Uma alternativa ao método de coeficientes indeterminados

Adrilene Oliveira dos Santos Patrícia Reis Martins
Patrícia Nunes da Silva Carlos Frederico Vasconcellos

15 de fevereiro de 2011

Resumo

O método de coeficientes indeterminados é, talvez, um dos mais utilizados procedimentos para se obter uma solução particular de uma equação diferencial linear de ordem m com coeficientes constantes não homogênea. O processo se baseia na escolha de uma solução experimental apropriada contendo constantes desconhecidas. Uma das dificuldades desse método se refere aos sistemas lineares de grande porte que podem ser gerados na determinação das constantes. Além disso, ainda que seja um método específico para determinação de uma solução particular, o conjunto de regras que define a solução experimental exige o conhecimento da solução geral do problema homogêneo associado. Em [2], Gupta propôs um método alternativo para obtenção de uma solução particular que não exige a resolução de um sistema linear nem o conhecimento da solução geral do problema homogêneo associado. Neste artigo, apresentamos e detalhamos o método de Gupta [2] e ilustramos sua aplicação com alguns exemplos.

1 Introdução

Uma equação diferencial linear de ordem m com coeficientes constantes não homogênea é uma equação da forma

$$b_m y^{(m)} + b_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = f(x), \tag{1.1}$$

onde $b_i \in \mathbb{R}$ e $b_m \neq 0$. Devido à linearidade, para determinar uma solução geral da equação (1.1), basta determinarmos a solução geral da equação homogênea associada (i.e, $f(x) \equiv 0$ em (1.1)) e uma solução particular da equação (1.1). Quando o termo não-homogêneo $f(x)$ em (1.1) é uma combinação linear de termos do tipo $e^{\alpha x} p_n(x)$, onde α é uma constante real ou complexa e $p_n(x)$ é um polinômio de grau n em x, o método dos coeficientes a determinar é, talvez, um dos mais utilizados procedimentos para se obter uma solução particular da equação (1.1). O processo se baseia na escolha de uma solução experimental apropriada contendo constantes desconhecidas. Se for possível determinar constantes de modo que a solução proposta satisfaça à equação diferencial, obtemos uma solução particular conforme desejávamos. Uma das dificuldades desse método se refere aos sistemas lineares que devem ser resolvidos para que as constantes desconhecidas sejam determinadas. Sua resolução, muitas vezes nos leva a tediosas contas. Além disso, ainda que seja um método específico para determinação de uma solução particular, o conjunto de regras que definem a solução experimental exige o conhecimento da solução geral, pois é preciso que nenhum termo da solução experimental seja solução do problema homogêneo. O método aqui apresentado não exige a resolução de um sistema linear e nem o conhecimento da solução geral do problema homogêneo associado. Ele utiliza uma mudança de variável, diferenciação e um pouco de manipulação algébrica que reduz a determinação da solução particular da equação (1.1) ao caso "mais simples". Isto é, ao caso em que $f(x)$ em (1.1) é um polinômio!

2 O método de Gupta

Vamos considerar a equação diferencial ordinária (EDO) do tipo

$$b_m y^{(m)} + b_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = \sum_{i=0}^{m} b_i y^{(m-i)} = e^{\alpha x} p_n(x), \tag{2.2}$$

onde $b_i \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $p_n(x)$ é um polinômio de grau n.

Vamos admitir inicialmente que $b_0 \neq 0$. A substituição $y = e^{\alpha x} u(x)$ leva (2.2) a uma EDO linear de coeficientes constantes em que o termo não homogêneo é um polinômio.

Antes de prosseguir, vejamos através de um exemplo como resolver (2.2) quando $\alpha = 0$. Isto é, quando o termo não homogêneo é um polinômio. Considere a EDO

$$y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' - y = x^3. \tag{2.3}$$

Vamos diferenciar (2.3) três vezes para obter uma constante do lado direito (observe que 3 é o grau do polinômio x^3.):

$$y^{(7)} + y^{(6)} + y^{(5)} - y''' - y'' - y' = 3x^2 \tag{2.4}$$

$$y^{(8)} + y^{(7)} + y^{(6)} - y^{(4)} - y''' - y'' = 6x \tag{2.5}$$

$$y^{(9)} + y^{(8)} + y^{(7)} - y^{(5)} - y^{(4)} - y''' = 6. \tag{2.6}$$

Observe que ao admitirmos que $y''' =$ constante, temos

$$y^{3+r} = 0 \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Consequentemente, podemos reescrever (2.3)–(2.6) da seguinte maneira

$$y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' - y = x^3, \tag{2.8}$$

$$-y''' - y'' - y' = 3x^2, \tag{2.9}$$

$$-y''' - y'' = 6x, \tag{2.10}$$

$$-y''' = 6. \tag{2.11}$$

Substituindo $y''' = -6$ em (2.10) temos:

$$y'' = -6x - y''' = -6x + 6$$

Substituindo y'' e y''' em (2.9) temos:

$$y' = -3x^2 - y''' - y'' = -3x^2 + 6 - (-6x + 6) = -3x^2 + 6x$$

Substituindo y' e y'' em (2.8) temos:

$$\begin{aligned} y &= -x^3 + y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = -x^3 - y'' - y' \\ &= -x^3 - (-6x + 6) - (-3x^2 + 6x) = -x^3 + 3x^2 - 6. \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.3) tem uma solução particular $y = -x^3 + 3x^2 - 6$.

Para melhor compreender o funcionamento do método, vamos introduzir a notação de operadores para EDOs. Denotaremos por D o operador $\frac{d}{dx}$ e $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$. Nesta notação, a EDO (2.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} P(D)y &= (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0)y \\ &= b_m D^m y + b_{m-1} D^{m-1} y + \cdots + b_1 D y + b_0 y \\ &= b_m y^{(m)} + b_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = e^{\alpha x} p_n(x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Observe que no caso de (2.3), $P(D) = D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D - 1$.

Mostraremos agora que a substituição $y = e^{\alpha x}u(x)$ leva (2.12) à seguinte EDO linear de coeficientes constantes em que o termo não homogêneo é um polinômio:

$$\sum_{k=0}^{m} b_k (D+\alpha)^k u = P(D+\alpha)u = p_n(x).$$

Para provar a igualdade acima, usaremos a Regra de Leibniz para derivada de ordem m de um produto de funções:

$$D^m(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} D^{m-k} f(x) D^k g(x),$$

onde $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$.

Temos

$$P(D)(e^{\alpha x}u) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i (e^{\alpha x} u).$$

Segue que pela Regra de Leibniz

$$\begin{aligned} D^i(e^{\alpha x}u) &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} D^k u D^{i-k} e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \alpha^{i-k} D^k u \\ &= e^{\alpha x}(D+\alpha)^i u. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(D)y = P(D)(e^{\alpha x}u) = e^{\alpha x} P(D+\alpha)u = e^{\alpha x} p_n(x).$$

Note que se agruparmos as derivadas de u de mesma ordem em $P(D+\alpha)u$, obtemos uma EDO linear não homogênea de coeficientes constantes em que o termo não homogêneo é um polinômio:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i D^i u = P(D+\alpha)u = p_n(x),$$

onde os coeficientes c_i serão explicitados mais adiante.

O exemplo seguinte ilustrará essa mudança dos coeficientes. Seja

$$P(D)y = \sum_{i=0}^{3} b_i D^i y = (D^3 + D^2 - 2D - 1)y = e^x x^2.$$

Observe que $b_0 = -1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 1$ e $b_3 = 1$. Fazendo a substituição $y = e^x u(x)$ temos:

$$P(D)y = e^x P(D+1)u = e^x x^2, \tag{2.13}$$

com

$$\begin{aligned} P(D+1)u &= \sum_{i=0}^{3} b_i (D+1)^i u = ((D+1)^3 + (D+1)^2 - 2(D+1) - 1)u \\ &= (D^3 + 3D^2 + 3D + 1 + D^2 + 2D + 1 - 2D - 2 - 1)u \\ &= (D^3 + 4D^2 + 3D - 1)u. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$P(D+1)u = (D^3 + 4D^2 + 3D - 1)u = \sum_{i=0}^{3} c_i D^i u = x^2,$$

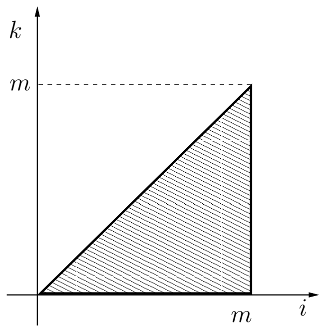
com $c_0 = -1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$ e $c_3 = 1$.

Voltando ao caso geral,

$$P(D+\alpha)u = \sum_{i=0}^{m} b_i (D+\alpha)^i u = \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \alpha^{i-k} D^k u.$$

Queremos alterar a ordem dos somatórios. O gráfico ao lado nos ajuda a entender como relacionar a variação do índice i em função do índice k:

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=k}^{m}$$



Portanto,

$$P(D+\alpha)u = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=k}^{m} b_i \binom{i}{k} \alpha^{i-k} D^k u = \sum_{k=0}^{m} c_k D^k u$$

onde

$$c_k = \sum_{i=k}^{m} b_i \alpha^{i-k} \binom{i}{k}. \tag{2.14}$$

Assim, podemos concluir que fazer a substituição $y = e^{\alpha x}u$ nos leva a encontrar uma solução particular de

$$P(D+\alpha)u = \sum_{i=0}^{m} c_i D^i u = p_n(x), \tag{2.15}$$

onde c_i, $0 \leq i \leq m$, são constantes reais ou complexas, e (em conformidade com a hipótese $b_0 \neq 0$) admitimos que $c_0 \neq 0$.

Vejamos um exemplo. Seja

$$y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' + y = 4(11 - 6x^2)e^{-x}. \tag{2.16}$$

Observe que $P(D) = D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D + 1$, $b_6 = b_5 = b_4 = b_0 = 1$, $b_3 = 0$ e $b_2 = b_1 = -1$. Fazendo a substituição $y = e^{-x}u(x)$, obtemos:

$$P(D)y = P(D)(e^{-x}u) = e^{-x}P(D-1)ue^{-x}\sum_{i=0}^{6} b_i(D-1)^i u = e^{-x}\sum_{i=0}^{6} c_i D^i u,$$

onde os coeficientes c_{m-k} são dados por (2.14):

$$c_k = \sum_{i=k}^{6} b_i(-1)^{i-k}\binom{i}{k}.$$

Consequentemente

$$c_0 = \sum_{i=0}^{6} b_i(-1)^i \binom{i}{0} = \sum_{i=0}^{6}(-1)^i b_i = 2, \qquad c_4 = \sum_{i=4}^{6}(-1)^i\binom{i}{4} = 1 - 5 + 15 = 11,$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^{6} b_i(-1)^{i-1}\binom{i}{1} = -1 + 2 - 4 + 5 - 6 = -4, \qquad c_5 = \sum_{i=5}^{6} b_i(-1)^{i-5}\binom{i}{5} = 1 - 6 = -5,$$

$$c_2 = \sum_{i=2}^{6} b_i(-1)^i\binom{i}{2} = -1 + 6 - 10 + 15 = 10, \qquad c_6 = \sum_{i=6}^{6} b_i(-1)^{i-6}\binom{i}{6} = 1.$$

$$c_3 = \sum_{i=4}^{6}(-1)^{i-1}\binom{i}{3} = -4 + 10 - 20 = -14,$$

Na nova variável $u(x)$, (2.16) pode ser reescrita a seguinte EDO linear de coeficientes constantes cujo termo não homogêneo é um polinômio:

$$u^{(6)} - 5u^{(5)} + 11u^{(4)} - 14u''' + 10u'' - 4u' + 2u = 4(11 - 6x^2). \tag{2.17}$$

Vamos agora generalizar o procedimento adotado na resolução de (2.3) para o caso geral (2.15). Ao derivar (2.15) n vezes, o lado direito se torna uma constante ($D^n p_n(x)$):

$$c_0 D^n u + \sum_{i=1}^{m} c_i D^{n+i} u = D^n \left(\sum_{i=0}^{m} c_i D^i u \right) = D^n p_n(x). \tag{2.18}$$

Assim, se tomarmos $u(x)$ tal que:

$$D^n u = \frac{D^n p_n(x)}{c_0} = \text{ constante}, \tag{2.19}$$

temos

$$D^{n+r} u = 0 \qquad \text{para todo } r \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

e, consequentemente, tal u satisfaz (2.18).

Resta apenas combinar recursivamente (2.18) e (2.20) de modo a obter uma solução de (2.15). Para cada k, $k = 1, \ldots, n$, ao derivarmos (2.15) $n-k$ vezes, vamos obter uma expressão da derivada de ordem $n-k$ de u. Ao final desse processo, obtemos uma solução particular de (2.15). Consequentemente, $y = e^{\alpha x} u$ será uma solução particular de (2.12).

Este procedimento é baseado na descrição dada por Love [1] e na generalização obtida por Gupta [2].

Antes de prosseguir, vamos ilustrar esse procedimento para obter uma solução de (2.16) a partir de (2.17). Derivamos (2.17) duas vezes para obter uma constante do lado direito:

$$(D^7 - 5D^6 + 11D^5 - 14D^4 + 10D^3 - 4D^2 + 2D)u = -48x \tag{2.21}$$

$$(D^8 - 5D^7 + 11D^6 - 14D^5 + 10D^4 - 4D^3 + 2D^2)u = -48 \tag{2.22}$$

Como

$$D^2 u = \frac{-48}{2} = -24 \quad \text{ temos } D^{2+r} = 0 \text{ para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Logo, substituindo D^2u em (2.21) temos:

$$2Du = -48x + 4D^2 u = -48x - 96$$

Substituindo Du e D^2u em (2.17) temos:

$$\begin{aligned} 2u &= 4(11 - 6x^2) - u^{(6)} + 5u^{(5)} - 11u^{(4)} + 14u''' - 10u'' + 4u' \\ &= 4(11 - 6x^2) - 10u'' + 4u' = 4(-6x^2 - 24x + 23). \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.16) tem uma solução particular $y(x) = 2e^{-x}(-6x^2 - 24x + 23)$.

3 O algoritmo recursivo

Em (2.15), vamos supor, sem perda de generalidade que $m \geq n$[1]. Gupta [2] observou que o problema de encontrar uma solução particular de (2.12) pode ser tratado em quatro etapas:

1. Mudança de variável Ele observou a equação diferencial linear não homogênea (2.12) pode ser reduzida à EDO (2.15) através da mudança de variável $y(x) = e^{\alpha x} u(x)$.

2. Derivada de ordem n de (2.15) Após a mudança de variável, seu próximo passo foi procurar uma solução de (2.15) que satisfizesse (2.19):

$$D^n u = \frac{D^n p_n(x)}{c_0} = \text{ constante.}$$

Em consequência de (2.19), temos (2.20):

$$D^{n+r} u = 0 \qquad \text{para todo } r \in \mathbb{N}$$

Podemos portanto reescrever (2.15) da seguinte forma:

$$P(D+\alpha)u = \sum_{i=0}^{m} c_i D^i u = \sum_{i=0}^{n} c_i D^i u + \sum_{i=n+1}^{m} c_i D^i u \stackrel{(2.20)}{=} \sum_{i=0}^{n} c_i D^i u = p_n(x).$$

Isto é, devemos resolver

$$\sum_{i=0}^{n} c_i D^i u = p_n(x) \tag{3.23}$$

Essa equação foi obtida a partir de (2.15), ignorando todos os termos da forma $D^{n+r}u$, $r = 1, 2, \ldots, m-n$.

3. Solução particular u de (2.15) Por conveniência, ainda admitimos que $c_0 \neq 0$ em (3.23). O processo de derivar n vezes sucessivamente e as substituições recursivas pode ser expresso através da relação:

$$\begin{cases} c_0 D^n u(x) = D^n p_n(x) (= \text{constante}), & k = 0 \\ c_k D^{n-k} u(x) = D^{n-k} p_n(x) - \sum_{i=1}^{k} c_i D^{n-k+i} u(x), & k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.24}$$

Essencialmente, vemos que para determinar $D^{n-k}u$, derivamos a equação (3.23) $(n-k)$ vezes.

[1] Caso isto não aconteça, vamos acrescentar a (2.15) coeficientes $c_k = 0$ para $m + 1 \leq k \leq n = \tilde{m}$.

4. Solução particular y de (2.12) Com a solução particular u de (2.15) obtida na etapa anterior, obtenha uma solução particular y de (2.12) da forma:

$$y(x) = e^{\alpha x} u(x).$$

A equação (3.24) foi obtida através do seguinte processo:

Derivando a equação (3.23) $(n-0) = n$ vezes temos:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i D^{n+i} u = D^n p_n(x).$$

Por (2.20), podemos concluir que

$$c_0 D^n u = D^n p_n(x).$$

Derivando a equação (3.23), $(n-1)$ vezes temos:

$$c_0 D^{n-1} u + c_1 D^n u + \sum_{i=2}^{n} c_i D^{n-1+i} u = D^{n-1} p_n(x)$$

Observe que no somatório as ordens do operador derivada D satisfazem $(n+1) \leq n-1+i \leq n+(n-1)$ e por (2.20), temos

$$c_0 D^{n-1} u = D^{n-1} p_n(x) - c_1 D^n u.$$

Derivando a equação (3.23) $(n-2)$ vezes temos:

$$c_0 D^{n-2} u + c_1 D^{n-1} u + c_2 D^n u + \sum_{i=3}^{n} c_i D^{n-2+i} u = D^{n-2} p_n(x).$$

Novamente, por (2.20), podemos concluir que

$$c_0 D^{n-2} u = D^{n-2} p_n(x) - (c_1 D^{n-1} u + c_2 D^n u) = D^{n-2} p_n(x) - \sum_{i=1}^{2} c_i D^{n-2+i} u.$$

Derivando a equação (3.23) $(n-3)$ vezes temos:

$$c_0 D^{n-3} u + c_1 D^{n-2} u + c_2 D^{n-1} u + c_3 D^n u + \sum_{i=4}^{n} c_i D^{n-3+i} u = D^{n-3} p_n(x).$$

Por (2.20), podemos concluir que

$$c_0 D^{n-3}u = D^{n-3}p_n(x) - (c_1 D^{n-2}u + c_2 D^{n-1}u + c_3 D^n u) = D^{n-3}p_n(x) - \sum_{i=1}^{3} c_i D^{n-3+i}u.$$

Generalizando esse processo:

Derivando a equação (3.23) n vezes, obtemos

$$c_0 D^n u = D^n p_n(x)(= \text{constante}).$$

Derivando a equação (3.23) $(n-k)$ vezes, para $k = 1, 2, \ldots, n$ temos:

$$c_0 D^{n-k}u = D^{n-k}p_n(x) - \sum_{i=1}^{k} c_i D^{n-k+i}u - \sum_{i=k+1}^{n} c_i D^{n-k+i}u$$

Observe que no segundo somatório, as ordens do operador derivada D satisfazem $(n+1) \leq n-k+i \leq n+(n-k)$. Por (2.20), podemos concluir que

$$c_0 D^{n-k}u = D^{n-k}p_n(x) - \sum_{i=1}^{k} c_i D^{n-k+i}u, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Quando $k = n$ temos uma solução particular de (3.23).

Observação. Se $c_0 = 0$, e k é o menor índice para o qual $c_k \neq 0$, basta fazermos inicialmente a mudança de variável $v(x) = u^{(k)}(x)$ e aplicar o procedimento descrito acima. Vamos obter uma solução particular $v(x)$ e uma solução particular $u(x)$ pode ser obtida com k integrações. De fato, esse esquema recursivo nos dá uma solução particular em termos da derivada de ordem mais baixa presente em (3.23).

Para ilustrar o uso do algoritmo (3.24) obtemos soluções específicas de algumas equações diferenciais.

Exemplos

Exemplo 1. Vamos agora aplicar o procedimento descrito anteriormente para encontrar uma solução particular y de

$$(D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D - 1)y = 4(11 - 6x^2)e^{-x}. \tag{3.25}$$

A mudança de variável $y = e^{-x}u$ nos leva a

$$u^{(6)} - 5u^{(5)} + 11u^{(4)} - 14u''' + 10u'' - 4u' = 4(11 - 6x^2). \tag{3.26}$$

Como 1 é a menor ordem do operador derivada D presente na equação, vamos considerar $v = Du$. Podemos reescrever (3.26) na forma

$$v^{(5)} - 5v^{(4)} + 11v^{(3)} - 14v'' + 10v' - 4v = 4(11 - 6x^2). \tag{3.27}$$

Agora como o termo não homogêneo em (3.27) é um polinômio de grau dois, vamos derivá-la duas vezes e admitir que $D^2(v)$ é constante. Consequentemente, $D^{2+r}v = 0$ para $r = 1, 2, \ldots$. Neste sentido, observe que podemos reescrever (3.27) na forma

$$(-7D^2 + 5D - 2)v = 2(11 - 6x^2). \tag{3.28}$$

Na equação (3.28), temos $n = 2$, $c_2 = -7$, $c_1 = 5$, $c_0 = -2$, $p_2(x) = 2(11 - 6x^2)$.
O sistema (3.24) torna-se

$$\begin{cases} -2D^2v = -24, & k = 0, \\ -2D^{2-k}v = D^{2-k}p_2(x) - \sum_{i=1}^{k} c_i D^{2-k+i}v, & k = 1, 2. \end{cases}$$

Isso produz

- Se $k = 0$, $D^2v = 12$.
- Se $k = 1$, $-2Dv = Dp_2(x) - c_1D^2v = -24x - 60$.
- Se $k = 2$, $-2v = p_2(x) - c_2D^2v - c_1Dv = -12x^2 - 60x - 44$.

Logo, lembrando que $v = Du$, temos

$$Du = 6x^2 + 30x + 22.$$

Integrando esta última equação em relação a x, obtemos

$$u = \int (6x^2 + 30x + 22)dx = 22x + 15x^2 + 2x^3.$$

Assim, a equação (3.25) tem uma solução particular $y = e^{-x}(22x + 15x^2 + 2x^3)$.

Consideremos agora as EDOs

$$(D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D - 1)y = 24x^2 \operatorname{sen} x, \tag{3.29}$$

$$(D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D - 1)y = 6e^{\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right). \tag{3.30}$$

Como poderíamos usar procedimento de Gupta para resolvê-las?

Antes de resolvermos as equações (3.29) e (3.30), observe que se $\alpha = c + id$ e y for uma função complexa ($y = a(x) + ib(x)$) que é solução da equação (2.13) teremos:

$$\begin{aligned} P(D)(a(x) + ib(x)) &= \sum_{j=0}^{m} b_j D^j (a(x) + ib(x)) = \sum_{j=0}^{m} b_j D^j a(x) + i \sum_{j=0}^{m} b_j D^j b(x) \\ &= P(D)a(x) + iP(D)b(x) = e^{\alpha x} p_n(x). \end{aligned}$$

Pela fórmula de Euler:

$$e^{\alpha x} p_n(x) = e^{(c+di)x} p_n(x) = e^{cx} p_n(x) \cos dx + i e^{cx} p_n(x) \operatorname{sen} dx.$$

Assim, $P(D)a(x) = e^{cx} p_n(x) \cos(dx)$ e $P(D)b(x) = e^{cx} p_n(x) \operatorname{sen}(dx)$.

Portanto, a parte real e a parte imaginária de uma solução particular de

$$P(D)(a(x) + ib(x)) = e^{(c+id)x} p_n(x)$$

são respectivamente soluções particulares de

$$P(D)(a(x)) = e^{dx} p_n(x) \cos(cx) \quad \text{e de} \quad P(D)(b(x)) = e^{cx} p_n(x) \operatorname{sen}(dx).$$

Nos casos (3.29) e (3.30) temos respectivamente uma exponencial multiplicada por um seno e uma exponencial mutiplicada por um cosseno. Mesmo não sendo da forma (2.13), também podemos usar esse método para resolvê-las. Só que será preciso transformar $24x^2 \operatorname{sen} x$ e $6e^{-x}/2 \cos(x\sqrt{3}/2)$ em um termo da forma $e^{\alpha x} p_n(x) = e^{(c+id)x} p_n(x)$.

Exemplo 2. Para equação (3.29), basta tomar $\alpha = i$ pois $24x^2 \operatorname{sen} x$ é a parte imaginária de $24x^2 e^{ix}$. Então, primeiro resolveremos a seguinte EDO

$$P(D)y = (D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D - 1)y = 24x^2 e^{ix} \tag{3.31}$$

E depois considerar apenas a parte imaginária da solução particular que for obtida. Agora, fazendo a substituição $y = e^{ix}u(x)$ temos:

$$(D^6 + (1+6i)D^5 + (-14+5i)D^4 + (-16i-10)D^3 + (8-10i)D^2 + 4D)u = 24x^2 \quad (3.32)$$

Diferenciamos esta última equação duas vezes para obter uma constante do lado direito. Observe que dois é o grau do polinômio $24x^2$. Obteremos:

$$(D^7 + (1+6i)D^6 + (-14+5i)D^5 + (-10-16i)D^4 + (8-10i)D^3 + 4D^2)u = 48x \quad (3.33)$$

$$(D^8 + (1+6i)D^7 + (-14+5i)D^6 + (-10-16i)D^5 + (8-10i)D^4 + 4D^3)u = 48 \quad (3.34)$$

Admitimos que

$$D^3u = \frac{48}{4} = 12 \quad \text{e temos } D^{3+r} = 0 \text{ para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Substituindo D^3u em (3.33) temos:

$$D^2u = 12x + (-24+30i)$$

Substituindo D^2u e D^3u em (3.32) temos:

$$4Du = 24x^2 + (16i+10)D^3u + (10i-8)D^2u = 6x^2 + (30i-24)x + (3-72i).$$

Integrando esta última equação em relação a x, obtemos

$$u(x) = \int (6x^2 + (30i-24)x + (3-72i))dx = 2x^3 + (15i-12)x^2 + (3-72i)x$$

Assim, equação (3.31) tem uma solução particular

$$y(x) = e^{ix}(2x^3 + (15i-12)x^2 + (3-72i)x).$$

A parte imaginária desta solução é uma solução particular de (3.29).

Observe que se $f = a_1 + ib_1$ e $g = a_2 + ib_2$, então $fg = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$. Como

$$y(x) = (\cos x + i \operatorname{sen} x)(2x^3 - 12x^2 + 3x + i(15x^2 - 72x)),$$

$$w(x) = (15x^2 - 72x)\cos x + (2x^3 - 12x^2 + 3x)\operatorname{sen} x$$

é uma solução particular de (3.29).

Vamos resolver (3.30) aplicando diretamente as ideias do método de Gupta sem usar as fórmulas (2.15) e (3.24).

Exemplo 3. Para equação (3.30), como $e^{\frac{-x}{2}}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ é a parte real de $e^{\frac{(i\sqrt{3}-1)x}{2}}$, basta tomar $\alpha = \frac{(i\sqrt{3}-1)x}{2}$. Então, primeiro iremos resolveremos a seguinte EDO

$$P(D)y = (D^6 + D^5 + D^4 - D^2 - D - 1)y = 6e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} \tag{3.35}$$

E depois considerar apenas a parte real dessa solução particular.

Observe que

$$\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Consequentemente,

$$\alpha^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\alpha},$$
$$\alpha^3 = e^{\frac{6\pi}{3}i} = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi = 1,$$
$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha, \qquad \alpha^5 = \alpha^3\alpha^2 = \overline{\alpha}, \qquad \alpha^6 = \alpha^3\alpha^3 = 1.$$

Assim, fazendo a substituição $y = e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x}u(x) = e^{\alpha x}u(x)$ temos:

$$\begin{aligned}
y' &= e^{\alpha x}(u' + \alpha u)\\
y'' &= e^{\alpha x}(u'' + 2\alpha u' + \overline{\alpha}u)\\
y''' &= e^{\alpha x}(u''' + 3\alpha u'' + 3\overline{\alpha}u' + u)\\
y^{(4)} &= e^{\alpha x}(u^{(4)} + 4\alpha u''' + 6\overline{\alpha}u'' + 4u' + \alpha u)\\
y^{(5)} &= e^{\alpha x}(u^{(5)} + 5\alpha u^{(4)} + 10\overline{\alpha}u''' + 10u'' + 5\alpha u' + \overline{\alpha}u)\\
y^{(6)} &= e^{\alpha x}(u^{(6)} + 6\alpha u^{(5)} + 15\overline{\alpha}u^{(4)} + 20u''' + 15\alpha u'' + 6\overline{\alpha}u' + u)
\end{aligned}$$

Substituindo $y^{(6)}$, $y^{(5)}$, $y^{(4)}$, y'', y' e y em (3.35) temos:

$$\begin{aligned}
\Big(D^6 &+ (-2+3i\sqrt{3})D^5 + (-9-9i\sqrt{3})D^4 + (13-3i\sqrt{3})D^3\\
&+ \left(-\frac{3}{2} + \frac{9i\sqrt{3}}{2}\right)D^2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)D\Big)u = 6
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Como 6 é constante não precisaremos derivar a equação (3.36).

$$Du = \frac{6}{\frac{-3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\overline{\alpha}} = 2\alpha = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{temos } D^{1+r} = 0 \text{ para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Ao integrar em relação a x, obtemos

$$u = \int (-1 + i\sqrt{3})dx = (-1 + i\sqrt{3})x$$

Assim, a equação (3.35) tem uma solução particular

$$y(x) = e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x}(-1 + i\sqrt{3})x = \left(\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)(-1 + i\sqrt{3})x,$$

cuja parte real é

$$w(x) = xe^{\frac{-x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

que é uma solução particular de (3.30).

4 Conclusão

Aqui, consideramos as equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes em que o termo não homogêneo é uma combinação linear de termos do tipo $e^{\alpha x}p_n(x)$, onde α é uma constante (real ou complexa) e p_n é um polinômio de grau n em x.

O método dos coeficientes a determinar é comumente usado para encontrar uma solução particular da equação diferencial desse tipo. Tanto do ponto de vista do ensino como da aprendizagem, ele é geralmente muito exigente e trabalhoso. Seria, portanto, pedagogicamente interessante ter uma alternativa mais simples para este método. Neste trabalho nós apresentamos um método que exige apenas a diferenciação e algumas adições. Vários exemplos foram incluídos para ilustrar sua aplicação.

Foi observado que o problema se reduz a encontrar uma solução particular de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, com termo não homogêneo polinomial de grau n. O procedimento a ser adotado nesta situação pode ser expresso como um algoritmo recursivo (v. Gupta [2]). Ilustramos sua aplicação e com a obtenção de soluções particulares de diversas equações diferenciais. Assim, o presente trabalho contém uma alternativa mais simples para o método dos coeficientes a determinar.

Referências

[1] Love, E. R., 1989, Particular solutions of constant coefficients linear differential equations *IMA Bulletin*, **25**, 165-166.

[2] Gupta, R. C., 1996, Linear differential equation with constant coefficients: a recursive alternative to the method of undetermined coefficients, *Int. J Math. Edu. Sci. Technol.*, **27**, 757-760.