Piskunov
×
Ávila*

Bruno Guimarães da Silva† patrícia nunes da silva‡

Resumo

Ao longo de nossa formação no ensino superior, somos apresentados a diversos tipos de integrais, dentre elas as que contêm equações do 2° grau incompletas. Aprendemos a resolvê-las por diversas maneiras, como por simples "substituições", por "substituições trigonométricas", "frações parciais", etc. Entretanto, dificilmente estudamos casos de integrais que apresentem o seguinte radical: $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Este artigo tem como objetivo apresentar, analisar e comparar dois métodos distintos para a resolução de integrais com estes específicos radicais.

Abstract

During our study in college, we are introduced to many types of integral, between then the ones with an incomplete 2° degree equation, where we learn to solve it by many ways, from the simple "substitution", passing by "trigonometric substitution", to "partial fraction", and many others. However, we hardly study the ones with the radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

This paper has the objective to present and compare two distinct methods to solve this especific kind of radical in integrals.

1 Introdução

Este artigo apresenta dois métodos para a resolução de integrais que apresentem o radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Um deles é a "Substituição de Euler", apresentada por **N. Piskunov** no livro *Cálculo Diferencial e Integral* [1]. Este método consiste em três tipos de substituição dependendo dos coeficientes do radical.

O outro método é o apresentado por **G. Ávila** no livro *Cálculo 1. Funções de uma variável* [2].

Inicialmente, analisamos a "Substituição de Euler". Relizamos um estudo algébrico e aplicamos o método a alguns exemplos selecionados. Em seguida, passamos à análise do método apresentado por Ávila.

*Palavras chave: Radical, 2° grau, integral.

†Aluno de Matemática-Licenciatura da UERJ, brunobrunoes@ibest.com.br

‡Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, nunes@ime.uerj.br

Não obtivemos uma comparação exaustiva e deixamos para o leitor decidir qual método acha mais conveniente para cada tipo de integral, sabendo que ambos solucionam o problema. Porém, em certos casos, um dos método pode tornar a resolução mais simples.

2 Análise algébrica.

O método das Substituições de Euler consiste em uma mudança de variável com base no radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (neste artigo utilizamos t para a nova variável). Existem três tipos de substituições:

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$; para $a > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$; para $c > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$; quando o polinômio apresentar duas raízes reais (usamos α e β para representá-las).

De início, deduzimos algebricamente cada uma das mudanças de variável apresentadas acima para integrais da forma:

$$\int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx. \tag{1}$$

onde k é uma constante qualquer. Em seguida, fizemos uma comparação dos três métodos acima na resolução destas integrais.

2.1 Primeira substituição: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$; $a > 0$

Vamos nos ater à escolha do sinal negativo na substituição. Isto é, vamos considerar

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t, \quad a > 0 \tag{2}$$

Elevando os dois lados da igualdade (2) ao quadrado:

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}xt + ax^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$$

Logo:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}\left(\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}\right) + t = \frac{-\sqrt{a}t^2+\sqrt{a}c+bt+2\sqrt{a}t^2}{b+2\sqrt{a}t}$$

e, na nova variável, o radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$ é dado por

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{b+2\sqrt{a}t} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2\left(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}\right)}{\left(b+2\sqrt{a}t\right)^2}dt$$

Na integral (1), com a nova variável, teremos:

$$\begin{aligned} k\int \frac{2\left(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}\right)}{\left(b+2\sqrt{a}t\right)^2}\frac{(b+2\sqrt{a}t)}{(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}dt &= k\int \frac{2}{b+2\sqrt{a}t}dt \\ &= \frac{k\sqrt{a}}{a}\ln\left|b+2\sqrt{a}t\right|+Q \end{aligned}$$

Substituindo $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$ no resultado obtido (partindo de (2)):

$$\frac{k\sqrt{a}}{a}\ln\left|b+2\sqrt{a}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x\right)\right|+Q$$

Esta resolução nos leva a concluir que a 1ª substituição é um bom método para resolução deste determinado tipo de integral, haja vista que resulta em uma integral cuja função primitiva é uma primitiva imediata, no caso, uma função logarítmica.

2.2 Segunda substituição: $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$; $c>0$

Para efeito de comparação, analisaremos a 2ª substituição de Euler utilizando a mesma integral anterior (1):

$$\int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

onde k é uma constante qualquer.

Novamente, vamos nos ater à escolha do sinal negativo na substituição. Isto é, vamos considerar

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c},\quad c>0 \tag{3}$$

Elevando os dois lados da igualdade (3) ao quadrado:

$$ax^2+bx+c=x^2t^2-2xt\sqrt{c}+c \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}$$

Logo:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right)t-\sqrt{c}=\frac{2t^2\sqrt{c}+bt-\sqrt{c}t^2+a\sqrt{c}}{(t^2-a)}$$

e, na nova variável, o radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$ é dado por

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c}}{(t^2-a)} \quad \text{e} \quad dx=\frac{(-2)\left(t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c}\right)}{\left(t^2-a\right)^2}dt$$

Voltando à integral (1), com a nova variável, teremos:

$$k\int \frac{(-2)\left(t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c}\right)}{\left(t^2-a\right)^2}\frac{\left(t^2-a\right)}{(t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c})}dt=-2k\int\frac{dt}{t^2-a}$$

O que recai em uma integral que pode ser resolvida de forma bem simples, utilizando o seguinte artifício:

1. para $a > 0$, "frações parciais".

$$\frac{1}{t^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}\,(t - \sqrt{a})} - \frac{1}{2\sqrt{a}\,(t + \sqrt{a})}$$

2. para $a < 0$, a integral é do tipo arctg, uma vez que

$$\frac{1}{t^2 - a} = \left(\frac{1}{-a}\right) \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{-a}}\right)^2 + 1}$$

2.3 Terceira substituição: $ax^2 + bx + c$ possui raízes reais

Se o polinômio $ax^2 + bx + c$ possui raízes reais α e β, podemos escrevê-lo na forma $a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$. Segue então:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\,t \quad \vee \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \beta)\,t$$

Ainda para efeito de comparação, analisaremos a resolução da integral (1). Desta vez, resolvendo-a pela 3ª substituição de Euler.

Vamos nos ater à escolha da raiz α para a substituição. Isto é, vamos considerar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\,t \tag{4}$$

Por (4):

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\,t \quad \Rightarrow \quad ax - a\beta = xt^2 - \alpha t^2$$
$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$$

Logo:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a} - \alpha\right) t = \frac{(\alpha - \beta)\,(at)}{t^2 - a} \quad \text{e} \quad dx = \frac{(-2at)\,(\alpha - \beta)}{(t^2 - a)^2} dt$$

Substituindo a nova variável na **integral (1)**:

$$k \int \frac{-2at\,(\alpha - \beta)}{(t^2 - a)^2} \frac{(t^2 - a)}{(\alpha - \beta)\,at} dt = -2k \int \frac{dt}{t^2 - a}$$

A integral acima também podendo ser resolvida pelo mesmo artifício apresentado anteriormente. Agora seguiremos com o estudo do método apresentado por G. Ávila [2].

3 Análise algébrica - Ávila

O método proposto por G. Ávila [2] consiste em uma mudança de variável, que na maioria dos casos resulta na necessidade de uma outra substituição, a trigonométrica. Para os leitores que preferem trabalhar com a trigonometria é uma boa opção a seguir.

Assim como fizemos com as Substituições de Euler, vamos seguir apresentando o método indicado por G. Ávila [2] e em seguida, aplicá-lo na integral (1).

Trabalhando com o polinômio do radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \tag{5}$$

Fazendo a substituição (5):

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c = \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-b^2a+4a^2c}{4a^2}\right) \quad = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

Em outras palavras, devemos utilizar o recurso usualmente chamado de "Completar o quadrado". Chamando:

$$\frac{y}{\sqrt{|a|}} = x+\frac{b}{2a} \Longrightarrow y^2 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{6}$$

$$\frac{y}{\sqrt{|a|}} = x+\frac{b}{2a} \Longrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{|a|}}-\frac{b}{2a} \tag{7}$$

E fazendo: $K=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. Teremos: $\sqrt{K\pm y^2}$; onde o sinal de y depende do sinal de a.

Logo, fazendo a mudança de variável (6) na integral (1), obtemos

$$\int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{k}{\sqrt{K\pm y^2}}\,\frac{dy}{\sqrt{|a|}} = \frac{k}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dy}{\sqrt{K\pm y^2}}$$

Para ambos os casos ($+y$ ou $-y$), nós teremos uma substituição trigonométrica correspondente.

4 Conclusão

Em resumo, as mudanças de variável propostas pela "Substituição de Euler" resultaram em:

1° caso $\Longrightarrow$ $\dfrac{k\sqrt{a}}{a}\ln\left|b+2\sqrt{a}t\right|+Q.$

2° caso $\Longrightarrow$ $-2k\displaystyle\int\frac{dt}{t^2-a}$ $\longrightarrow$ Substituição ou Frações Parciais.

3° caso $\Longrightarrow$ $-2k\displaystyle\int\frac{dt}{t^2-a}$ $\longrightarrow$ Substituição ou Frações Parciais.

Pela análise algébrica da "Substituição de Euler" para o determinado tipo de integral (1) em estudo, podemos perceber que a 1ª substituição seria a melhor escolha, seguida da 3ª e por último 2ª.

A 2ª e a 3ª substituição finalizam em integrais semelhantes, porém, no 3° caso a simplificação é melhor.

Por outro lado, a substituição proposta por G. Ávila [2] sempre exige a resolução de uma integral da forma

$$\frac{k}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dy}{\sqrt{K \pm y^2}}$$

Para ambos os casos ($+y$ ou $-y$), nós teremos que utilizar a substituição trigonométrica correspondente. Comparativamente, a "Substituição de Euler" conduz a uma resolução mais simples.

Lembrando que estas conclusões baseiam-se na integral $\displaystyle\int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$; onde k é uma constante qualquer.

A fim de ilustrar a aplicação dos dois métodos analisados, apresentaremos a seguir a resolução de algumas integrais.

5 Análise numérica - Piskunov e Ávila.

Em cada uma das subseções subsequentes, a integral que a intitula será resolvidas pelos dois métodos analisados. Ao final de cada subseção, comparamos as resoluções apresentadas.

5.1 $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

5.1.1 Primeira substituição de Euler

Argumentando como na Subseção 2.1, para a primeira substituição: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$; para $a > 0$, temos:

$$\sqrt{x^2+3x+2} = -x\sqrt{1} + t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2-2}{3+2t}$$

Logo:

$$\sqrt{x^2+3x+2} = \frac{t^2+3t+2}{3+2t} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2\left(t^2+3t+2\right)}{\left(3+2t\right)^2}dt$$

Retornando à integral:

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx = -\int \frac{(3t+4)\left(2t^2+6t+4\right)}{t\left(3+2t\right)^3}dt$$

e podemos resolver a última integral por "frações parciais".

5.1.2 Segunda substituição de Euler

Argumentando como na Subseção 2.2, para a segunda substituição: $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$; para $c>0$, temos:

$$\sqrt{x^2+3x+2}=xt-\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3+2t\sqrt{2}}{(t^2-1)}$$

Logo:

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{t^2\sqrt{2}+3t+\sqrt{2}}{t^2-1} \quad \text{e} \quad dx=\frac{-2\left(t^2\sqrt{2}+3t+\sqrt{2}\right)}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

Voltando à integral:

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\left(\frac{-t^2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}-3\right)t+\left(3-\sqrt{2}\right)}{t^2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}+3\right)t+\left(3+2\sqrt{2}\right)}\right)\left(\frac{-2\left(t^2\sqrt{2}+3t+\sqrt{2}\right)}{\left(t^2-1\right)^2}\right)dt$$

e também podemos resolver por "frações parciais".

5.1.3 Terceira substituição de Euler

Argumentando como na Subseção 2.3, para a terceira substituição: $ax^2+bx+c{=}a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$, temos: $x^2+3x+2=(x+2)\,(x+1)$. Façamos a seguinte substituição:

$$\sqrt{x^2+3x+2}=(x+1)\,t \quad\Rightarrow\quad x=\frac{t^2-2}{1-t^2}$$

Logo:

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{-t}{1-t^2} \quad \text{e} \quad dx=\frac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$$

De volta à integral:

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{\left(t^2+t-2\right)}{\left(t^2-t-2\right)}\,\frac{(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}dt$$

O que também podemos resolver por "frações parciais".

5.1.4 Substituição proposta em G. Ávila [2]

Argumentando como na Seção 3, para a substituição proposta em G. Ávila [2], temos:

$$x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Tomando $\dfrac{y}{+\sqrt{1}} = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)$, teremos: $x = y - \dfrac{3}{2}$.
Daí, podemos concluir que: $dy = dx$. Retornando à integral com as novas substituições:

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{2y - 3 - 2\sqrt{y^2 - \frac{1}{4}}}{2y - 3 + 2\sqrt{y^2 - \frac{1}{4}}}dy$$

Utilizando a substituição trigonométrica: $y = \dfrac{sec\,(\theta)}{2} \longrightarrow dy = \dfrac{sec\,(\theta)\,tg\,(\theta)}{2}d\theta$

Logo:

$$y^2 - \frac{1}{4} = \frac{sec^2\,(\theta)}{4} - \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad y^2 - \frac{1}{4} = \frac{tg^2\,(\theta)}{4}$$

Retornando à integral:

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{sec\,(\theta) - 3 - tg\,(\theta)}{sec\,(\theta) - 3 + tg\,(\theta)} \left(\frac{sec\,(\theta)\,tg\,(\theta)}{2}\right)d\theta = ...$$

Com algumas substituições é possível resolver esta integral.

5.1.5 Comparação

Claramente, a resolução pelas substituições de Euler são mais convenientes do que a proposta em G. Ávila [2] para a resolução da integral proposta na Subseção 5.1.

5.2 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}}dx$

5.2.1 Primeira substituição de Euler

Argumentando como na Subseção 2.1, para a primeira substituição: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$; para $a > 0$, temos:

$$\sqrt{x^2+4x+9} = -x\sqrt{1} + t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2-9}{4+2t}$$

Logo:

$$\sqrt{x^2+4x+9} = \frac{t^2+4t+9}{4+2t} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2t^2+8t+18}{(4+2t)^2}dt$$

Voltando à integral:

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}}dx = \int \frac{2}{(t^2+4t-1)}dt$$

Novamente, mais uma integral que podemos utilizar o método de “frações parciais”.

5.2.2 Segunda substituição de Euler

Argumentando como na Subseção 2.2, para a segunda substituição: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$; para $c > 0$, temos:

$$\sqrt{x^2+4x+9} = xt - \sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4+6t}{t^2-1}$$

Logo:

$$\sqrt{x^2+4x+9} = \frac{3t^2+4t+3}{t^2-1} \quad \text{e} \quad dx = \frac{-2\left(3t^2+4t+3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

Na integral:

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}}dx = \int \frac{-1}{t^2+3t+1}dt$$

"Frações parciais"!

5.2.3 Terceira substituição de Euler

O polinômio x^2+4x+9 não admite raízes reais para que possamos utilizar a terceira substituição de Euler.

5.2.4 Substituição proposta em G. Ávila [2]

Argumentando como na Seção 3, para a substituição proposta em G. Ávila [2], temos:

$$x^2+4x+9 = x^2+4x+4-4+9 = (x+2)^2+5$$

Tomando $\frac{y}{+\sqrt{1}} = (x+2)$, teremos: $x = y-2$. Daí, podemos concluir que: $dy = dx$. Retornando à integral com as novas substituições:

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}}dx = \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2+5}}$$

Utilizando a substituição trigonométrica: $y = \sqrt{5}tg\left(\theta\right)$

$$dy = \sqrt{5}sec^2\left(\theta\right)d\theta \quad \wedge \quad y^2+5 = 5sec\left(\theta\right)$$

Logo:

$$\int \frac{\sqrt{5}sec^2\left(\theta\right)}{tg\left(\theta\right)\sqrt{5}\left(\sqrt{5}sec\left(\theta\right)\right)}d\theta = \int \frac{sec\left(\theta\right)}{\sqrt{5}tg\left(\theta\right)}dy = \frac{1}{\sqrt{5}}\int cossec\left(\theta\right)d\theta =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|cossec\left(\theta\right) - cotg\left(\theta\right)\right| + Q$$

Retornando para a variável y:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{\sqrt{y^2+5}}{y}-\frac{\sqrt{5}}{y}\right|+Q$$

Retornando para a variável x:

$$\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}-\sqrt{5}}{x+2}\right|+Q$$

5.2.5 Comparação

Claramente, a resolução proposta em G. Ávila [2] é mais conveniente que as substituições de Euler para a resolução da integral proposta na Subseção 5.2.

5.3 $\int\frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx$

5.3.1 Primeira substituição de Euler

Sendo $a<0$, não podemos utilizar a 1ª substituição.

5.3.2 Segunda substituição de Euler

Sendo $c<0$, não podemos utilizar a 2ª substituição.

5.3.3 Terceira substituição de Euler

Argumentando como na Subseção 2.3, para a terceira substituição: $ax^2+bx+c{=}a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$, temos: $6x-x^2-5=-\,(x-5)\,(x-1)$. Façamos a seguinte substituição:

$$\sqrt{6x-x^2-5}=(x-1)\,t\quad\Rightarrow\quad x=\frac{5+t^2}{t^2+1}$$

Logo:

$$\sqrt{6x-x^2-5}=\frac{4t}{t^2+1}\quad\text{e}\quad dx=\frac{(-2)\,(4t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Voltando à integral e decompondo o integrando em "frações parciais", obtemos:

$$\int\frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx=-2\int\frac{5+t^2}{(t^2+1)^2}dt\quad=\quad-2\left(\int\frac{4}{(t^2+1)^2}dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt\right)$$

A segunda integral é uma primitiva imediata e a primeira delas exige uma substituição trigonométrica:

$$t=\operatorname{tg}\theta\quad\Rightarrow\quad\int\frac{4}{(t^2+1)^2}dt=\int4\cos^2\theta d\theta=2\theta+\operatorname{sen}2\theta+Q$$

Voltando à variável t:

$$\int \frac{4}{(t^2+1)^2}dt = 2\,\mathrm{arctg}\,t + \frac{2t}{t^2+1} + Q$$

Voltando à integral original:

$$\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx = -6\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right) - \sqrt{6x-x^2-5} + Q$$

5.3.4 Substituição proposta em G. Ávila [2]

Argumentando como na Seção 3, para a substituição proposta em G. Ávila [2], temos: $6x - x^2 - 5 = -1\left(x^2 - 6x\right) - 5 = -1\left(x^2 - 6x + 9 - 9\right) - 5 = -\left(x-3\right)^2 + 4$.
Tomando $\dfrac{y}{+\sqrt{|-1|}} = (x-3)$, teremos: $x = y + 3$. Daí, podemos concluir que: $dy = dx$. Retornando à integral com as novas substituições:

$$\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx = \int \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}dy + 3\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = -2\frac{\sqrt{4-y^2}}{2} + 3\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right) + Q$$

Retornando para a variável x:

$$\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx = -\sqrt{6x-x^2-5} + 3\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) + Q$$

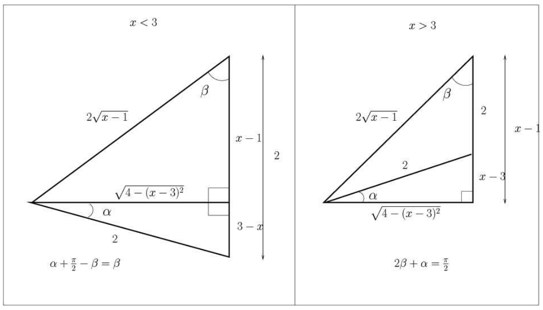
Observe que pela substituição de Euler, obtivemos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx = -6\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right) - \sqrt{6x-x^2-5} + Q$$

Para verificar que as duas famílias de funções acima descrevem o conjunto das primitivas da função $\frac{x}{\sqrt{6x-x^2-5}}$, precisamos mostrar que as funções

$$3\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad -6\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right)$$

diferem por uma constante. Para tanto, basta usarmos as relações trigonométricas nos triângulos retângulos da figura abaixo,



para obter:

1. para $x < 3$, temos

$$-\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right).$$

   Por outro lado, o triângulo isósceles da figura nos diz que: $\dfrac{\pi}{2} + \alpha = 2\beta$. Portanto,

$$3\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) = -3\alpha = \frac{3\pi}{2} - 6\beta = \frac{3\pi}{2} - 6\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right).$$

2. para $x \geq 3$, temos

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right).$$

   Por outro lado, o triângulo isósceles da figura nos diz que: $\frac{\pi}{2} - \alpha = 2\beta$. Portanto,

$$3\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) = 3\alpha = \frac{3\pi}{2} - 6\beta = \frac{3\pi}{2} - 6\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-1}\right).$$

5.3.5 Comparação

Neste caso, a resolução proposta em G. Ávila [2] ou a substituição de Euler para a resolução da integralproposta na Subseção 5.3 são equivalentes, podendo-se admitir que a proposta em G. Ávila [2] seja ligeiramente mais simples.

Referências

[1] N.Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral, Tomo I, Editora Mir, 1977.

[2] G. Ávila, Cálculo 1 – Funções de uma Variável, 4ª. edição, LTC, 1981.