-se tangencialmente a cada curva projetada pertencente à família, ou seja, a envolvente. Veja o exemplo, considere a família de círculos $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + (y + \lambda)^2 - R^2 = 0$. Não é difícil ver que a envoltória da família é $x + y = \pm R$.

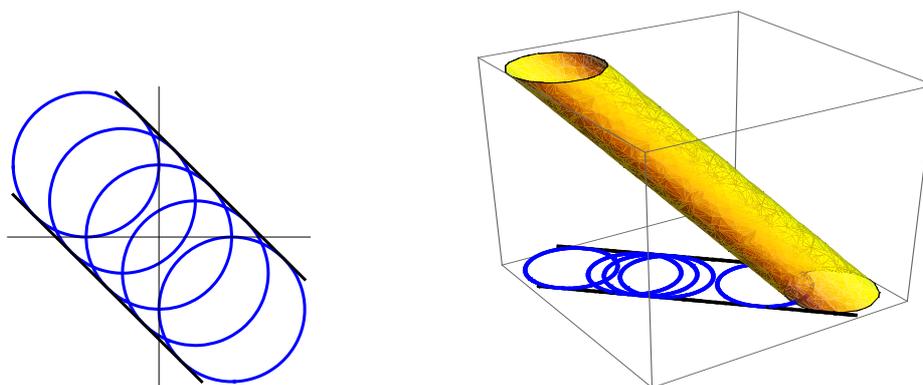


Figura 9: A família de círculos e a envoltória, a silhueta, respectivamente.

De fato, consideremos a família de curvas planas $f(x, y, \lambda) = 0$ de classe C^k . Para cada λ , consideramos a submersão $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k . Se 0 é ponto regular de cada f_λ , então $f_\lambda^{-1}(0)$ é uma família a 1-parâmetro de curvas em \mathbb{R}^2 . Consideremos agora: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, Como 0 é ponto regular

de cada f_λ , então a matriz jacobiana de f tem posto 1 e $f^{-1}(0)$ é uma superfície em \mathbb{R}^3 . Definamos: $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $g(x, y, \lambda) = (f(x, y, \lambda), \frac{\partial f}{\partial \lambda})$. Note que a matriz jacobiana de g é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}$$

Se $\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \neq 0$, temos que 0 é valor regular de g e $g^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão 2, isto é uma curva espacial. Está curva está sobre a superfície $f^{-1}(0)$ com normais perpendiculares ao eixo dos λ . A envoltória desta curva é o contorno aparente ou silhueta da superfície $f^{-1}(0)$, na direção de λ .

Referências

- [BG] Banchoff, T - Gaffney, T - McCrory: *Cusps of Gauss Mappings*, Pitman Advances Pub. Prog.
- [MV] Vilches, M: *Contato e Curvas Planas*, Cadernos do IME..