MODELOS DE VON BERTALANFFY E GOMPERTZ PARA DESCREVER OS PARÂMETROS DE TAMANHO E PESO MÉDIO DE TILÁPIAS

JORGE CORRÊA DE ARAÚJO[1] ROSA MARÍA GARCÍA MÁRQUEZ[2]

Resumo

O objetivo desse trabalho foi utilizar os modelos matemáticos de von Bertalanffy e Gompertz para obter estimativas do peso do peixe para comparar com os resultados experimentais do peso médio de exemplares de machos albinos de tilápia do Nilo obtidos pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas de Pentecostes (CE). A taxa variável de crescimento intrínseco da espécie pode ser determinada com o modelo de Gompertz. O crescimento linear do peixe obtido com o modelo de Bertalanffy ficou em concordância com os dados experimentais. Os resultados obtidos com os modelos utilizados nesse estudo para a obtenção do peso médio mostraram que o modelo de von Bertalanffy devido a sua maior simplicidade, foi o mais adequado.

1. Introdução

A tilápia do Vale do Nilo é um peixe originário da Costa do Marfim (África) tendo sido introduzido no Brasil, em 1971 na região Nordeste, pelo Departamento Nacional de Obras Contra as Secas (DNOCS). Os machos característicos dessa espécie crescem muito mais rapidamente que as fêmeas. Esse peixe tem provado a sua eficiência no Quênia (África) no combate à malária ao se alimentar das larvas do mosquito conseguindo assim reduzir em até 94% a quantidade de insetos transmissores da doença.

Essa constitui uma das razões pela qual a tilápia tem sido indicada para o cultivo em regiões tropicais. Segundo Leonhardt e Urbinati (1999) vários são os estudos dessa espécie de peixe com vistas à produção piscícola. No entanto a obtenção de dados experimentais de alta qualidade demanda tempo e

---

Palavras-chave: modelos de von Bertalanffy, modelo de Gompertz, modelo de Gompertz generalizado.

DMAT/FFP-UERJ [1] jcaraujo@irpj.uerj.br, [2] rosagm@uerj.br

grande esforço logístico. Nesse trabalho foram analisados dois modelos matemáticos derivados da equação experimental de Bertalanffy (BASSANEZI, R. C. e FERREIRA JR., 1988) e a função logística de Gompertz (BOYCE *et al.* ,1999) com taxa de crescimento intrínseca constante e com a taxa de crescimento intrínseca variável para estimar o peso médio de tilápias machos albinos do vale do Nilo e comparar essas estimativas com os resultados experimentais divulgados por Bassanezi e Ferreira Jr. (1988) a partir do experimento realizado pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas de Pentecostes (CE). Também foi estimado o crescimento linear do peixe com a equação de Bertalanffy.

2. Materiais e Métodos

As simulações utilizaram os dados experimentais de comprimento e peso médio em função do tempo e consumo de ração da espécie de peixes tilápias albinas (machos) obtidos pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas de Pentecostes (CE) e divulgados por BASSANEZI E FERREIRA JR. (1988) conforme é mostrado na Tabela 1. A partir desses dados, foram utilizados modelos matemáticos para descrever os parâmetros de tamanho e peso médio desses exemplares.

Tabela 1. Médias dos Comprimentos e Pesos do grupo de peixes.

Tempo (mês)	**Comprimento Médio (cm)**	**Peso Médio (g)**	**Consumo de Ração (g)**
0	11,0	26,0	Não divulgado
1	15,0	59,5	12,3
2	17,4	105,4	27,9
3	20,5	200	49,8
4	22,7	239,5	56,7
5	25,3	364,3	65,4
6	27,4	421,7	95,6
7	28,0	476,0	106,3
8	29,3	488,2	128,5

O modelo proposto por VON BERTALANFFY (BASSANEZI E FERREIRA JR., 1988) para descrever o crescimento de peixes é baseado no princípio da alometria: “A taxa de variação do peso do peixe é proporcional à área da superfície fisiológica (anabolismo) e a perda de massa (catabolismo) do individuo da espécie”. Esse princípio traduzido em termos de equação fica na forma

$$\frac{dp}{dt} = \alpha S - \beta p \tag{1}$$

onde α é a constante de anabolismo (taxa de síntese de massa por unidade de área) e β a constante de catabolismo (taxa de decaimento de massa por unidade de massa) da espécie. Nesse modelo, a superfície S é proporcional ao peso p na forma

$$S \propto p^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

Substituindo a equação (2) na equação (1) resulta na equação experimental de VON BERTALANFFY (BASSANEZI E FERREIRA JR. , 1988) para o peso do peixe $p(t)$ dada por

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \tag{3}$$

Considerando $p(t_0) = p_0$ como sendo a massa inicial a equação (3) é uma equação de BERNOULLI (BOYCE *et al*., 1999) e tem por solução

$$p(t) = p_\infty \left(1 - \frac{C\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3 \tag{4}$$

onde $p_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \lim_{t \to \infty} p(t)$ é o peso máximo admitido. Como o peso e a área fisiológica do peixe são proporcionais ao comprimento linear $l(t)$ resulta da equação (3) a expressão para o comprimento linear dado por

$$l(t) = l_\infty - (l_\infty - l_0)e^{-kt} \tag{5}$$

onde l_0 e l_∞ são respectivamente o comprimento inicial e final do peixe. A constante l_0 é assumida ser conhecida. Os parâmetros l_∞ e $k = \frac{\beta}{3}$ podem ser estimados pelo método de Ford-Waldorf (BASSANEZI E FERREIRA JR., 1988) quando são disponíveis os dados experimentais por meio de uma tabela. O procedimento consiste na linearização dos pares de tamanhos experimentais médios $\left(l(t), l(t+1)\right)$ por meio da equação

$$l(t+1) \cong m l(t) + n \tag{6}$$

Da combinação das equações (5-6) resulta

$$l_\infty = \frac{n}{1-m} \qquad \text{e} \qquad k = \ln\left(m^{-1}\right) \tag{7}$$

Bertalanffy também relacionou o peso do peixe $p(t)$, com o comprimento linear $l(t)$ por meio da equação

$$p(t) = p_\infty \left(\frac{l(t)}{l_\infty} \right)^3 \tag{8}$$

Quando $t \to \infty$, $p(t) \to p_\infty$.

A combinação das equações (5 e 8) resulta na expressão para o peso do peixe dada por

$$p(t) = \left(\frac{p_\infty}{l_\infty} \right)^3 . \left[l_\infty - \left(l_\infty - l_0 \right) . e^{-kt} \right]^3 \tag{9}$$

O ponto de inflexão da curva obtida da equação (9) é dado por

$$t^* = -\frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{l_\infty}{3 \times \left(l_\infty - l_0 \right)} \right) \tag{10}$$

A equação de Gompertz (BOYCE *et al.*, 1999) usada para monitorar o crescimento de peixes, em termos de seu peso, é definida por

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)\ln\left(\frac{K}{p(t)}\right) \tag{11}$$

onde r é a constante de crescimento intrínseca da espécie (g/semana) e $K = P_\infty$. A equação (11) com a condição inicial $p(t_0) = p_0$ pode ser resolvida por separação de variáveis. A solução da equação (11) é dada por

$$p_G(t) = Ke^{\{[\ln(p_0/K)]e^{-rtt}\}} \tag{12}$$

Um modelo de Gompertz generalizado e, portanto mais realista é proposto nesse trabalho considerando a taxa de crescimento da espécie dependente do tempo. Da equação (12) se obtem

$$r_G(t) = -\frac{1}{t}\ln\left[\left(\frac{1}{\ln\frac{p_0}{K}}\right)\ln\frac{p(t)}{K}\right] \tag{13}$$

Na equação (13) a expressão para p(t) será dada pela equação (9) e desse modo o peso $p_G(t)$ representa o modelo de Gompertz generalizado na forma

$$p_G(t) = K\exp\left[\frac{\ln^2(p_0/K)]}{\ln\left(\left(\frac{p_\infty}{l_\infty}\right)^3\cdot\left[l_0\cdot e^{-kt}\right]\right) - \ln K}\right] \tag{14}$$

3. Resultados e Discussão

A Figura 1 mostra a reta de linearização dos dados $\left(l(t), l(t+1)\right)$ (Tabela 1) ajustados pelos mínimos quadrados. A equação da reta é dada por $l(t+1) \cong 0{,}850 l(t) + 5{,}391$

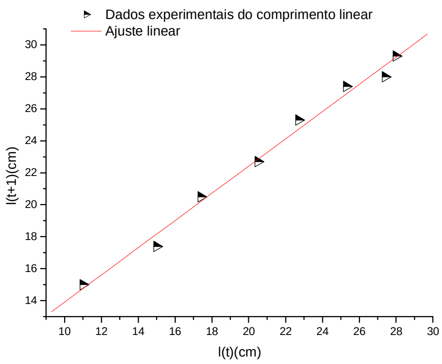


Figura 1. Ajuste pelos mínimos quadrados dos pares $(l(t), l(t+1))$

Usando (7) resultam os valores estimados para as constantes $k \cong 0{,}161$; $l_\infty \cong 36{,}36$. Substituindo esses valores na equação (5) tem-se a expressão para o comprimento linear $l(t)$

$$l(t) = 36{,}36 - 25{,}36 e^{-0{,}161 t} \tag{15}$$

O valor de *k* permite estimar a constante de catabolismo dada por

$$\beta = 3k = 0.483 \tag{16}$$

A Figura 2 mostra os comprimentos médios experimentais com os estimados pela equação (15). Nota-se uma boa concordância entre os valores estimados e os dados experimentais.

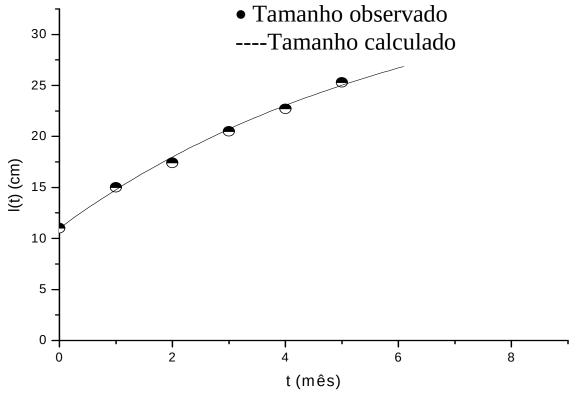


Figura 2 Gráfico do crescimento linear da tilápia em cm/mês.

Para obter *p*(t) na equação (9) é necessário conhecer o valor de p_∞. Isso pode ser feito substituindo um dos valores experimentais, digamos $p(0) = 26\,g$ e $l(0) = 11$ na equação (8) para obter $p_\infty \cong 935$ g. Com esses dados a equação (9) para a estimativa do peso do peixe em função do comprimento linear é dada por

$$p(t) = 0{,}0194(36{,}36 - 25{,}36e^{-0{,}161t})^3 \tag{17}$$

O ponto de inflexão (tempo de maior ganho de peso) calculado a partir da equação (17) acontece quando $t^* \cong 4{,}60$ meses. Nesse momento estará havendo o maior crescimento de peso na razão de $65{,}35\,{}^{g}\!/_{m\hat{e}s}$ quando o peso médio do peixe será de aproximadamente 29% de seu peso médio máximo. Da equação (4) obtido o valor aproximado para p_∞ pode ser estimada a constante de anabolismo por meio da relação $p_\infty \cong \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3$

$$\alpha \cong 4{,}723 \tag{18}$$

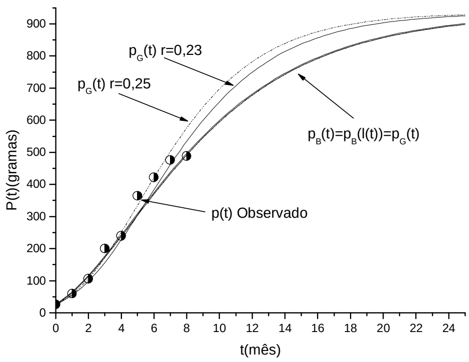
Das estimativas dadas por (16) e (18) a equação (4) do peso médio para a tilápia em função do tempo é dada por

$$p(t) = 935\left(1 - C(0{,}1023)e^{-0.161t}\right)^3 \quad (19)$$

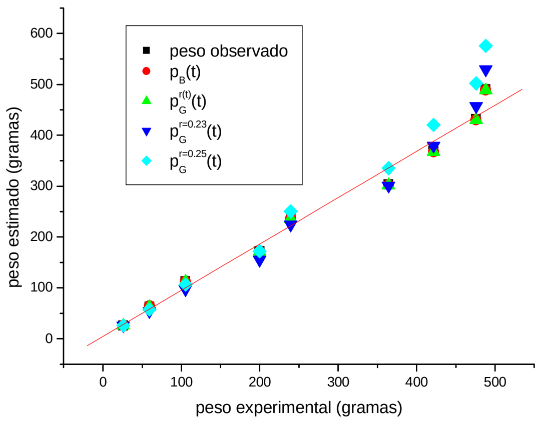
A constante C da equação (19) pode ser determinada usando da Tabela 1 selecionando, por exemplo, $p(0)=26$. Nesse caso $C = 6{,}84$. A equação logística de Gompertz generalizada para a modelagem do peso médio das tilápias será definida por

$$p_G(t) = 935e^{(0{,}99882)\ln 0{,}000207(36{,}36-25{,}36e^{(-0{,}16t)^3})} \quad (20)$$

As Figuras 3(a-b) mostram que não existem diferenças significativas entre os modelos adotados para as estimativas do peso médio durante o período de observação compreendido entre 0 a 8 meses. Entretanto observa-se uma diferença significativa entre o período mensal de 9 a 20 com os modelos de Gompertz usando taxas constantes e os modelos de von Bertalanffy e Gompertz generalizado. As estimativas do peso com o modelo de Gompertz utilizando taxas de crescimento constantes têm maior dispersão em relação à reta identidade da Figura 3(b), indicando um maior desvio desse modelo em relação aos dados experimentais. Não existe diferença significativa entre os pesos estimados com os modelos de von Bertalanffy e o modelo de Gompertz generalizado.



(a)



(b)

Figura 3. Gráficos (a-b) do peso médio da tilápia em g/mês estimado com os modelos $p_B(t)$, $p_B(l(t))$, $p_G(t)$, $p_G^{r=0,23}(t)$ e $p_G^{\bar{r}=0,25}(t)$

A expressão para a taxa de crescimento com o modelo mais geral de Gompertz equação (13) é dada por

$$r_G(t) = -\frac{1}{t}\ln\left[(-0{,}279)\ln\frac{\left[0{,}0194(36{,}36-25{,}36e^{-0{,}161t})\right]^3}{935}\right] \qquad (21)$$

A Figura 4 mostra o comportamento da taxa de crescimento intrínseca da espécie em função do tempo dada pela equação (21).

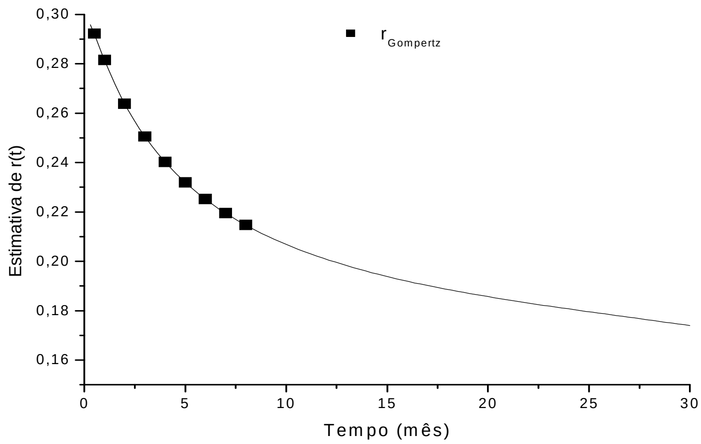


Figura 4 Gráfico da taxa de crescimento $r_G(t)$ intrínseco da espécie pelo modelo de Gompertz generalizado

4. Conclusões

Os modelos matemáticos de von Bertalanffy mostraram-se adequados para descrever o peso médio e o crescimento linear das tilápias estudadas. Com o modelo de Gompertz foi possível expressar a taxa de crescimento de massa intrínseca característica da espécie como uma função do tempo. Nenhuma diferença significativa foi observada para as estimativas do peso médio com os pesos experimentais com o uso dos diferentes modelos. O modelo de Gompertz generalizado para descrever o peso do peixe teve desempenho indistinguível quando comparado ao modelo de Bertalanffy para o peso médio do peixe e desse modo, devido a sua maior simplicidade, o modelo de Von Bertalanffy pode ser considerado, portanto, como o mais adequado para descrever o peso e o crescimento médio dos exemplares analisados. A utilização desses modelos permite que o tempo para obtenção de parâmetros biológicos de crescimento e engorda característicos da espécie seja reduzido significativamente.

5. Referências

LEONHARDT, J.H, URBINATI, E.C. Estudo Comparativo do Crescimento Entre Machos de Tilápia do Nilo, Oreochromis niloticus, Sexados e Revertidos. Boletim do Instituto da Pesca, São Paulo, 25(único): 19-26, 1999.

BOYCE, W.E.; DE PRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno. LTC. RJ. Brasil, 1999.

BASSANEZI, R. C. e FERREIRA JR., W. C. Equações Diferenciais com Aplicações. Harbra, São Paulo, 1988.