UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

2007

ISSN 1413-9030

# CADERNOS DO IME

## Série Matemática – Vol. 19/Vol. 1

# Trigonometria e Números Complexos

Neyde Felisberto Martins Ribeiro

# CADERNOS DO IME
## Série Matemática

Publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística (IME), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ).



**Normalização, divulgação e distribuição:**
Biblioteca do Centro de Ciências de Tecnologia A (CTC/A) da rede Sirius de Biblioteca da UERJ – ctca@uerj.br



**Correspondência**
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Rua São Francisco Xavier, 524 - Pavilhão Reitor João Lyra Filho- 6º andar
Maracanã 20550-900 – Rio de Janeiro, RJ

Telefax: 21 2587-7212
e-mail: cadernos_mat@ime.uerj.br
http://www.ime.uerj.br/cadernos_mat/

Nosso Instituto homenageia, com a presente edição especial[1] dos *Cadernos do IME – Série Matemática*, uma saudosa colega, a professora Neyde Felisberto Martins Ribeiro. Publicamos um texto que ela estava terminando de burilar com seu proverbial zelo, quando partiu, a 6 de outubro de 2007.

O texto foi utilizado no IME, em um curso de formação continuada para professores do ensino básico e fundamental, para o qual a Professora Neyde foi convidada pelos organizadores, SBM e Faperj. Serviu de base ainda para disciplinas que ela ofereceu no Curso de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática do IME/UERJ, como também para disciplinas de extensão do CECIERJ.

A Professora Neyde Felisberto atuou em várias frentes no nosso Instituto, junto à licenciatura e ao bacharelado, à extensão e à especialização, a comissões de avaliação e de atualização de currículo, sempre contribuindo com a dedicação enorme que punha em todas as atividades em que se envolveu. O presente texto reflete sua preocupação com a formação de professores.

O professor Luis Adauto da Justa Medeiros se junta a nós nesta homenagem, lembrando fatos tocantes na história de vida da professora Neyde. Publicamos ainda as palavras pronunciadas pelo prof. Carlos A. de Moura para alunos do IME que reconheceram a riqueza da interação que ela lhes proporcionou, prestando à professora Neyde Felisberto um tributo por ocasião de sua cerimônia de formatura.

Os Editores

1 Este é o primeiro número da versão *online* dos *Cadernos do IME - Série Matemática*

# NEYDE

## MENINA/MULHER

A menina morava em uma vila de um bairro operário próximo ao Santo Cristo. Havia vizinhos de boa condição financeira, mas seus pais eram simples assalariados. As festas de fim de ano já tinham aquela promoção comercial em torno do Papai Noel. Suas amigas e ela escreviam cartas ao misterioso velho com seus pedidos de natal. O seu presente era uma boneca de pano enquanto os de suas amigas eram belas bonecas o que lhe causava certa inveja infantil. Indagando de sua mãe, ela lhe disse que certamente não fazia uma carta bem feita. Muito esperta, próximo ao Natal, combinou com uma amiga para fazerem cartas idênticas, pedindo uma bela boneca. As cartas seguiram e o Natal chegou. Na manhã do dia de festas novamente se repetiu a façanha do ano anterior - uma bela boneca para a amiga e uma bruxa de pano para a menina Neyde Felisberto. O tempo correu e foi aos poucos entendendo o que era o Papai Noel e o que representava.

A menina cresceu e precisava ingressar na escola secundaria para completar sua educação, uma das prioridades de seu pai, um competente operário de baixa renda. O ingresso à escola secundaria publica, naquele tempo, era feito por meio de um Exame de Admissão. Para ter sucesso seria necessário seguir um curso particular de preparação, muito caro. Seus pais não tinham recursos para esta empreitada. Uma colega vizinha, de pais abastados, fazia um curso preparatório pago. Combinaram que ao chegar do curso a sua colega emprestaria os cadernos, com as anotações feitas nas aulas e os exercícios. Ela copiava, em um caderno seu, fazia os exercícios e comparava com os da colega orientada pelo professor. Esta atitude se repetia diariamente. Assim, se preparou para o exame no qual foi aprovada e ingressou no ensino público onde completou a escola secundaria daquele tempo. Sua colega, não teve sucesso, mas com a boa situação financeira de seus pais, ingressou numa escola secundaria particular.

Note-se que jamais passou por sua cabeça tirar vantagens de ser carente, na nomenclatura atual. Ela possuía dentro de si, aquilo que a natureza propiciou – competência, parâmetro principal para o ingresso no ensino universitário.

De posse do certificado do curso secundário, estava apta a ingressar na Universidade, o que fez. Nesta época, já trabalhava para se manter e ajudar em casa. Ingressou na Universidade Fluminense onde havia Licenciatura em Matemática, no fim da tarde e início da noite, o que era conveniente para os que trabalhavam.

Da Fluminense, transferiu-se para o IM-UFRJ, ainda na fase caótica inicial do IM. Nesta época, a conheci como minha aluna da graduação. Muito irrequieta, e muito inteligente, chamou minha atenção. Aos sábados passava a tarde no IM. Levava a Lourdinha e meus filhos que se divertiam correndo naquela imensidão de gramados, enquanto eu trabalhava. Ao terminar a aula, no fim da tarde, lhe dava uma carona e a seus colegas. Lembro-me que ela ficava no Hospital dos Servidores, próximo à vila onde morava.

Com a criação da pós-graduação no IM-UFRJ, Guilherme de La Penha, coordenador do Programa de Engenharia Matemática da COPPE, ofereceu bolsa de estudos para vários alunos que desejassem fazer o Mestrado em Engenharia Matemática. Um dilema, para ela, seria aceitar a bolsa com a condição de largar o emprego. Escolheu a bolsa e iniciou o Mestrado em Matemática, o que concluiu sem muito trauma.

Nesta época, conversávamos pouco. Há um episodio que não esqueço. Certa vez, indo ao Maracanã para assistir um jogo Botafogo e Vasco, encontrei a Neyde com um colega, o Roberto. Ela, carregando a cruz de malta e eu visionário em busca da estrela solitária. Casaram-se e vieram os filhos Aline, Bruno e Flavia. Agora, era Neyde Martins Ribeiro e não mais Neyde Felisberto.

Tive a sorte de ser seu orientador de Doutorado no IM-UFRJ. Trabalhamos bastante e concluiu de modo eficiente. Ingressou a seguir como professora do IM e, como colegas, desenvolvemos bons planos de estudo. Ela lecionou várias disciplinas na pós-graduação. Sempre buscando uma formação profissional sólida, planejou um estágio pós-doutorado no Departamento de Matemática da Escola Politécnica de Paris. Candidatou-se à bolsa, mas o comitê CAPES-CNPq não concedeu.

Posteriormente, atraída pela administração chegou a sub-reitora de Graduação da UFRJ. Ao concluir o mandato, aposentou-se e ingressou na UERJ.

Encontramos-nos durante a organização de um Seminário Brasileiro de Análise realizado na UERJ, do qual foi coordenadora.

Ultimamente, falávamos apenas por telefone sobre vários assuntos. No início de sua enfermidade telefonou-me, falou muito comigo e com a minha filha Laura. O tempo foi curto e faleceu. Deixou um exemplo de superação e vitória sobre obstáculos em que a menina Neyde Felisberto, do Santo Cristo, se encontra dentro da mulher Neyde Martins Ribeiro, da UFRJ.

Rio de Janeiro, 9 de outubro de 2007

Luis Adauto da Justa Medeiros

# PRÓLOGO

## PROFESSORA, REALMENTE UMA PROFESSORA[1]

Carlos A. de Moura[2]

Minhas queridas e meus queridos formandos,

Inicialmente, permitam-me este tratamento afetuoso, apesar de a muitos, à maioria, nem conhecer de perto. A seguir, minhas desculpas por desobedecer aos cânones do cerimonial, deixando para saudar só depois as autoridades acadêmicas à mesa, o que faço agora.

Sucede que minhas palavras neste momento buscam acolher no seio desta celebração a colega Neyde Felisberto: suas idéias, suas opções, o direcionamento que sempre lhe impulsionou os passos. E ao me dirigir primeiro a vocês, e de uma forma íntima e calorosa, eu sigo o modelo que ela adotou em todos os momentos de sua brilhante existência – o de dedicação aos jovens, ao novo, àqueles que vão ocupar o espaço que, felizmente, já deixa de ser todo nosso.

É verdadeiramente emocionado que lhes agradeço o convite que me fizeram. Muitas ocasiões compartilhei com a Neyde, a quem sempre olhei como sendo o exemplo autêntico da mestra, da professora total.

Adjetivos são palavras pouco matemáticas. Convém explicá-los se queremos a precisão que estrutura nossa área do saber. O que quero dizer com "professora total"?

A Neyde imprimiu a todos os seus atos o perfil de professora, no melhor sentido do termo: muito longe de autoritária, sabia ser firme; não era auto-referente, mas transmitia importantes conhecimentos, compartilhando suas experiências pessoais; sua simplicidade mal conseguia disfarçar o volume de informações de que ela dispunha para repartir, o que adorava fazer. Mas ela era total porque era sempre a mestra, nas 24 horas de todos os seus dias. Ela nunca foi o ser compartimentado – aula é hora de ensinar, no cargo administrativo eu vou conduzir. Não, ela os ocupou, a ambos os papéis, sempre como a mestra que era.

Vou descrever para vocês dois fatos com os quais a Neyde lidou, sempre imersa nessa sua postura.

Algum tempo após iniciar seu mandato como Diretora do Instituto de Matemática da UFRJ, era nítida a mudança de atitude dos funcionários administrativos, antes ausentes e displicentes. Muitos acreditavam que esse avanço era fruto de alguma verbinha secreta que a nova diretora teria obtido: com ela estaria conseguindo dobrar o desânimo antes generalizado

[1] Palavras aos graduandos em Matemática pelo IME e FFP, turma 2007-II, em 25/fev/2008

[2] Professor Titular do IME/UERJ -- *e-mail*: *demoura@ime.uerj.br*

– um disfarçado suborno. Longe disso, não seria essa uma iniciativa da Neyde. Como mestra total, ela havia convidado os colegas da administração para lhes oferecer uma aula sobre o que significa a universidade, o instituto, a formação das novas gerações, as diferentes funções que cabem a cada um na instituição; como é tão indispensável o trabalho de dar aula, quanto o de fornecer corretamente as informações pedidas, o de arquivar a documentação nos locais corretos, o de manter as salas de aula asseadas, abertas e fechadas na hora devida, com giz e apagadores disponíveis, com luzes, tomadas, janelas funcionando, de ter as bibliotecas atualizadas, etc, etc, etc. A metáfora de uma orquestra era impossível de ser evitada ... Suas palavras foram reconhecidas, calaram fundo no íntimo de cada um, alguns deles depois se dirigiram a ela para reconhecer: "Ninguém tinha me falado assim antes, dizendo que meu trabalho tinha qualquer importância. Eu agora quando venho trabalhar, é com outro astral!"

Essa era a Neyde.

Quando na Pró-reitoria de Graduação da UFRJ, teve de enfrentar um problema nos alojamentos: havia ex-estudantes que continuavam vivendo nos quartos, anos após seu desligamento da universidade. Ao tentar convencê-los de que precisavam abandonar o próprio da universidade, recebeu a ameaça: "Pode entrar na Justiça, ela vai nos garantir a permanência." A Neyde nunca recorreu à luta legal, preferiu continuar argumentando, citando o número de pedidos que poderia atender, os dados sociais dos solicitantes, relembrando o que tinha representado o acolhimento recebido anos antes por aqueles que se tinham tornado ocupantes ilegais. Essa era a Neyde: sempre queria transmitir conhecimento, passar uma outra visão para ser pensada, sempre queria argumentar, trocar idéias. E aprender também, sempre.

E na sala de aula, quem era ela? Alguns matemáticos citam a chamada "Lei dos Grandes Números". Eu costumo brincar dizendo que ela era inimiga dessa lei. É que na correção dos testes escritos, a Neyde ignorava quantos alunos tinha a turma. Literalmente, ela corrigia cada teste como se só houvesse aquele. Lia todos os detalhes. Não acreditava em distribuir um gabarito e dizer apenas: "certo" ou "errado". Entregava de volta o teste como se tivesse sido ela a examinanda, creio que algumas vezes havia até maior volume escrito por ela do que no original. Ela comentava cada erro e cada imprecisão. Mas não se imitava à matemática. O aluno é um todo e o aprendizado é um todo. Assim, ela indicava desde os erros de ortografia aos de sintaxe, chegando à sofisticação de mostrar caminhos mais simples, frases mais claras, e até mesmo como apresentar de uma melhor forma gráfica a solução exposta.

Formandos queridos, a Neyde era muito feliz porque executava todas as tarefas que eram seu dever com um prazer enorme: o prazer de estar dedicando a cada atividade uma parte única no Universo – a contribuição que apenas a sua individualidade podia trazer. Por isso nós a admiramos e esperamos que seu exemplo ajude vocês nas lutas que encontrarão nos dias vindouros.

Muito sucesso para vocês!

# TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

NEYDE FELISBERTO MARTINS RIBEIRO

## Prefácio.

O texto que apresentamos, dividido em 11 blocos de Aulas, foi organizado a partir das notas de aula produzidas durante vários períodos em que lecionamos para professores de Matemática do Estado do Rio de Janeiro, quer no CECIERJ, quer na UERJ, onde participamos de projeto com o apoio da FAPERJ. Nosso trabalho tem a contribuição tanto dos textos de apoio aos cursos dados nos referidos projetos, quanto das discussões que as equipes de Matemática travaram nas avaliações dos trabalhos que faziam dentro dos referidos projetos.

Temos convicção de que a Trigonometria, do modo como se aprende no período pré-universitário, é insuficiente para um professor de matemática. Por outro lado, em geral, no curso universitário admite-se que o estudante domina toda a trigonometria e as funções trigonométricas surgem como exemplos que são brevemente trabalhados dentro dos cursos de Cálculo.

Constatamos que um grande número de professores, atuantes nos ensinos fundamental e médio, teme a abordagem da Trigonometria por falta de segurança em seus conceitos. Também evitam exercícios de números complexos, por não terem clareza sobre o significado do objeto matemático "número imaginário" e das operações que o envolvem.

Assim, percebemos uma lacuna de trigonometria e de números complexos na formação de muitos professores de matemática.

Resolvemos organizar a presente disciplina, que trata destes assuntos, objetivando o entendimento de seus respectivos conceitos. Naturalmente, devido ao caráter elementar do texto, alguns conceitos (por exemplo, o de medida), não são abordados com profundidade.
Sempre que possível, o texto procura acompanhar de exemplos e de exercícios resolvidos os conceitos apresentados. Estes exercícios têm por finalidade a fixação dos referidos conceitos. Também propomos um bom número de exercícios com o mesmo objetivo, o qual não é o de induzir o leitor a memorizar "fórmulas" e/ou "truques".

A ordem e o conteúdo das aulas, segundo os quais apresentamos a disciplina, estão de acordo com a filosofia do trabalho que pretendemos realizar. Ao início de cada aula comentamos sobre o seu conteúdo. Durante e/ou ao final de cada uma propomos exercícios, muitos dos quais complementam a teoria. Também constituem uma aula, ao final dos tópicos tanto de Trigonometria como de Números Complexos, alguns exercícios resolvidos e outros por resolver .

Neyde Felisberto Martins Ribeiro

Sumário

## Aula 1

Na aula 1 introduzimos as notações relativas aos números e pares de números reais. Esta aula objetiva definir o sistema de coordenadas cartesianas no plano e as operações usuais entre os pares de números reais, bem como as interpretações geométricas das respectivas operações entre os vetores do plano. O domínio do seu conteúdo é fundamental para a compreensão das demais aulas.

### 1.1. Introdução

Antes de iniciarmos o estudo de Trigonometria e Números Complexos, faremos uma breve revisão sobre as notações que identificam os conjuntos de números, os intervalos, as representações geométricas dos números reais e dos pares de números reais, quais sejam, a reta e o plano.

Anotemos por **N** o conjunto dos números naturais, por **Z** o conjunto dos números inteiros, por **Q** o conjunto dos racionais os quais, unidos com os irracionais, formam o conjunto **R** dos números reais.

Assim :

**N** = {0,1,2,3,4,...} é o conjunto dos números naturais, **Z** ={...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,..} é o conjunto dos números inteiros, **Q** = {p/q; p, q $\in$ Z , q $\neq$ 0} é o conjunto dos números racionais, ou seja, das frações, e **R** é o conjunto dos números reais

Em **R** definimos uma função dita “módulo” ou “valor absoluto”. Esta é anotada por :

| . | : **R** $\rightarrow$ **R** , tal que : x $\rightarrow$ | x | onde $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Exercício 1.1:

Verifique que:

1. | x | $\geq$ 0 $\forall$x $\in$ **R** ; 2. | x | = 0 $\leftrightarrow$ x = 0; 3. | x | = | -x |; 4. | x + y | $\leq$ | x | + | y |.

Definimos uma função “distância” entre dois reais x e y, dada por :

**d** (x , y) = | x – y |

OBS : | x | = | x – 0| = **d**(x , 0), isto é, | x | é a distância de x a zero.

**1.2.Representação Geométrica de R**

É usual, entre os matemáticos, ao pensarem no conjunto de números reais, visualizá-lo como uma reta **r**. Vejamos como esta visualização é estabelecida. Consideremos uma reta **r** e nela marquemos, arbitrariamente, um ponto que chamaremos de 0 (zero) e outro ponto, à sua direita, que chamaremos 1. Ao ponto situado ao dobro desta distância e à direita de 1 chamaremos de 2, ao ponto que dista de zero o mesmo de 1, mas situado a sua esquerda chamaremos –1, etc. Assim, se $a < b$, então o ponto correspondente a $a$ está à esquerda do ponto correspondente a $b$. Assim são representados em **r** os números...$\pm$ n, ...$\pm$ 2, $\pm$1, 0. Naturalmente, dentro desta lógica, o número racional ½, por exemplo, está representado pelo ponto médio do segmento entre 0 e 1, e assim por diante, torna-se bem natural, portanto, a associação dos racionais a um pontilhado sobre a reta. Estamos dizendo que mesmo com todos os racionais representados em **r** a nossa reta não está completa, não tem "continuidade". Apelando para a intuição, consideramos que, ao completarmos (fecharmos) o pontilhado, estaremos acrescentando os números irracionais.

Desta forma, a intuição nos sugere admitir que os irracionais se encaixam completando a reta no esquema que descrevemos no parágrafo anterior, de tal modo que todo número real pode ser considerado como um ponto da reta. Reciprocamente, todo ponto P da reta **r** está a uma distância x de 0 e, se P estiver à direita de 0 será identificado com o real x, se estiver à esquerda será identificado com o real –x. Assim, estamos identificando os números reais com a reta. Por esta razão, às vezes, o conjunto **R** dos números reais recebe o nome de <u>reta real</u> e cada número real é dito um ponto da reta.

É usual desenharmos, simplesmente :

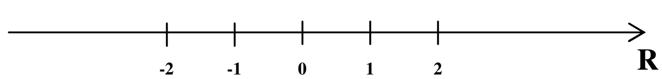



**Fig 1.1**

## **1.3.Intervalos**

O conjunto $\{ x \in \mathbf{R};\ a < x < b\}$ se anota por $(a\ ,\ b)$ ou $]a\ ,\ b[$ e é chamado de intervalo aberto de $a$ a $b$ ou de extremos $a$ e $b$.

O conjunto $\{ x \in \mathbf{R};\ a \leq x \leq b\}$ se anota por $[a\ ,\ b]$ e é dito intervalo fechado de extremos $a$ e $b$. De um modo geral :

$[a\ ,\ b) = \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x < b\}$; $(a,\ b] = \{ x \in \mathbf{R};\ a < x \leq b\}$; $(a\ ,\ +\infty) = \{ x \in \mathbf{R};\ x > a\}$;
$[a,\ +\infty) = \{ x \in \mathbf{R};\ x \geq a\}$; $(-\infty,\ b) = \{ x \in \mathbf{R};\ x < b\}$; $(-\infty, b] = \{ x \in \mathbf{R};\ x \leq b\}$ e
$\mathbf{R} = (-\infty\ ,\ +\infty)$.

Exemplos:

1.Consideremos o intervalo $[2\ ,\ 5)$. O número $2 \in [2\ ,\ 5)$, o número $3{,}1 \in [2\ ,\ 5)$ mas o número $5 \notin [2\ ,\ 5)$

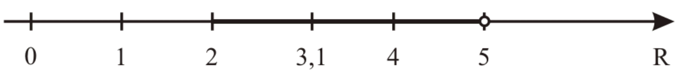



Fig. 1.2

2.O intervalo $(-4\ ,\ +\infty)$ é o conjunto de todos os números reais maiores que -4.


Fig. 1.3

## **1.4.O Plano – Representação Geométrica**

Consideremos agora o conjunto dos pares de números reais $\{ (a\ ,\ b);\ a \in \mathbf{R} \text{ e } b \in \mathbf{R} \}$ que anotamos por $\mathbf{R}^2$ . Para a sua representação geométrica, consideremos um sistema de duas retas que se cortam em ângulo reto (sistema de coordenadas retangulares ou sistema cartesiano). Uma delas será o eixo "horizontal" (ou eixo OX = **R**) e a outra será o eixo "vertical" (ou eixo OY = **R**).

Cada um dos eixos é o conjunto **R** dos números reais. O seu produto cartesiano pode ser descrito por pares de números reais, do seguinte modo: os pontos a do eixo real OX são identificados por (a , 0) e os pontos b do eixo vertical OY por (0 , b), de modo que a interseção dos eixos, a origem O do sistema de coordenadas, é o par (0 , 0). Qualquer ponto (a , b) poderá ser identificado como o vértice do retângulo cujos outros três vértices são :
(0 , 0) , (a , 0) e (0 , b), como podemos observar na figura abaixo :

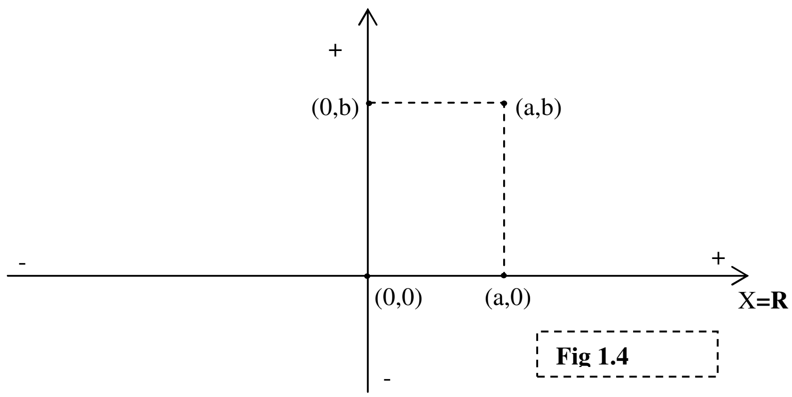



**Fig 1.4**

O eixo real OX tem sentido positivo à direita de 0 e negativo à esquerda. O eixo real OY tem sentido positivo acima de 0 e negativo abaixo de 0.

OBS: Os dois eixos OX e OY dividem o plano em 4 quadrantes. No primeiro quadrante tem-se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, no segundo $a \leq 0$ e $b \geq 0$, no terceiro $a \leq 0$ e $b \leq 0$ e no quarto quadrante $a \geq 0$ e $b \leq 0$.

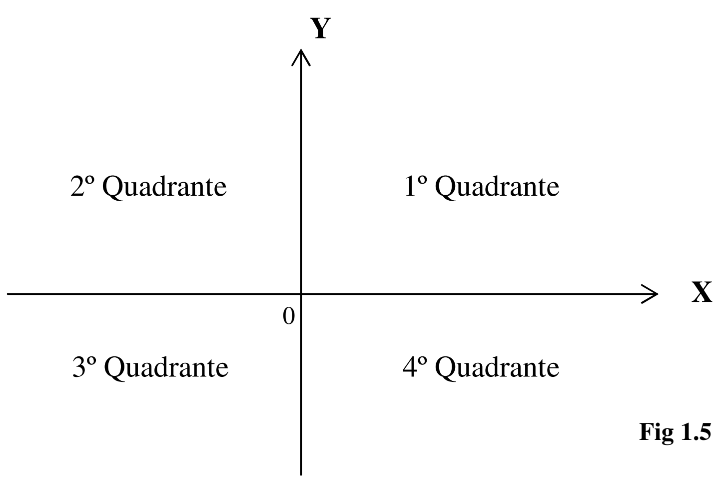



**Fig 1.5**

Os números a e b recebem, respectivamente, os nomes de 1ª coordenada e 2ª coordenada (ou coordenada x e coordenada y, respectivamente) do ponto determinado. Desta maneira, o par (a , b) é dito um par ordenado do plano ou do $\mathbf{R}^2$. Note que (a , b) ≠ (b , a).

Assim, com esta representação, identificamos os pares de números reais com o plano e nos referiremos, indistintamente, ao par (a , b) como um par de números reais (a , b) ∈ $\mathbf{R}^2$ ou como um ponto P do plano de coordenadas a e b, isto é,

P = (a , b) ou P (a , b).

OBS: a também é dito abscissa de P e b ordenada de P no sistema XY (ou seja, XOY).

Exemplos:

1) A reta s, mostrada no gráfico abaixo, pode ser descrita por s = { (x , 1); x ∈ **R** }

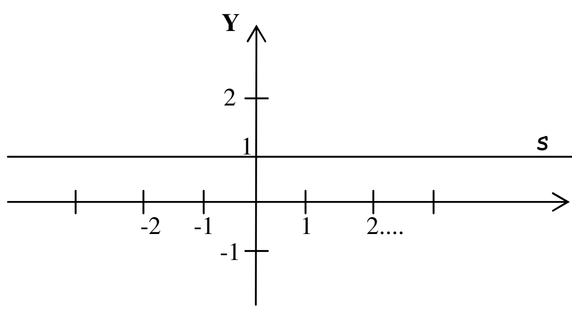



**Fig 1.6**

2) A reta s, mostrada no gráfico seguinte, pode ser descrita por s = { (-2 ,y ); y ∈ **R**}

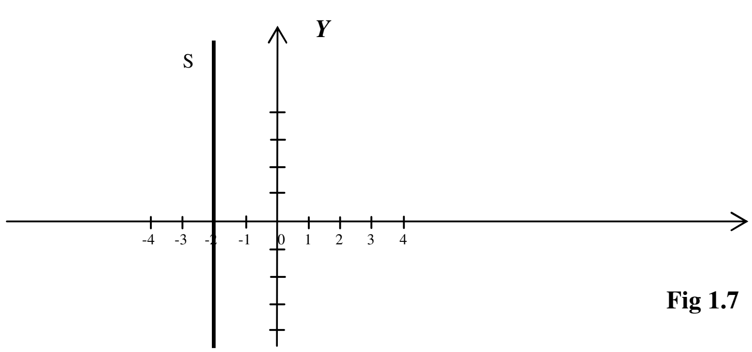



**Fig 1.7**

3) A reta s, mostrada no gráfico abaixo, pode ser descrita por $s = \{ (a , a);\ a \in \mathbf{R} \}$

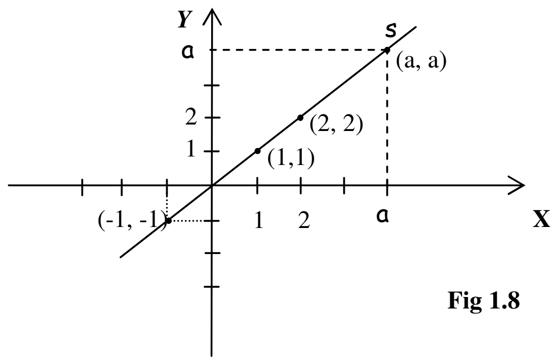



**Fig 1.8**

Obs : O Exemplo 3) acima pode ser traduzido por $s = \{ (x , y ) ;\ y = x \ , x \in \mathbf{R} \}$ que o leitor, familiarizado com o conceito básico de função, reconhece como o gráfico da reta (bissetriz dos 1º e 3º quadrantes) $y = x,\ x \in \mathbf{R}$, ou seja, da função identidade.

## 1.5. <u>Operações no Plano</u>

Os pontos P ( x , y) do plano são identificados a vetores OP com origem em O das coordenadas e extremidade em P.

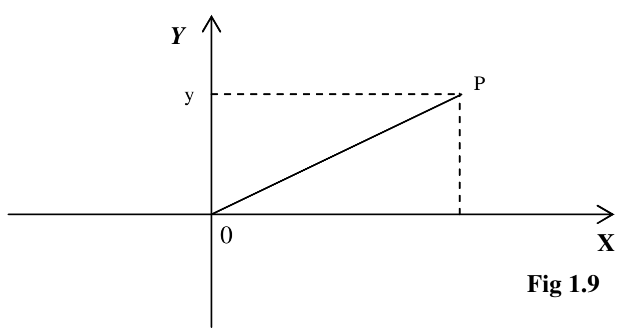



**Fig 1.9**

Nos referimos a P, indistintamente, como vetor P, ou vetor OP, ou par ordenado (x , y).

Podemos interpretar o vetor OP como uma translação da origem de x unidades ao longo de OX e de y unidades ao longo de OY, ou seja, OP define uma translação.

A motivação física para a definição de soma de pares ordenados e multiplicação de pares ordenados por números reais vem do problema de composição de forças na estática.

Se P é par ordenado do $\mathbf{R}^2$ de coordenadas (x , y) e $t \in \mathbf{R}$ , definimos tP como o par ordenado do $\mathbf{R}^2$ de coordenadas ( tx , ty), ou seja, tP é:

t (x, y) = ( tx , ty)

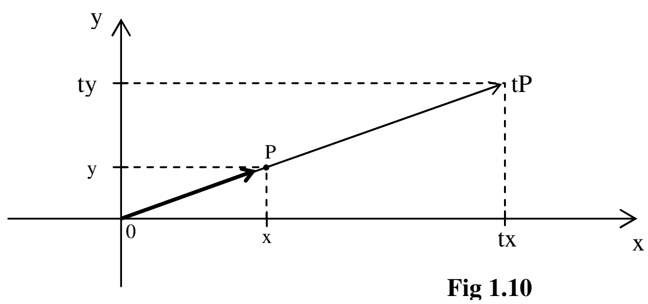



**Fig 1.10**

Obs : Se t > 1, tP é resultado de uma dilatação do vetor P. Se 0 < t < 1, tP é uma "contração" do vetor P e se t < 0 ? Bem, então temos uma mudança de sentido e uma "dilatação" se t < -1 e uma "contração" se -1 < t < 0.

Se P $(x_1 , y_1)$ e Q $(x_2 , y_2)$ são pares ordenados do $\mathbf{R}^2$, definimos por P + Q o par ordenado do $\mathbf{R}^2$ de coordenadas $(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$. Abreviadamente :

$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

Interpretação vetorial :

( i ) O, P e Q são colineares

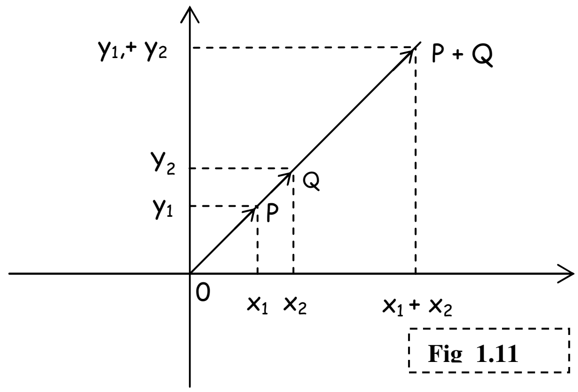



Fig 1.11

OBS: Adicionar Q ao P equivale a, partindo de P, “andar $x_2$ unidades para a direita”$(se\ x_2>0)$ e “$y_2$ unidades para cima” $(se\ y_2>0)$, ou seja, operamos em OP uma “translação” do vetor OQ. Assim a soma (ou adição) de vetores no plano equivale ao movimento de translação no plano.

( ii )

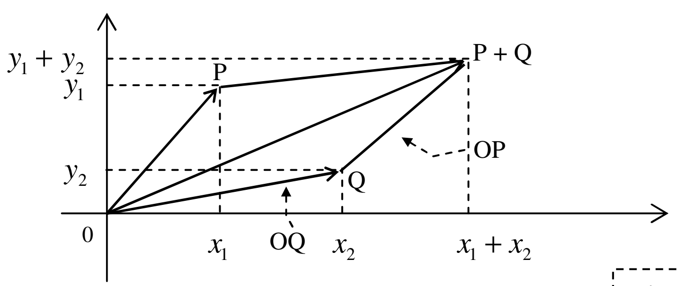



Fig 1.12

Se O, P e Q não são colineares, O, P, Q e P + Q são vértices de um paralelogramo.

Exercícios 1,1 :

a) Verifique : i) a soma de vetores no plano é comutativa.

ii) a soma de vetores no plano é associativa.

iii) a origem, ou seja, o vetor nulo (0 , 0) é neutro para a adição de vetores no plano.

b) -P é o simétrico de P. Interprete-o, geometricamente.

Exercício 1,2 :

Em cada caso obtenha algebricamente o vetor pedido e faça a interpretação geométrica no plano.

(i) 2 (-3 , 1) (ii) ½ (2 , 4) (iii) (3 , 1) + (2 , 3) (iv) (1 ,-2) + (2 ,-1)

## 1.6. Distância no Plano

Dados dois pontos $P_1$ $(x_1 , y_1)$ e $P_2$ $(x_2 , y_2)$ do plano, definimos $d(P_1 , P_2)$ ,a distância de $P_1$ a $P_2$ , como o número real dado por :

$$\mathbf{d}\,(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observemos o gráfico abaixo:

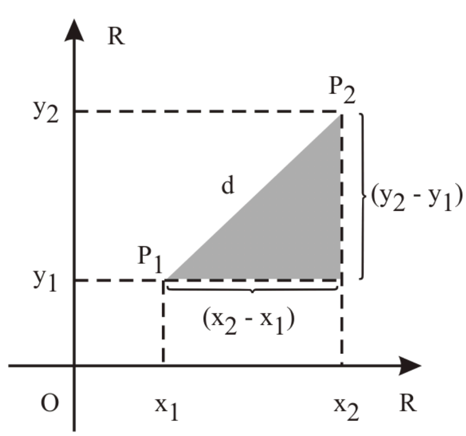



Fig. 1.13

Note que, do Teorema de Pitágoras : $\mathbf{d}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Obs : O comprimento de um vetor OP, em geral anotado por $\overline{OP}$ ou por |OP| é a distância de P ao 0. Assim, por exemplo, o comprimento do vetor OP ( -5 , 2) é :

$$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Exemplos:

1) Calcule a distância $d(P_1,P_2)$ onde $P_1 = (2 , 1)$ e $P_2 = (6 , -2)$.

Solução:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(2-6)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

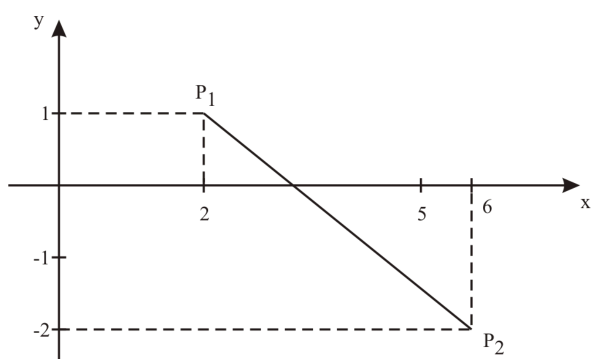



Fig. 1.14

2) Determine o comprimento (ou módulo) do vetor OP (3 , - 4)

$$\overline{OP} = \sqrt{9+16} = 5$$

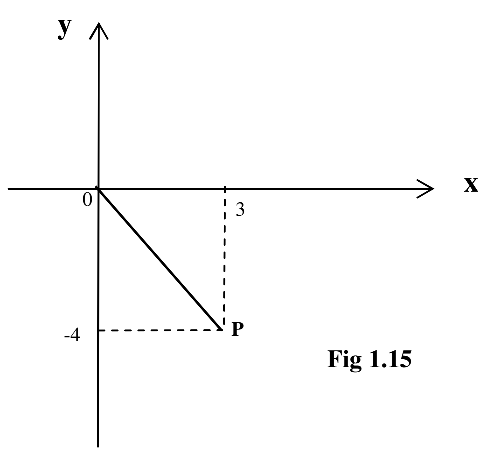



Fig 1.15

3) A circunferência $\mathbf{S^1}$ de centro 0 e raio 1 é o conjunto de todos os pontos P(x , y) do plano cuja distância à origem é 1. Descreva $\mathbf{S^1}$ em termos das coordenadas de seus pontos.

Solução :

Tem-s: $\mathbf{S^1} = \{P(x\,,\,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ d(P,0) = 1\} = \{P(x\,,\,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 1\}$,
ou $\mathbf{S^1} = \{(x\,,\,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 = \mathbf{1}\}$ e , em geral, $\mathbf{S^r} = \{(x\,,\,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 = \mathbf{r^2}\}$ .

Graficamente:

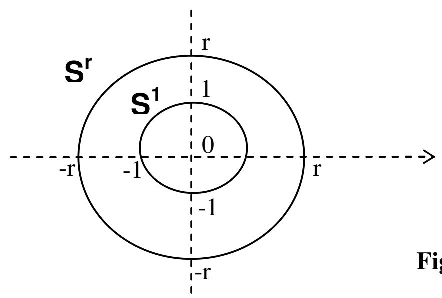



**Fig 1. 16**

OBS: 1. Assim, identificamos o conjunto dos pares (x , y) que verificam a equação : $x^2 + y^2 = \mathbf{1}$, com a circunferência $\mathbf{S^1}$ de centro em 0 e raio **1**, que é um caso particular da circunferência $\mathbf{S^r}$ de centro em 0 e raio **r,** que é descrita pela equação $x^2 + y^2 = \mathbf{r^2}$.

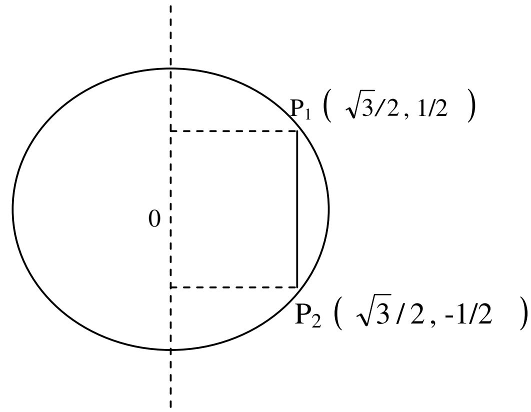
Exercício Resolvido:

Determine a(s) coordenada(s) **y** para que o ponto P pertença a $\mathbf{S^1}$ , sendo P($\sqrt{3}/2$ , **y**)

Solução:
Temos que $(\sqrt{3}/2)^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - 3/4 = 1/4 \rightarrow y = \pm 1/2$.

Assim: $P_1 = (\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2)$ e $P_2 = (\sqrt{3}/2\ ,- 1/2)$.

Graficamente:




De um modo geral, inúmeras e importantes figuras da geometria podem ser representadas por equações relacionando as coordenadas dos pontos P da figura num sistema de coordenadas. A <u>Geometria Analítica</u> é a parte da Matemática que estuda estas relações.

OBS: Admitiremos que o leitor tem noções sobre comprimento de uma circunferência. Portanto, usaremos o fato de que o comprimento da circunferência de raio 1 é $2\pi$ e que, em geral, o da circunferência de raio $r$ é $2\pi r$ .

## Aula 2

Nesta aula iniciamos, propriamente, o estudo da Trigonometria. Nela conceituamos os objetos geométricos ângulo e ângulo orientado. Definimos seno e cosseno de um ângulo e abordamos as duas mais usadas medidas de ângulo: o radiano e o grau, bem como a relação entre ambas.

### 2.1 INTRODUÇÃO:

**Trigonometria,** palavra de origem grega, encerra três radicais: *tri* $\equiv$ três, *gonos* $\equiv$ ângulos e *metron* $\equiv$ medir. Ou seja, "***trigonometria***" significa "***medida dos ângulos de um triângulo"***. Embora já bem conhecida dos babilônios e egípcios, ela foi muito desenvolvida pelos gregos, que tinham como motivação o estudo da astronomia, bem como a necessidade de maior precisão para os dados de navegação. Não só pelos gregos, mas também o interesse pela trigonometria entre hindus e árabes era devido à astronomia. A partir do Renascimento, época de expansão marítima européia, que exigia conhecimentos de Cartografia, a Trigonometria passou a ser utilizada em Cartografia e em Topografia. Na verdade, os gregos se iniciaram neste ramo da Matemática estudando triângulos sobre a superfície de uma esfera mas, para tanto, havia necessidade de que fosse desenvolvida uma trigonometria plana, assunto do nosso texto.

Observamos que, embora a sistematização do estudo da Trigonometria, como ramo destacado da matemática, tenha nascido há cerca de 120 a.C., ela está hoje presente em inúmeros campos das ciências exatas, da natureza e tecnológicas. Particularmente, no desenvolvimento de inúmeros problemas de Matemática, Física , Engenharia e Computação, ela assume papel fundamental. Em especial, a Análise Matemática beneficiou-se com importantes avanços a partir das "Séries de Fourrier", que são séries de funções em seno e cosseno, cuja relevância é por demais conhecida por todos aqueles que se dedicam às ciências que precisam da Matemática para o seu desenvolvimento.

O mais completo tratado de Trigonometria até o século XVI foi deixado por Rético (1514-1576) que o fez introduzindo a Trigonometria no triângulo retângulo. Ainda hoje, é no triângulo retângulo que é introduzido o estudo da trigonometria nas escolas. Para você, professor, não iniciaremos o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, mas o faremos na próxima aula.

## 2.2 CONCEITOS BÁSICOS:

O que é um **ângulo**? Um **ângulo** á a união de duas semi-retas que têm o ponto inicial comum.

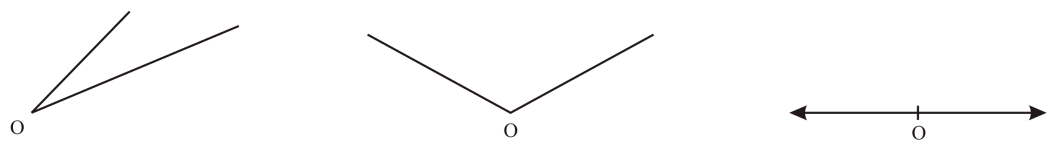



Fig. 2.1

As semi-retas são ditas **lados** e o ponto comum é dito **vértice** do ângulo. É usual anotarmos o ângulo por três de seus pontos: um ponto em cada um dos lados e o vértice, este anotado entre os dois outros. Quando não há possibilidade de confusão, um ângulo pode ser anotado por uma única letra do vértice. Exemplos AÔB ou Ô.

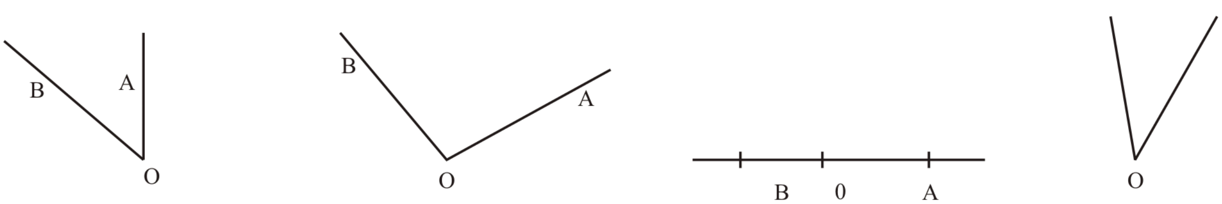
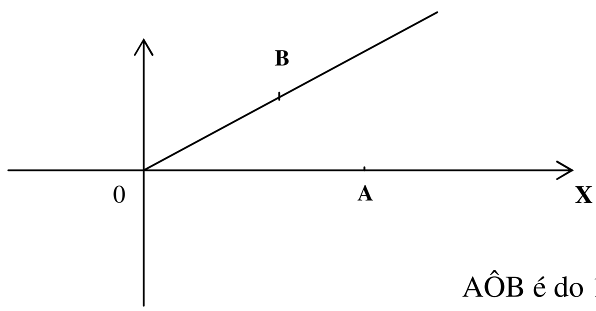



Fig. 2.2

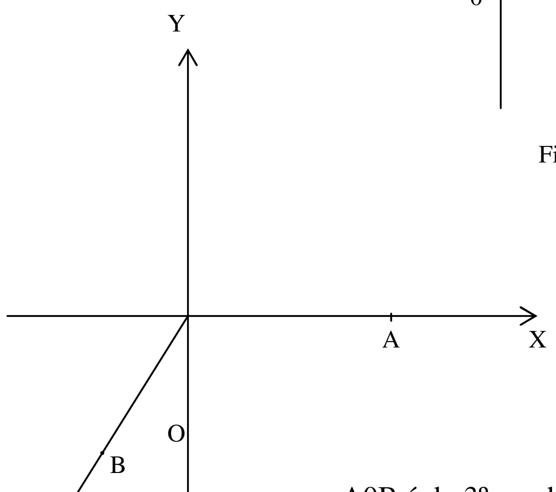
**<u>Orientando ângulos</u>**

O estudo da Geometria prescinde de orientação de ângulos, mas para o estudo da trigonometria, precisamos considerá-los com uma "orientação". Vamos nos referir aos ângulos AÔB segundo uma "orientação" de seus lados, que começa identificando o primeiro deles ao semi-eixo **real positivo** OX. O vértice será O e o ponto A estará sobre OX. Assim, para a descrição de um ângulo, será suficiente a descrição apenas de um lado, qual seja, OB. Um ângulo é dito do $1^o$, do $2^o$ do $3^o$ ou do $4^o$ quadrante, conforme OB seja semi-reta contida no respectivo quadrante.




AÔB é do 1º quadrante

Fig 2.3a




A0B é do 3º quadrante

Fig 2.3b

AOB será dito <u>positivo</u> se, para fazer OA coincidir com OB**,** giramos OA no **sentido contrário ao dos ponteiros do relógio** e <u>negativo</u> em caso contrário. Assim, uma mesma figura pode representar um ângulo positivo ou um negativo. Neste caso, como devemos informar ao nosso leitor a qual deles estamos nos referindo?

É usual, graficamente, apontarmos o sentido com uma seta, conforme as ilustrações seguintes.

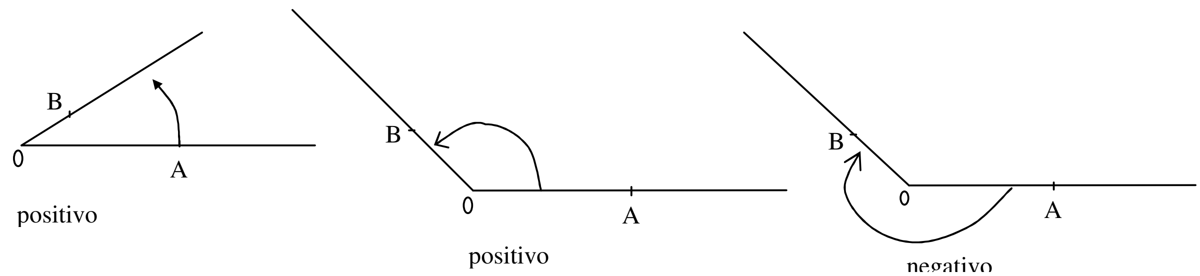



Fig 2.4

Tracemos agora a **circunferência** de centro em O e raio r = 1 que, daqui por diante, será anotada por **$S^1$** e referida como o **círculo trigonométrico**. É claro que qualquer semi-reta **t** de origem em O só cortará **$S^1$** uma vez.

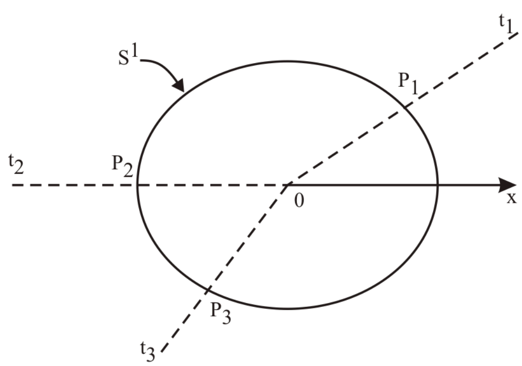



Fig 2.5

Anotando por A o ponto (1,0) da semi-reta ou semi-eixo OX, nosso ângulo orientado estará descrito por um ponto P de $\mathbf{S^1}$, ou seja, por P($\boldsymbol{a,b}$) tal que $\boldsymbol{a^2+b^2} = 1$.

Ver figuras abaixo:

.

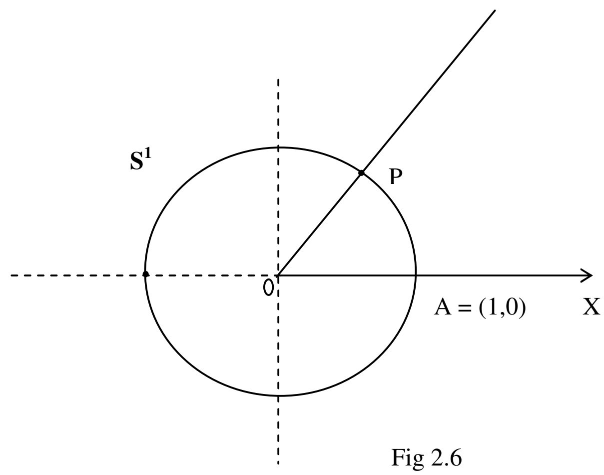



Fig 2.6

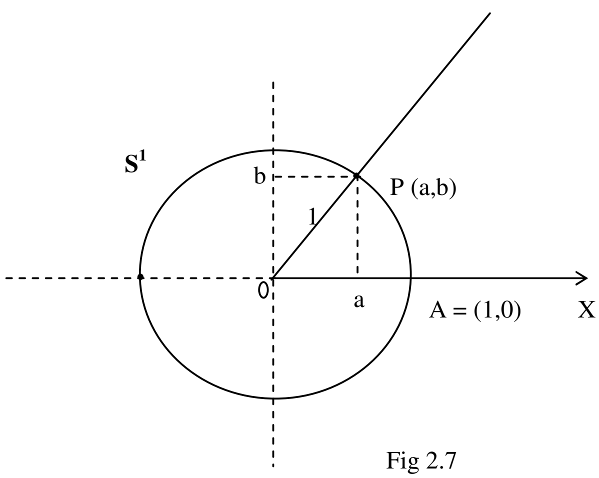



Fig 2.7

Obs: Daqui por diante omitiremos "orientado", pois todo ângulo será orientado.

2.3. O **seno** e o **cosseno** de um ângulo

Para o nosso ângulo AÔP, em que P(***a***,***b***) está sobre $\mathbf{S^1}$**,** independente de ser AÔP positivo ou negativo, definimos:

O **cosseno** de AÔP é ***a*** e o **seno** de AÔP é ***b*** e anotamos :

cos(AÔP) = ***a*** e sen(AÔP) = ***b***

Naturalmente, sendo P um ponto de $\mathbf{S^1}$ suas coordenadas ***a*** e ***b*** só podem variar no intervalo [ -1, 1 ], ou seja,

$$-1 \leq \cos(A\hat{O}P) \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \operatorname{sen}(A\hat{O}P) \leq 1$$

Exercícios 2.1:

Em cada caso, certifique-se de que P é ponto sobre $\mathbf{S^1}$ e determine o cosseno e o seno do ângulo AÔP :

i) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; ii) P = ( -1,0) ; iii) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; iv) $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

## 2.4. MEDIDAS DE ÂNGULO. A EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA.

Medida do ângulo em radiano

"Não havia, no período pré-helênico, o conceito de medida de ângulo. Encontramos, pela primeira vez, com os gregos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates ( -140 a.C). É provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua".

Bem, já sabemos definir cosseno e seno para **um ângulo**, mas queremos definir cosseno e seno para **um número real x** qualquer. Como fazer isto? Basta associar a este **x** um ângulo. Para tanto, apelaremos para a intuição pois, a rigor, precisaríamos do conceito matemático de "comprimento de arco", que foge ao caráter elementar do texto. Assim, intuiremos como comprimento de um arco a medida do fio flexível (mas não deformável ) que foi ajustado ao arco e depois esticado.

Exemplo:

Da Geometria Euclidiana, sabemos que $2\pi$ é o **comprimento da circunferência** (completa) $\mathbf{S^1}$ . Assim, por exemplo, se $x = \pi$ o ponto P a ser associado será aquele cujo arco AP, percorrido no sentido positivo, tenha comprimento $\pi$, ou seja,

$$P = (-1,0) ,$$

que é o extremo da semi-circunferência que se inicia em A = (1,0). O ângulo AÔP é dito de <u>meia volta</u> ou <u>raso</u> (Fig.2.8a), bem como ,

se **x** = $\frac{\pi}{2}$, P = (0,1) e o ângulo AÔP é dito reto (Fig 2.8b)

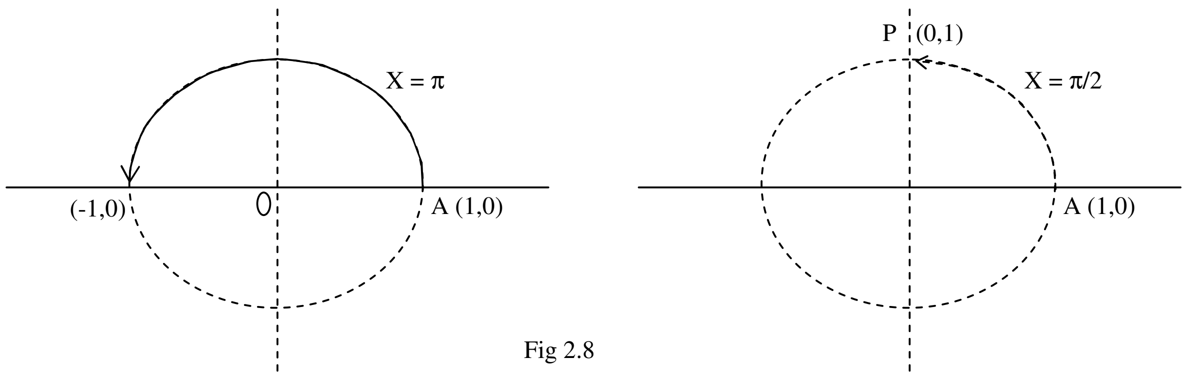



Fig 2.8

(a) (b)

<u>Exemplo 2:</u>

Se **x** é o número real $\frac{-\pi}{4}$, o ponto P associado será aquele cujo arco AP, percorrido no sentido **negativo**, tem comprimento $\left|\frac{-\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{4}$, ou seja, o ponto P estará, também, sobre a bissetriz do 4º quadrante (isto é, sobre a reta y = -x) e será $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ (fig 2.9)

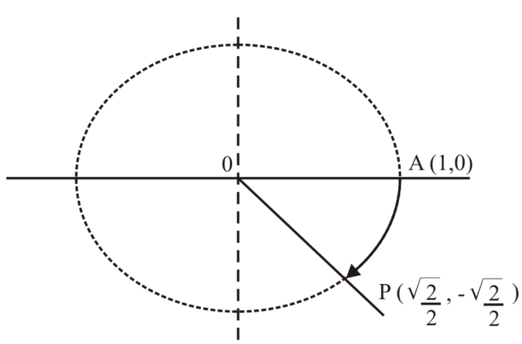



Fig 2.9

De um modo geral, dado **um número real $x \in R$** qualquer, associaremos a ele um ponto P de $\mathbf{S^1}$ assim:

P será o ponto sobre $\mathbf{S^1}$ tal que $|\mathbf{x}|$ seja o **comprimento** do arco do círculo que **começa em (1,0)** e que **se dirige** ao ponto P, no **sentido positivo**, se $\mathbf{x} > 0$ e no **sentido negativo**, se $\mathbf{x} < 0$.

Dizemos que o ângulo central AÔP associado ao número real **x** tem (por medida)

**x radianos**, abreviadamente, **x rd**.

Muitas vezes, por simplicidade omitimos "radianos" e, ao nos referirmos ao ângulo de **x** radianos, dizemos simplesmente "ângulo **x**". O número real **x** é dito a **medida em radianos** do ângulo AÔP. Assim, de acordo com os Exemplos, o <u>ângulo raso tem por medida $\pi$ rd</u> e o <u>ângulo reto tem por medida $\pi/2$ rd</u>

Observamos que se $\mathbf{x} > 2\pi$ , para obtermos o ponto P associado a **x** daremos mais de uma volta em $\mathbf{S^1}$ no sentido positivo e, se $\mathbf{x} < -2\pi$ , vale o análogo no sentido negativo.

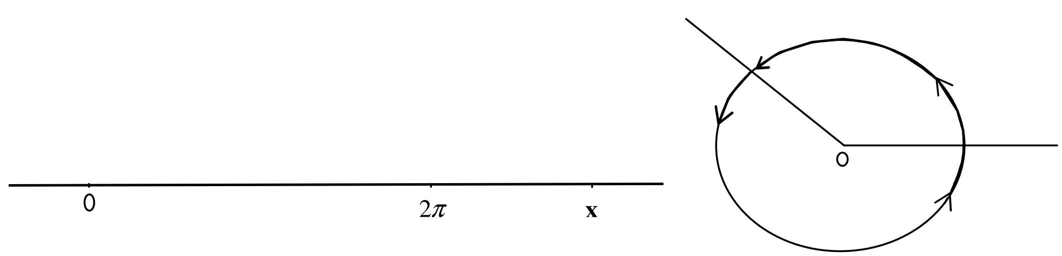



Fig.2.10

Observamos ainda que, se $0 \leq \mathbf{x} \leq 2\pi$, **x** é o comprimento do arco AP, ao ponto P ficam associados infinitos números reais, todos da forma:

$$\mathbf{x} + 2k\pi, \text{ com } k = 0, +1, -1, +2, -2, +3, .......$$

Dizemos que "os ângulos que têm ($\mathbf{x} + 2k\pi$) radianos" ou por simplicidade, "os ângulos ($\mathbf{x} + 2k\pi$)" são côngruos ou que estas são as várias determinações do ângulo AÔP, ou do arco AP, ou ainda do ângulo **x**. Sempre que $0 \leq \mathbf{x} < 2\pi$ , **x** é dito a **determinação principal do ângulo AOP** (ou do arco AP). Dada uma determinação de um ângulo, a obtenção de tal **x** é também referida como **redução** à primeira volta.

Obs: Das definições de seno e cosseno, resulta que:

(*) $\text{sen}(\mathbf{x}+ 2k\pi) = \text{sen}(\mathbf{x})$ e $\cos(\mathbf{x}+ 2k\pi) = \cos(\mathbf{x})$, $\forall k \in \mathbf{Z}$

Obs: É comum usar o sinal $\cong$ para indicar que os ângulos (ou arcos) são côngruos. Assim, quando escrevemos $\alpha \cong \beta$, estamos dizendo que $\alpha - \beta$ tem por medida um número inteiro de voltas.

Exercícios 2.2

a) Se $\mathbf{x} = 2\pi/5$, determine o quadrante de **x** , bem como dois ângulos côngruos com **x**, sendo um positivo e outro negativo.
b) Dê, em cada caso, o quadrante e a determinação principal do ângulo dado:
   i) $1230\pi$; ii) $-345\pi$ ; iii)$15\pi/2$ ; iv) $-32\pi/5$

Em resumo, das definições e observações estabelecidas obtemos que, dado um **número real x**, associamos a ele um ângulo que dizemos de **x** radianos ou **x** rd.

Com este entendimento, definimos o **cosseno** de **x** ( cosx ) como a **abscissa a** do ponto P associado a **x** e como **seno** de **x** ( senx ) a **ordenada b** do ponto P, isto é,

$$P = (\cos x, \text{sen} x).$$

Observamos que, assim definidas, seno e cosseno são funções reais definidas para todo número real **x** e vale :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \text{sen}(x) \leq 1 \quad \text{e}$$

(* ) $\text{sen}(\mathbf{x}+ 2k\pi) = \text{sen}(\mathbf{x})$ e $\cos(\mathbf{x}+ 2k\pi) = \cos(\mathbf{x})$ , $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$ e $\forall k \in \mathbf{Z}$

As identidades (*) nos dizem que as funções **seno** e **coseno** são periódicas com período $2\pi$, isto é, se conhecemos o comportamento dessas funções no intervalo $[0,2\pi]$ passamos a conhecê-las em todo o conjunto dos reais.

Naturalmente, como todo P = (**a**,**b**) em $\mathbf{S}^1$ verifica : $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 = 1$ , temos que

**(1)** $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}, \quad \cos^2(\mathbf{x}) + \text{sen}^2(\mathbf{x}) = 1$

**(1)** é dita a <u>Equação Fundamental da Trigonometria.</u>

<u>EXEMPLOS</u>:

1)Se **x** é o número real $\pi$, então o ponto P associado a $\pi$ tem coordenadas (-1,0), logo $\cos(\pi) = -1$ e $\text{sen}(\pi) = 0$ e se **x** é $\pi/2$ , P é o (0,1), logo $\cos(\pi/\mathbf{2}) = 0$ e $\text{sen}(\pi/\mathbf{2}) = 1$ (Fig(2.11))

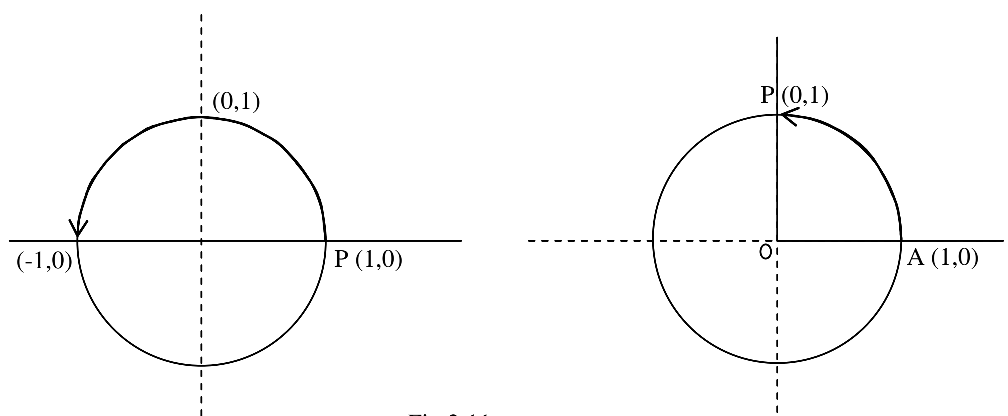



Fig 2.11

Se $\mathbf{x} = \dfrac{\pi}{4}$, então o ponto P de $\mathbf{S^1}$ é atingido ao se chegar à metade do arco de $\mathbf{S^1}$ contido no 1º quadrante, portanto P <u>também</u> está sobre a reta bissetriz deste quadrante, logo a abscissa **a** e a ordenada **b** de P são iguais e não negativas, o que significa que: $\mathbf{a} = \mathbf{b} \geq 0$ e $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 = 1$, logo $2\mathbf{a}^2 = 1$, portanto $\mathbf{b} = \mathbf{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, $\cos(\dfrac{\pi}{4}) = \text{sen}(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

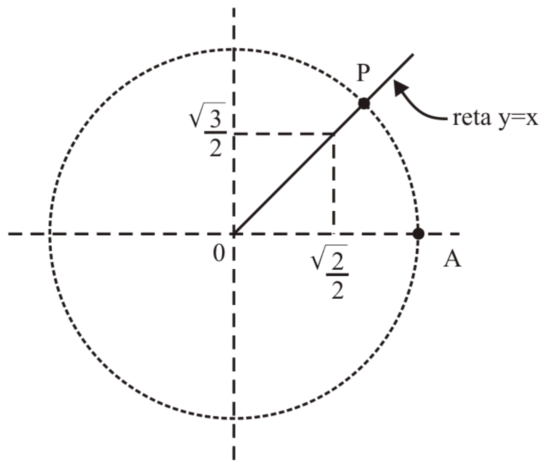



Fig. 2.12

**Atenção:** Na figura acima $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ao invés de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Exercício 2.3</u>:

Obtenha, por procedimento análogo ao do Exemplo acima, seno e cosseno dos ângulos cujas medidas (em radiano) são:

$x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$, $x = \pi$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$, $x = \dfrac{-\pi}{4}$, $x = \dfrac{-3\pi}{2}$,

$x = \dfrac{5\pi}{2}$, $x = \dfrac{-7\pi}{2}$.

Você já percebeu que, além de 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$ e $2\pi$, cujo seno e cosseno são de imediata identificação, também não há dificuldade em obter seno e cosseno dos arcos $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ e de seus simétricos em relação aos demais quadrantes.

Costumamos nos referir a esses arcos como arcos clássicos.

**Medida do ângulo em Grau**

No estudo de funções, a medida mais usada é o **radiano**, mas no estudo de Geometria a medida mais usada é o **grau**. Vamos agora estabelecer a medida de um ângulo em grau.

Consideremos o **número inteiro 180**. (Por que este número 180? Bem, não se tem absoluta certeza sobre o "porquê" da escolha de tal número, mas historicamente, há indícios bem significativos, conforme os relatados em (*) abaixo).

Ao ângulo de $\pi$ rd, ou seja, de meia volta, associamos este **número inteiro 180** e passamos a dizer que este ângulo tem 180 graus ou, abreviadamente, $180^o$. Feita esta associação, uma regra de três simples nos dá as equivalências abaixo:

$$\pi \text{ rd} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 180^o$$

$$1 \text{ rd} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{180^o}{\pi}$$

$$x \text{ rd} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ x.\ \frac{180^o}{\pi}$$

Em particular, o ângulo reto mede $\frac{\pi}{2}$rd = $90^o$ e o de volta inteira, $2\pi$ rd = $360^o$

.

De acordo com o que definimos, são côngruos os ângulos cujas medidas em graus diferem de $k360^o$. Em particular, são côngruos os ângulos de 0 graus e o de $360^o$

Assim, se dividimos a circunferência em 360 arcos congruentes, cada arco subentende um ângulo de $1^o$. Em problemas de precisão, trabalhamos com fração do grau, que é dividido em 60 partes iguais, cada uma das quais é dita "um minuto" e anotada por 1', o qual, por sua vez, é dividido em 60 partes iguais, cada qual dita "um segundo" , e anotada por 1".

Assim, por exemplo, $2^o\,3'10''$ são (2x60x60 + 3x60 + 10) segundos, isto é 7390" .

(*) Não se sabe bem quando penetrou na Matemática o uso sistemático do círculo de $360^o$ , mas parece dever-se (em grande parte) a Hiparco, através de sua tabela de cordas. É possível que Hiparco tenha se inspirado em Hipsicles que, anteriormente, tinha dividido o dia em 360 partes, talvez sugerido pela astronomia babilônica.

Obs: Em trabalhos técnicos, podemos obter a medida em graus de um ângulo, fazendo uso do transferidor, objeto em forma de semi-círculo, graduado em 180 partes iguais, cada uma das quais nos fornece $1^o$ .

<u>Exercícios Resolvidos</u> :

Em cada caso, obteve-se a medida de um ângulo AÔB. Se esta medida for em grau, converta-a para radiano e reciprocamente :

a) $15^o$

Ora, $1^o = (\frac{\pi}{180})$ rd, logo $15^o = 15(\frac{\pi}{180})$rd $= (\frac{\pi}{12})$rd

b) $\frac{\pi}{5}$rd

Também, 1 rd $= \frac{180^o}{\pi}$, logo $\frac{\pi}{5}$rd $= (\frac{\pi}{5})(\frac{180^o}{\pi}) = 36^o$

c) 300”

Bem, 300” = 5’ $= (\frac{5}{60})^o = (\frac{1}{12})^o = (\frac{1}{12})(\frac{\pi}{180})$ rd $= (\frac{\pi}{2160})$rd

d)$750^o$

$750^o = 750(\frac{\pi}{180})$ rd $= (4\pi + \frac{\pi}{6})$rd

EXERCÍCIOS 2.4:

1) Obtivemos as medidas em graus de alguns ângulos. Converta-as para radianos:

a) 20º b) 40º c) 160º d) $(-80)^o$ e) $(-120)^o$ f) $1280^o$ g) $10^o\,18'$

2) Obtivemos as medidas em radianos de alguns ângulos. Converta-as para graus:

a) $\frac{5\pi}{3}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{2\pi}{9}$ d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{4\pi}{3}$ f) $10\pi$ g) $\frac{4\pi}{15}$ h) $\frac{\pi}{36}$ i) $\frac{\pi}{5}$

3) Determine $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$ se $\theta$ tem por medida:

a) $180^o$ b) $45^o$ c) $-135^o$ d) $-750^o$ e) $3630^o$ f) $660^o$ g) $\frac{-\pi}{6}$ h) $\frac{2\pi}{3}$ i) $-102\pi$

O radiano e a circunferência de raio **r**

Até agora nos referimos somente à circunferência (orientada) $\mathbf{S^1}$,ou seja ao círculo trigonométrico, mas podemos trabalhar os mesmos conceitos com a circunferência de raio **r** ou $\mathbf{S^r}$

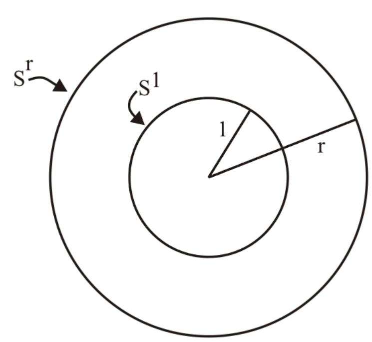



Fig. 2.13

Lembramos que os conceitos de semelhança da Geometria nos dão que duas circunferências são figuras semelhantes, logo $\mathbf{S^1}$ e uma circunferência de raio **r**, $\mathbf{S^r}$, são semelhantes e a razão de semelhança é **r**. Como conseqüência, o ângulo que determina sobre $\mathbf{S^1}$ um arco de comprimento $\boldsymbol{\theta}$ , determina sobre $\mathbf{S^r}$ um arco de comprimento $\boldsymbol{\theta}$**r** (Fig.2.14).

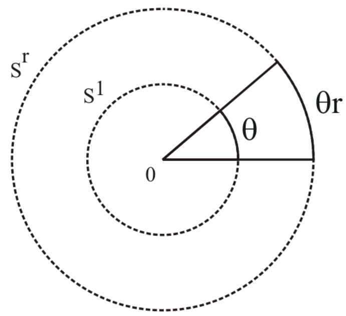



Fig. 2.14

Assim, em $\mathbf{S^r}$ um ângulo central de θ radianos subentende um arco cujo o comprimento é θ **vezes o raio,** portanto, $\boldsymbol{\pi}$**r** é o comprimento do arco subentendido pelo ângulo raso, na circunferência de raio **r** .Estamos dizendo, por exemplo, que se o comprimento de um certo arco AP de uma circunferência de raio **r** é ***s*** então o ângulo por ele subentendido tem:

$$(*)\quad \frac{s}{r}\,\text{rd}$$

Obs: i) A expressão (*) acima nos diz que a medida de um arco em radiano é aquela obtida quando tomamos o raio da circunferência como unidade. Em particular, quando se trata de $\mathbf{S^1}$, se o comprimento do arco AP é $\boldsymbol{\theta}$**,** então o ângulo por ele subtendido tem

$$\frac{\theta}{1}\ \text{rd , ou seja, } \boldsymbol{\theta}\ \text{rd.}$$

ii) Se **s** = **r** , o arco AP ou ângulo AÔP tem 1 radiano. Estamos dizendo que 1 radiano é a medida do ângulo que subentende um arco cujo comprimento é igual ao do raio do círculo (Fig.2.15)

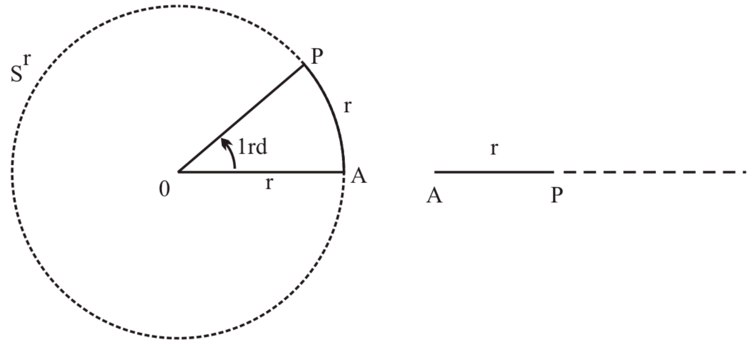


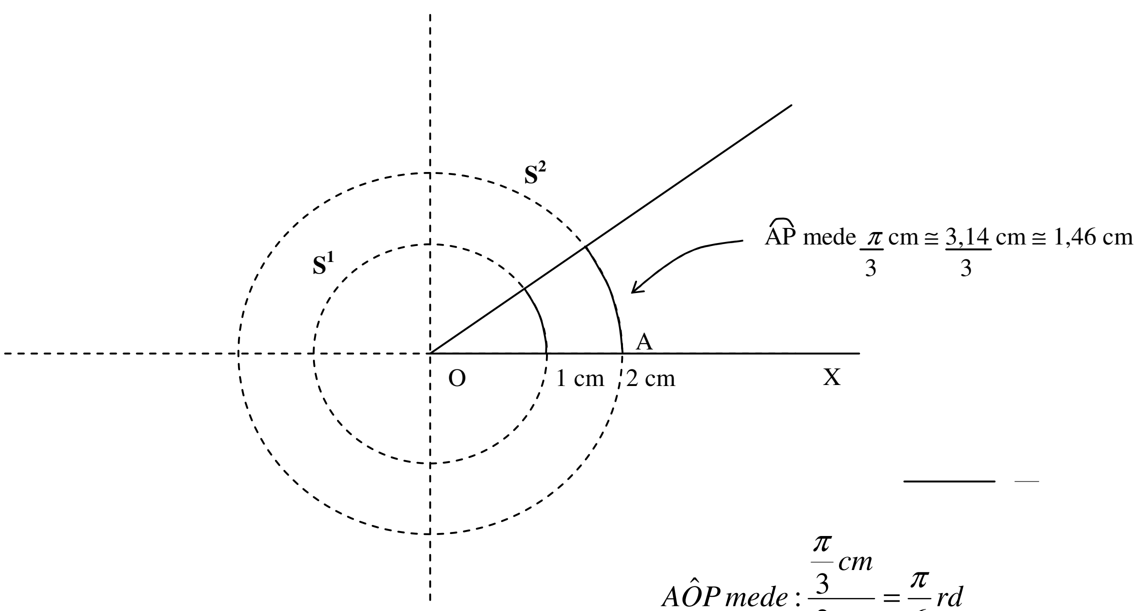

Fig. 2.15

iii) Note que a medida radiano não depende da medida de comprimento usada. Por exemplo,

$$\frac{scm}{rcm} = \frac{sm}{rm} = \frac{skm}{rkm} = \frac{s}{r}\text{, dito simplesmente } \frac{s}{r}\text{ radianos.}$$

<u>Exemplo:</u>

Se o arco AP de uma circunferência de raio **2** cm tem por comprimento π/3 cm (estamos supondo o cm como unidade de comprimento), então o ângulo central AOP mede (π/3) /2 rd, ou seja, π/6 rd




$$A\hat{O}P\,mede: \frac{\frac{\pi}{3}cm}{2\,cm} = \frac{\pi}{6}rd$$

Fig 2.16

A **tangente** de **x**

Agora, que esperamos ter deixado clara a associação entre um **número real x** e o ponto P de $\mathbf{S^1}$ a ele associado, bem como definido o seno e o cosseno deste **x**, definimos uma nova função que é a **tangente de x** (**tg(x)**), deste modo:

**(2)** tg(**x**) = sen(**x**)/cos(**x**) , se cos(**x**) $\neq$ 0

Exemplo:

Se sen (x) = ½ e cos (x) = $\sqrt{3}/2$ então tg (x) = ½ $\div$ $\sqrt{3}/2$ = $1/\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}/3$

Interpretação Geométrica da Tangente:

Seja $\theta$ um ângulo qualquer. Na figura (Fig 2.17) ilustramos com um $\theta$ do 1º quadrante. Consideremos a reta tangente ao ponto A(1,0) em $\mathbf{S^1}$ **.** É claro que esta reta é perpendicular ao eixo OX. Prolonguemos o segundo lado do ângulo $\theta$ (o primeiro é OA) até encontrar a já referida reta tangente e anotemos por T o ponto de interseção deste lado com esta reta, por B a interseção deste lado com $\mathbf{S^1}$ e por H o pé da perpendicular baixada de B até OX (ou seja, a coordenada x de B). Os triângulos retângulos OAT e OHB são semelhantes ( pois têm os três ângulos iguais). Desta semelhança e das definições de seno e de cosseno, resulta :

$$\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{AT}{OA},$$

mas OA= 1, pois o circulo tem raio 1 e $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = tg(\theta)$, portanto $tg(\theta)$ = AT.

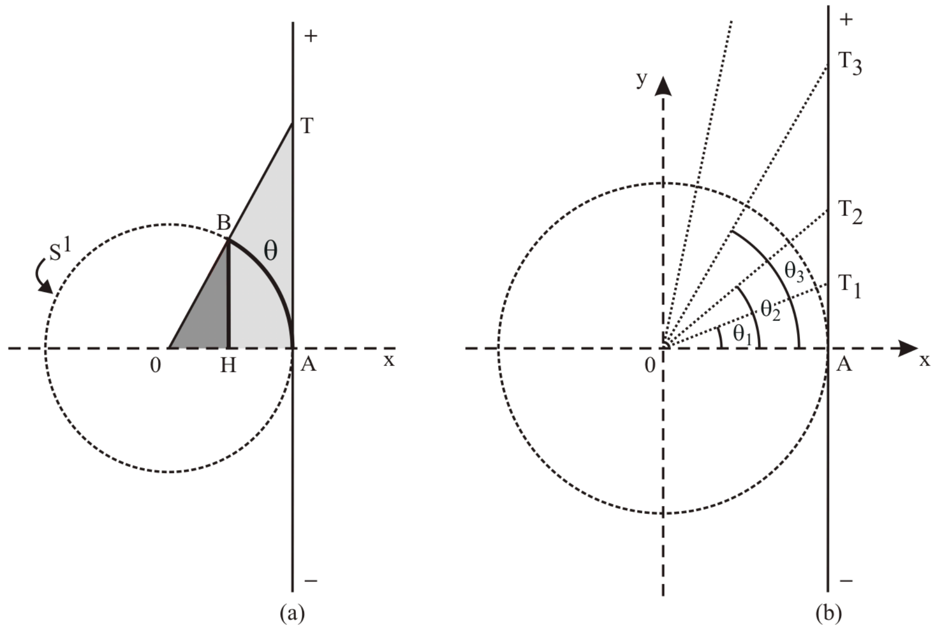



Fig. 2.17

Obs: A reta por A e T é dita o "eixo da tangente". Damos ao eixo da tangente um sentindo positivo acima de A e negativo abaixo de A. Note que se o arco é do 2º ou do 4º quadrante, teremos

cos ( θ ) e sen ( θ ) com sinais contrários, logo tg ( θ ) < 0; se o arco é do 1º ou 3º quadrante

cos ( θ ) e sen(θ) têm o mesmo sinal, logo tg (θ ) > 0, logo a orientação de sinal dada ao nosso eixo da tangente está coerente.

<u>EXERCÍCIO 2.5</u>:

i) Explore as simetrias entre as coordenadas dos pontos do plano, em relação aos primeiro e segundo quadrantes, para completar : seno , cosseno e tangente (quando esta existir) dos arcos clássicos desses dois quadrantes, cujas medidas em radiano são :

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}.$$

Para obtenção de uma útil tabela, complete o exercício acrescentando os valores destas funções para 0 e $\pi$.

ii) Faça o análogo ao item i) agora para os arcos clássicos ( $0 \leq x \leq 2\pi$) do terceiro e os do quarto quadrantes.

iii) Faça o mesmo exercício para os arcos simétricos ( $0 \geq x \geq -2\pi$) dos arcos de i) e de ii), ou seja, para $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$, etc...

iv) Obtenha ,em cada caso e <u>sempre que possível</u>, tg (x) para os arcos cujas medidas(*) são:

$$\frac{23\pi}{4},\ 315^o,\ \frac{-35\pi}{2},\ 7060^o,\ 25\pi,\ \frac{40\pi}{3},\ -3465^o,\ 3555^o,\ \frac{13\pi}{3}.$$

Quando necessário você fará uso do Teorema Pitágoras e do fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é $\pi$ rd ou $180^o$ .

(*) quando não há menção à medida, trata-se de rd

Obs: Os gregos calcularam muitos valores para seno, cosseno e tangente dispondo-os em tábuas trigonométricas que os matemáticos posteriormente melhoraram e ampliaram. Apresentamos uma tábua de valores trigonométricos (com <u>aproximação</u> até a terceira casa decimal) para cada ângulo $\theta$ cuja medida em graus é um número inteiro entre 1 e 89 .

Ver Tabela na próxima página:

# Tabela Trigonométrica

| Ângulo | sen | Cos | tg | Ângulo | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º | 0,017 | 1,000 | 0,017 | 46º | 0,719 | 0,695 | 1,036 |
| 2º | 0,035 | 0,999 | 0,035 | 47º | 0,731 | 0,682 | 1,072 |
| 3º | 0,052 | 0,999 | 0,052 | 48º | 0,743 | 0,669 | 1,111 |
| 4º | 0,070 | 0,998 | 0,070 | 49º | 0,755 | 0,656 | 1,150 |
| 5º | 0,087 | 0,996 | 0,087 | 50º | 0,766 | 0,643 | 1,192 |
| 6º | 0,105 | 0,995 | 0,105 | 51º | 0,777 | 0,629 | 1,235 |
| 7º | 0,122 | 0,993 | 0,123 | 52º | 0,788 | 0,616 | 1,280 |
| 8º | 0,139 | 0,990 | 0,141 | 53º | 0,799 | 0,602 | 1,327 |
| 9º | 0,156 | 0,988 | 0,158 | 54º | 0,809 | 0,588 | 1,376 |
| 10º | 0,174 | 0,985 | 0,176 | 55º | 0,819 | 0,574 | 1,428 |
| 11º | 0,191 | 0,982 | 0,194 | 56º | 0,829 | 0,559 | 1,483 |
| 12º | 0,208 | 0,978 | 0,213 | 57º | 0,839 | 0,545 | 1,540 |
| 13º | 0,225 | 0,974 | 0,231 | 58º | 0,848 | 0,530 | 1,600 |
| 14º | 0,242 | 0,970 | 0,249 | 59º | 0,857 | 0,515 | 1,664 |
| 15º | 0,259 | 0,966 | 0,268 | 60º | 0,866 | 0,500 | 1,732 |
| 16º | 0,276 | 0,961 | 0,287 | 61º | 0,875 | 0,485 | 1,804 |
| 17º | 0,292 | 0,956 | 0,306 | 62º | 0,883 | 0,469 | 1,881 |
| 18º | 0,309 | 0,951 | 0,325 | 63º | 0,891 | 0,454 | 1,963 |
| 19º | 0,326 | 0,946 | 0,344 | 64º | 0,899 | 0,438 | 2,050 |
| 20º | 0,342 | 0,940 | 0,364 | 65º | 0,906 | 0,423 | 2,145 |
| 21º | 0,358 | 0,934 | 0,384 | 66º | 0,914 | 0,407 | 2,246 |
| 22º | 0,375 | 0,927 | 0,404 | 67º | 0,921 | 0,391 | 2,356 |
| 23º | 0,391 | 0,921 | 0,424 | 68º | 0,927 | 0,375 | 2,475 |
| 24º | 0,407 | 0,914 | 0,445 | 69º | 0,934 | 0,358 | 2,605 |
| 25º | 0,423 | 0,906 | 0,466 | 70º | 0,940 | 0,342 | 2,747 |
| 26º | 0,438 | 0,899 | 0,488 | 71º | 0,946 | 0,326 | 2,904 |
| 27º | 0,454 | 0,891 | 0,510 | 72º | 0,951 | 0,309 | 3,078 |
| 28º | 0,469 | 0,883 | 0,532 | 73º | 0,956 | 0,292 | 3,271 |
| 29º | 0,485 | 0,875 | 0,554 | 74º | 0,961 | 0,276 | 3,487 |
| 30º | 0,500 | 0,866 | 0,577 | 75º | 0,966 | 0,259 | 3,732 |
| 31º | 0,515 | 0,857 | 0,601 | 76º | 0,970 | 0,242 | 4,011 |
| 32º | 0,530 | 0,848 | 0,625 | 77º | 0,974 | 0,225 | 4,332 |
| 33º | 0,545 | 0,839 | 0,649 | 78º | 0,978 | 0,208 | 4,705 |
| 34º | 0,559 | 0,829 | 0,675 | 79º | 0,982 | 0,191 | 5,145 |
| 35º | 0,574 | 0,819 | 0,700 | 80º | 0,985 | 0,174 | 5,671 |
| 36º | 0,588 | 0,809 | 0,727 | 81º | 0,988 | 0,156 | 6,314 |
| 37º | 0,602 | 0,799 | 0,754 | 82º | 0,990 | 0,139 | 7,115 |
| 38º | 0,616 | 0,788 | 0,781 | 83º | 0,993 | 0,122 | 8,144 |
| 39º | 0,629 | 0,777 | 0,810 | 84º | 0,995 | 0,105 | 9,514 |
| 40º | 0,643 | 0,766 | 0,839 | 85º | 0,996 | 0,087 | 11,430 |
| 41º | 0,656 | 0,755 | 0,869 | 86º | 0,998 | 0,070 | 14,301 |
| 42º | 0,669 | 0,743 | 0,900 | 87º | 0,999 | 0,052 | 19,081 |
| 43º | 0,682 | 0,731 | 0,933 | 88º | 0,999 | 0,035 | 28,636 |
| 44º | 0,695 | 0,719 | 0,966 | 89º | 1,000 | 0,017 | 57,290 |
| 45º | 0,707 | 0,707 | 1,000 | | | | |

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**1.** Converta de grau para radiano e, reciprocamente, as medidas:

a) 45º ; b) 210º ; c) 67º 30\` ; d) - ( 41º 15') ; e) $\frac{2\pi}{3} rd$ ;

f) $\frac{11\pi}{6} rd$ ; g) $-\frac{3\pi}{8} rd$ ; h) $\frac{\pi}{5} rd$

**2.** Determine o comprimento do arco correspondente a um ângulo central de 60º,

a) Numa circunferência de raio 1cm.

b) Numa circunferência de raio 3cm.

**3.** Determine, em radianos, a medida do ângulo central correspondente a um arco de comprimento 15cm, numa circunferência de raio 3cm.

**4.** O ponteiro dos minutos de um relógio de parede mede 12cm. Quantos centímetros sua extremidade percorre em 25 minutos?

**5.** Escreva a expressão geral dos arcos congruentes a:

a) 60º ; b) 120º; c) 300º; d) $\frac{5\pi}{4} rd$ ; e) $\frac{2\pi}{3} rd$ ; f) $\frac{11\pi}{6} rd$

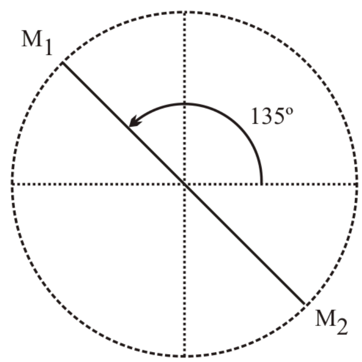
**6.** Explicite a 1ª determinação, ou seja, o menor valor não negativo côngruo ao arco de:

a) 850º; b) 93º; c) – 420º; d) $\frac{9\pi}{2} rd$ ; e) $\frac{23\pi}{6} rd$ ; f) - $\frac{17\pi}{3} rd$ .

**7.** Escreva a expressão geral dos arcos congruentes a:

a) 800º ; b) 1680º ; c) $\frac{25\pi}{4} rd$ ; d) $-\frac{33\pi}{5} rd$

**8.** Considere a figura abaixo e determine a expressão geral em radianos dos arcos de extremidade M1 e M2




**9.** Com apoio da tabela de valores trigonométricos ao final da aula 2 , determine seno, cosseno e tangente dos arcos cujas medidas são:

a) 100º ; b) 230º ; c) 107º ; d) 355º ; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) $-\frac{11\pi}{9}$

## Aula 3.

A aula 3 tem por objetivo abordar, criticamente, o desenvolvimento do tema trigonometria do modo como ele é apresentado na grande maioria dos textos do Ensino Médio. Nestes textos, conforme historicamente ocorreu, a trigonometria é iniciada no triângulo retângulo, onde se definem seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, com base na semelhança de triângulos. Nesta aula também faremos assim e você verá que estas definições coincidem com a que você já viu na aula 2. Nos referidos textos, estas funções e suas propriedades, até então estabelecidas só para ângulos agudos, são estendidas, posteriormente, a quaisquer números reais. Optamos, nesta aula, por fazer um "passeio" por estes livros, comentando a seqüência, em geral, seguida por eles, mas sem os detalhes, posto que continuamos provando, rigorosamente, todas as importantes identidades e relações, nas aulas que se seguem.

### 3.1 O Seno, O Cosseno, A Tangente e Os Triângulos Retângulos.

A maioria dos textos e, em particular os livros do ensino médio, iniciam o estudo da trigonometria no triângulo **retângulo**, definindo **seno** , **cosseno** e **tangente**, através das relações entre os lados deste triângulo.

Historicamente, as funções seno e cosseno foram definidas para ângulos agudos de um triângulo retângulo e só posteriormente, estendidas para ângulos quaisquer. Observamos que a construção geométrica dessas funções só foi possível depois de estudadas as semelhanças de triângulos. Naturalmente, os critérios de semelhança estudados nos ensinos fundamental e/ou médio nunca são bem justificados. Até mesmo no ensino superior eles são, em geral, incompletos, o que dificulta a compreensão das relações trigonométricas.

Deste modo, admitimos apenas que o estudante conhece os conceitos de semelhança de triângulos, suficiente para uma trigonometria no triângulo retângulo, a qual, por trabalhar apenas com os ângulos agudos deste triângulo ( ou seja, com $0 < \theta < 90^o$ ), prescinde de orientação.

Consideremos o **triângulo retângulo** AOB como na figura:

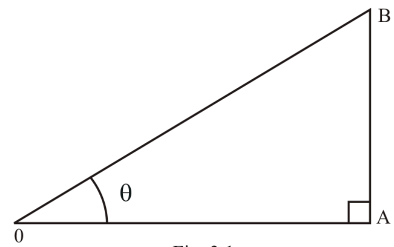



Fig. 3.1

Por simplicidade, anotamos o ângulo AÔB por θ e o indicamos como na Fig3.1 acima.

Consideremos os pontos quaisquer $B_1$, $B_2$, $B_3$.... sobre a semi-reta OB e, respectivamente $A_1$, $A_2$, $A_3$ ...sobre a semi-reta OA tais que AB// $A_1B_1$// $A_2B_2$// $A_3B_3$//...

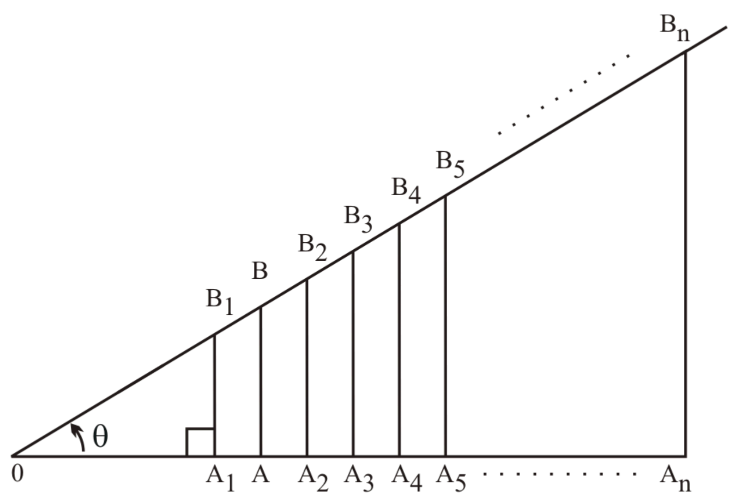



Fig. 3.2

A semelhança dos triângulos retângulos (com o mesmo ângulo agudo θ) AOB, $A_1OB_1$, $A_2OB_2$ ,$A_3OB_3$,... nos diz que:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = ........$$

Ou seja, a razão $\frac{A_iB_i}{OB_i}$ é o mesmo número, ou seja, é **constante** : independe do triângulo $OA_iB_i$, mas só depende do ângulo **θ** . Este número (esta **constante**) é chamado de **seno de θ**. Tal definição coincide com a que demos na aula 2, pois se fazemos OA coincidir com OX, interceptando a semi-reta OB com $\mathbf{S^1}$, obtemos o ponto P(**x,y**) ( que faz o "papel" de um $B_i$ tal que $OB_i = 1$, $A_iB_i = y$ e $OA_i = x$), e verificamos que:

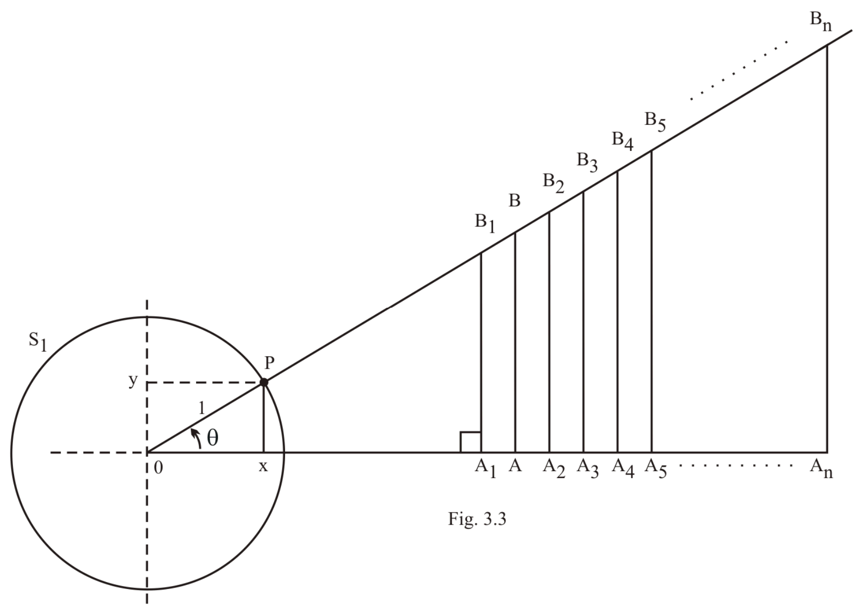



Fig. 3.3

$\frac{AB}{OB} = \frac{y}{1} =$ y = sen ( θ ), ou seja, o cateto $A_lB_l$ dividido pela hipotenusa $OB_l$ é o sen (θ).

Analogamente é constante o quociente do cateto $OA_i$ (adjacentes ao ângulo θ) dividido pela respectiva hipotenusa $OB_i$ ,qualquer que seja o i. Tal constante é o cos(θ) . Observe da Fig 3.3 que em particular :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{x}{1} = \cos(\theta)$$

Continuando com as propriedades da semelhança dos triângulos, temos que :

$$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x} = \frac{AB}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \text{.........}$$

Assim, este número tg (θ) não depende dos pontos $A_1$ , $A_2$, ...., $B_1$, $B_2$, ... mas sim do ângulo θ e ele é dito a **inclinação da reta OB**.

Podemos resumir o que expusemos até agora dizendo que, em geral, se **b** e **c** são catetos de um triângulo retângulo e **a** é a hipotenusa, como na figura (onde **b** é oposto ao ângulo θ) ficam bem definidos:

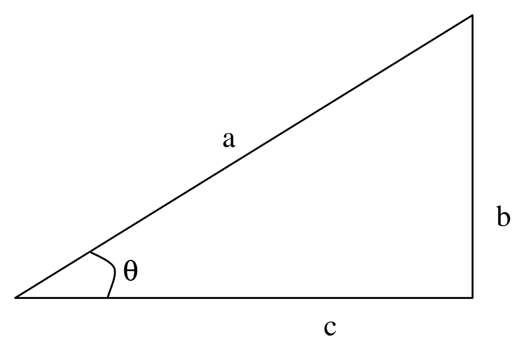



Fig 3.4

sen (θ) = $\frac{cateto \cdot oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$ ou **b** = **a** sen θ

cos (θ) = $\frac{cateto \cdot adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$ ou **c** = **a** cos θ e,

tg (θ) = $\frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a} \div \frac{c}{a} = \frac{b}{c}$ , ou seja, tg (θ) = $\frac{cateto \cdot oposto}{cateto \cdot adjacente}$

De acordo com as identidades acima, poderíamos ter dado início ao estudo da trigonometria no triângulo retângulo (e é usual faze-lo no ensino médio) definindo seno, cosseno e tangente do ângulo agudo, através destas identidades. Como já observamos, historicamente, assim foram definidas estas relações que viriam a ser estendidas para as atuais funções trigonométricas.

Obs: Sendo a soma dos ângulos internos de um triângulo 180°, a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo é 90°. Eles são ditos complementares e da nossa definição, resulta que

$$\text{sen } (90\text{-}\theta) = \frac{c}{a} = \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \cos(90\text{-}\theta) = \frac{b}{a} = \text{sen } \theta.$$

Estamos dizendo que o cosseno de um arco é o seno do seu complemento e que o seno do arco é o cosseno do seu complemento.

A relação $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, poderia, então, ser provada usando as relações obtidas e o Teorema de Pitágoras:

$$\text{sen}^2(\theta). + \cos^2(\theta) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2}\right) = 1,$$

que é a <u>Identidade</u> ( ou Equação) <u>Fundamental da Trigonometria</u>, ou seja, a nossa identidade (**1**) da aula 2.

Observamos que, até o momento em que só estamos no triângulo retângulo, podemos apenas afirmar que $0 < \text{sen}(\theta) < 1$ e $0 < \cos(\theta) < 1$, pois tais funções foram definidas (nesta aula 3) como números que representam quocientes das medidas dos catetos de um triângulo retângulo pela hipotenusa, portanto são números entre 0 e 1.

<u>Exemplo:</u> Seja ABC triângulo retângulo com AB = 3, AC = 4 e BC = 5. Tem-se que $\frac{3}{5}$ é o seno de ACB = cosseno de ABC, bem como $\frac{4}{5}$ é o cosseno de ACB = seno de ABC (Fig 3.5)

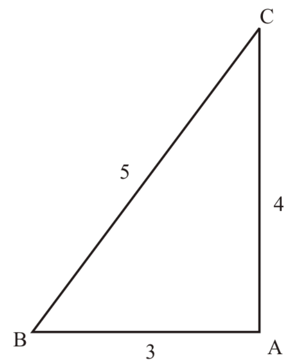



Fig. 3.5

Exemplo: Um avião levanta vôo em um ponto O e sobe fazendo um ângulo constante de 15º com a horizontal. A que altura estará e que distância terá percorrido quando sobrevoar uma torre situada a 2 km do ponto de partida? (Considere sen (15º) = 0,26, cos (15º) = 0,97 e tg (15º) = 0,27)

Solução:

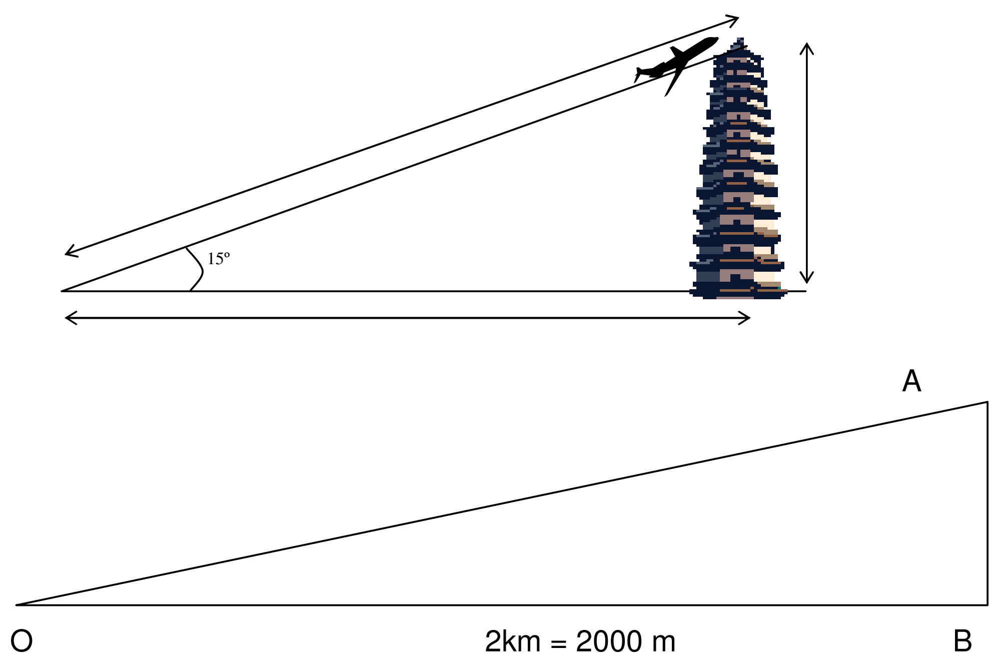



Fig 3.6

De acordo com os dados, a altura será a medida do cateto oposto ao ângulo de 15º no triângulo retângulo OAB, cujo cateto adjacente ao ângulo mede 2 km = 2000m, bem como a distância percorrida pelo avião ao sobrevoar a torre é a medida da hipotenusa OA de OAB, conforme indicado na figura acima.

Assim, temos:

$$\text{tg } (15^\circ) = \frac{AB}{2000}, \text{ ou seja, } AB = 2000\times 0{,}27 = 540 \text{ m},$$

Bem como:

$$\text{sen } (15^\circ) = \frac{540}{OA}, \text{ ou seja, } OA = 540 \div \text{sen } (15^\circ) =$$

$$= 540 \div 0{,}26 \cong 2.076{,}92\text{m}$$

portanto o avião estará a uma altura de 540m e terá percorrido 2.076,92m ao sobrevoar a torre.

Bem, continuando com nossa apresentação nos termos do ensino fundamental, após a definição das funções **seno, cosseno e tangente** para ângulos agudos, o passo seguinte é defini-las para ângulos não necessariamente agudos. De que modo?

Podemos então, considerar um sistema de eixos cartesianos de origem O e o círculo trigonométrico $\mathbf{S^1}$ , a cujo arco associamos o número 360, dizendo que $\mathbf{S^1}$ tem por medida 360º. Estamos dizendo que o arco que começa em A e, acompanhando o sentido dos ponteiros do relógio, retorna ao ponto A, tem por medida 360º. Ao dividirmos o círculo em quatro quadrantes, sempre que AÔB é agudo, o arco AB é do primeiro quadrante, pois a medida de AÔB em graus está entre 0º e 90º, portanto AÔB é ângulo de um triângulo retângulo, como na figura abaixo. Para tal ângulo já estão definidos: seno, cosseno e tangente.

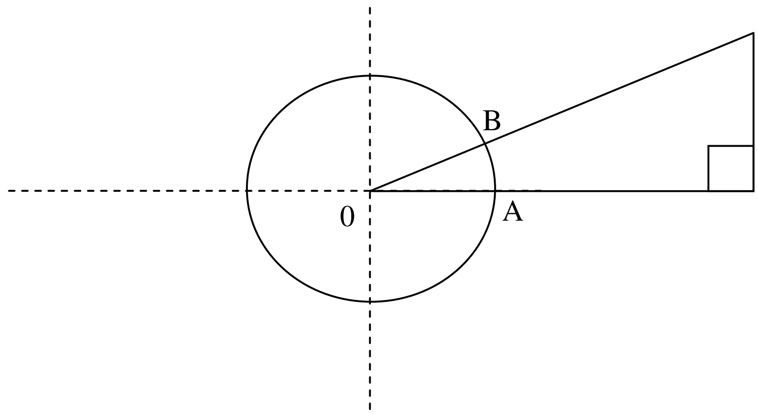



Fig 3.7

Suponhamos agora que o ângulo AÔB <u>não é agudo</u>, ou seja, a extremidade B não está no primeiro quadrante. Estamos dizendo que AB é um arco de $\mathbf{S^1}$ que começa em A e cuja extremidade B não está no 1º quadrante. Sua medida está entre 0 e 360, ou de modo abreviado, omitindo a palavra medida: 0 ≤ AÔB ≤ 360, mas não verifica O < AÔB < 90. Consideremos primeiro os casos particulares em que:

1. A = B, isto é, o ângulo AÔB tem 0º ou 360º ; definimos

   sen (0º) = sen (360º) = 0 e cos (0º) = cos (360º) = 1.
2. AÔB tem 90º ; definimos sen (90º) = 1 e cos (90º) = 0.
3. AÔB tem 180º ; definimos sen (180º) = 0 e cos (180º) = -1.
4. AÔB tem 270º ; definimos sen (270º) = -1 e co (270º) = 0.

Retornemos ao caso geral <u>não agudo</u>, separando os casos:

- A extremidade B está no segundo quadrante:

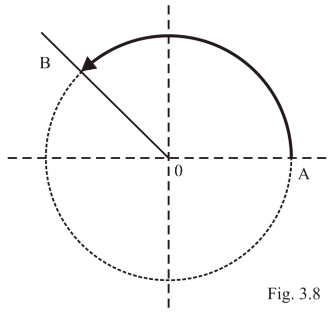



Fig. 3.8

Neste caso, a medida de AÔB é maior que 90 e menor que 180º. Tal ângulo é dito obtuso: 90<AÔB<180.

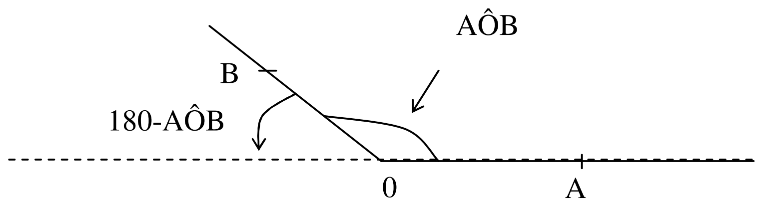



Fig 3.9

Mas então, o ângulo (180-AÔB) é agudo. Definimos sen (AÔB) como o seno do ângulo (180-AÔB) e cos (AÔB) como o simétrico do cosseno do ângulo (180-AÔB) ou seja,

cos (AÔB) = - cos (180-AÔB).

Acompanhe na figura, convencendo-se de que esta é uma definição bem natural.

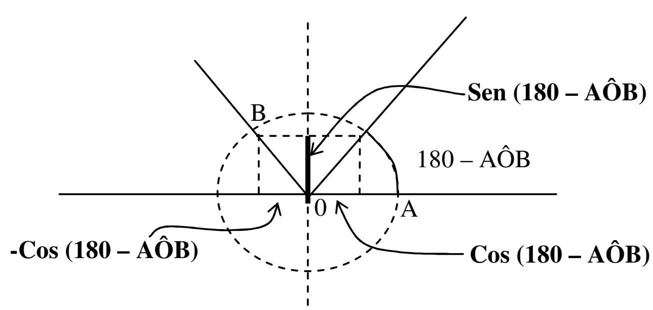



Fig 3.10

- A extremidade B está no 3º quadrante:

Neste caso, AÔB mede mais de 180º e menos de 270º, logo é igual a 180º mais $\theta$, onde $\theta$ é ângulo agudo. A reta que passa por B e O, ao interceptar $\mathbf{S^1}$ em B', por ser AOB' = $\theta$, sugere a definição:

sen (AÔB) = - sen ($\theta$) e cos (AÔB) = - cos ($\theta$).

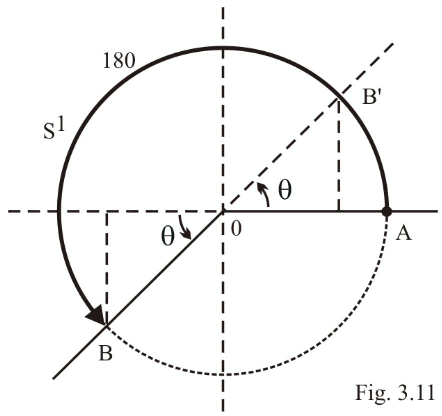


Fig. 3.11

iii) A extremidade B está no 4º quadrante:

Neste caso, AÔB, mede mais de 270º e menos de 360º, logo mede (360 - $\theta$)º onde $\theta$ é $0 < \theta < 90$. De novo, uma simples observação na figura sugere definir:

sen (AÔB) = - sen ($\theta$) e cos ( AOB) = cos ($\theta$).

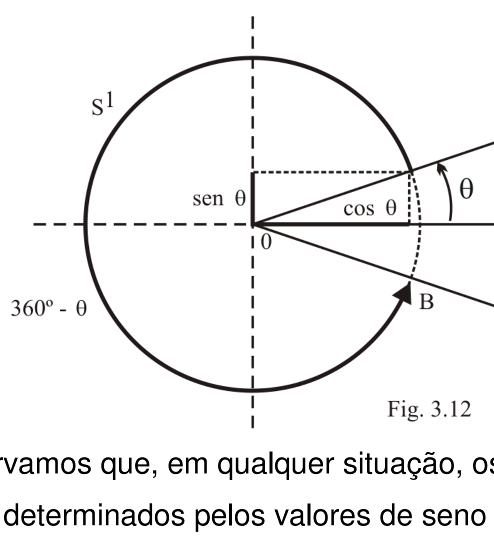


Fig. 3.12

Observamos que, em qualquer situação, os valores absolutos de seno e cosseno estão determinados pelos valores de seno e cosseno dos ângulos agudos, ou seja, dos ângulos do primeiro quadrante.

Até aqui, estão definidos seno e cosseno para ângulos $0^o \leq \theta \leq 360^o$. O passo seguinte é definir as referidas funções para qualquer número real x (ou seja, para qualquer ângulo cuja medida em graus seja $x^o$), de modo que elas sejam periódicas.

Naturalmente, todo número real x pode ser escrito como: $x = 360.K + \theta$, onde $k \in Z$ e $0 \leq \theta \leq 360$. Como seno e cosseno já estão definidas para tal $\theta$, definimos:

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(360.k + \theta) = \text{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad \cos(x) = \cos(360.k + \theta) = \cos(\theta)$$

Com as definições e identidades até aqui estabelecidas, você já poderá destacar as principais conclusões:

- As funções seno e cosseno são periódicas, de período 360, posto que

  $\text{sen}(360.k + \theta) = \text{sen}(\theta)$ e $\cos(360.k + \theta) = \cos(\theta)$

- $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

- $\text{sen}(90-\theta) = \cos(\theta)$ e $\cos(90-\theta) = \text{sen}(\theta)$, ou seja,

  o seno de um arco é o cosseno do seu complemento e o cosseno de um arco é o seno de seu complemento.

- $\text{sen}(180 - \theta) = \text{sen}(\theta)$ e $\cos(180-\theta) = -\cos(\theta)$, ou seja,

  o seno de um arco é o seno de seu suplemento e o cosseno de um arco é simétrico ao cosseno do seu suplemento

- Fixando-se o intervalo (0, 180), observamos que tanto a função seno como a cosseno são positivas em (0, 90) e que em (90, 180) seno é positiva e cosseno é negativa.

Você já pode, através de exercícios, deduzir os valores de seno e cosseno dos ângulos

$\theta = 60$, $\theta = 45$ e $\theta = 30$, por exemplo.

Obs 1: O que desenvolvemos nesta aula com a medida dos ângulos em graus, poderíamos tê-lo feito com a medida em radiano.

Obs 2: Observamos, na introdução desta aula, que faríamos um "passeio" pelos livros do currículo fundamental. Este "passeio" remeteria, a partir deste instante e em quase todos os referidos livros, a demonstrar a "Lei dos Cossenos" e a "Lei dos Senos", impondo restrições sobre as medidas dos ângulos. As demonstrações que damos para estas leis são válidas para medidas quaisquer e estão na aula 5.

Obs 3: Em seguida, seguiria como Corolário o seno da soma de dois arcos $\theta_1$ e $\theta_2$,

"positivos e com $\theta_1 + \theta_2 < 180$", qual seja: $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1)$

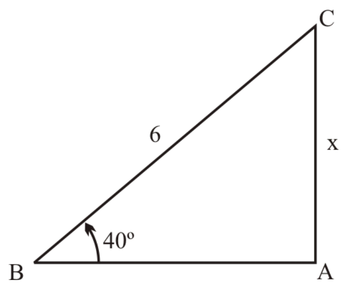
Fazemos na nossa aula 5 esta demonstração (com todo cuidado) e mostramos que esta identidade é válida para quaisquer valores reais, ou seja, independente de ser $(\theta_1 + \theta_2) < 180$. Naturalmente, nos textos onde é demonstrada a identidade com a restrição acima, é uma outra etapa a da extensão para quaisquer outros valores.

Bem, a partir deste ponto, poderiam ser deduzidas todas as identidades trigonométricas, em especial, a do cosseno da soma. Faremos todas as demonstrações das já referidas identidades e leis sem restrição às medidas dos ângulos, a partir da próxima aula.

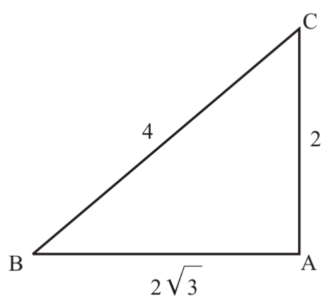
Façam os exercícios propostos abaixo:

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

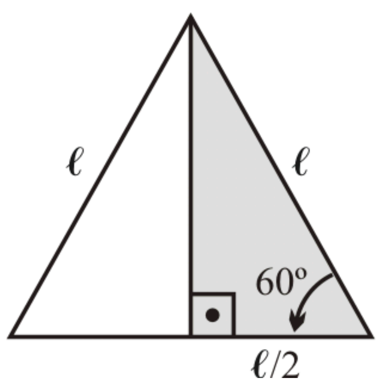
**1.** Considere o triângulo retângulo abaixo e com o auxílio da tabela ao final da aula 2, Determine *x*:




**2.** Determine seno, cosseno e tangente do ângulo B da figura abaixo:




**3.** Calcule sen 60º, cos 60º e tg 60º, a partir do triâgulo retângulo destacado da figura abaixo:



**Aula 4**

Na aula 4, mais do que a obtenção das principais identidades trigonométricas, objetivamos agrupá-las de maneira natural, chamando a atenção para o fato de que "fundamentais", no sentido literal, são apenas 2 identidades, a **(1)** que você já conhece e a **(4)** que demonstraremos nesta aula. Estas identidades, junto com a definição **(2)** (que é a de tg(x), dada na aula 2) e as definições **(3)** que daremos logo no início desta aula, constituem o âmago das relações ou identidades trigonométricas. Todas as demais (dezenas de) identidades que ocupam inúmeras paginas dos textos de trigonometria (dentre as quais incluímos 16 importantes identidades que provaremos, além daquelas deixadas como exercícios), são facilmente deriváveis das referidas duas (a **(1)** e a **(4)**) e das definições **(2)** e **(3)**.

## 4.1 RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A partir das funções **seno** e **cosseno**, definimos a função **tangente** e agora apenas nomearemos as suas respectivas recíprocas: **cossecante , secante e cotangente,** ou seja:

**(3)** $\operatorname{cosec}(\theta) = 1/\operatorname{sen}(\theta)$, $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$ e $\cot(\theta) = 1/\operatorname{tg}(\theta) = \cos(\theta)/\operatorname{sen}(\theta)$

Reiteramos que, literalmente falando, apenas as expressões **(1), (2), (3)** e mais uma outra **(4)** que estudaremos mais adiante, mereceriam a qualificação de **identidades fundamentais**, pois todas as demais identidades, que expressam as principais propriedades das funções trigonométricas e constituem-se no âmago das relações trigonométricas, são facilmente deriváveis destas quatro. Por esta razão, podemos agrupá-las, de maneira natural, objetivando fácil memorização.

O primeiro grupo estabelece o efeito da substituição de $\theta$ por $-\theta$. Tendo em vista as definições dadas e a figura seguinte, temos imediatamente que:

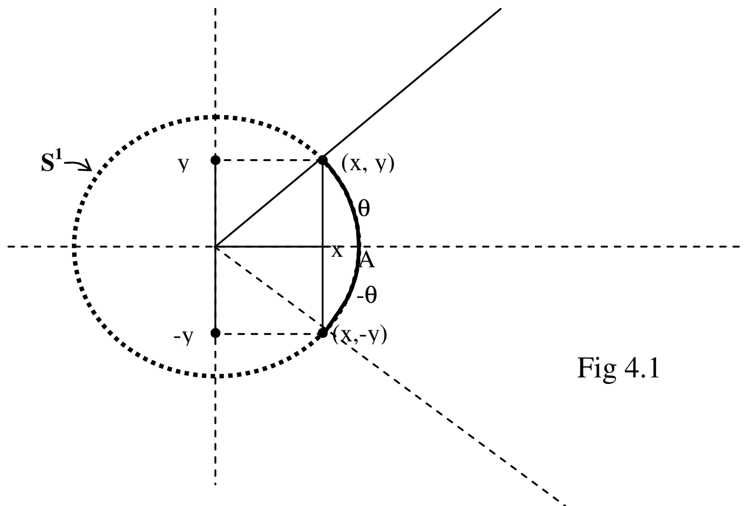



Fig 4.1

(5) $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ (6) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ (7) $\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}(\theta)$

O próximo grupo consiste em duas versões equivalentes da equação **(1)** quais sejam:

(8) $\text{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$ (9) $1 + \text{cotg}^2(\theta) = \text{cosec}^2(\theta)$

Observarmos que (8) é obtida dividindo-se a identidade **(1),** por $\cos^2(\theta)$, se $\cos(\theta) \neq 0$.
Assim:

$$\frac{sen^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

Analogamente a (9) é obtida de **(1)**, dividindo-a por $\text{sen}^2(\theta)$.

Para os dois próximos grupos, iniciamos provando uma identidade **(4),** a qual nos referimos como merecedora de ser dita **fundamental**, qual seja:

**(4)** $\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) + \text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\varphi)$

Prova:

Consideremos os ângulos $\theta$ e $\varphi$ , bem como seus respectivos pontos em $\mathbf{S^1}$ :

$$P(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) \quad e \quad Q(\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi)) \; .$$

Nossa demonstração consiste em obter duas expressões distintas para a distância entre os ponto P e Q e depois igualar estas expressões.

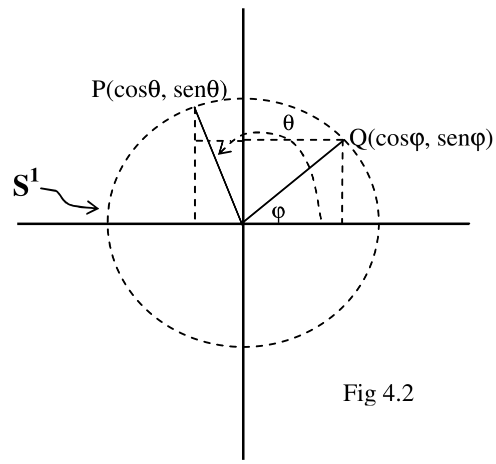



Fig 4.2

A primeira expressão para a distância entre os pontos P e Q é dada por:

$d^2 = ( \cos (\theta) - \cos (\varphi) )^2 + ( \operatorname{sen} (\theta) - \operatorname{sen} (\varphi) )^2 =$

$= \cos^2 (\theta) + \cos^2 (\varphi) - 2 \cos (\theta) \cos (\varphi) + \operatorname{sen}^2 (\theta) + \operatorname{sen}^2 (\varphi) - 2\operatorname{sen} (\theta) \operatorname{sen} (\varphi) =$

$= 1 + 1 - 2 ( \cos(\theta) \cos (\varphi) + \operatorname{sen} (\theta) \operatorname{sen} (\varphi) ) =$

$= 2 - 2 ( \cos (\theta) \cos (\varphi) + \operatorname{sen} (\theta) \operatorname{sen} (\varphi) )$ ou seja:

$$d^2 = 2 - 2 ( \cos (\theta).\cos (\varphi) + \operatorname{sen} (\theta).\operatorname{sen} (\varphi) ).$$

Agora, o objetivo da “mudança de eixos” que segue é obter uma outra expressão para $d^2$ a qual, comparada com a que acabamos de obter, resultará na referida identidade **(4)**.

Para tanto, mudamos nosso sistema de eixos: anotamos por OX' o novo eixo obtido rodando OX do ângulo φ (Fig 4. 3 (a)). Assim, OQ coincide com OX'

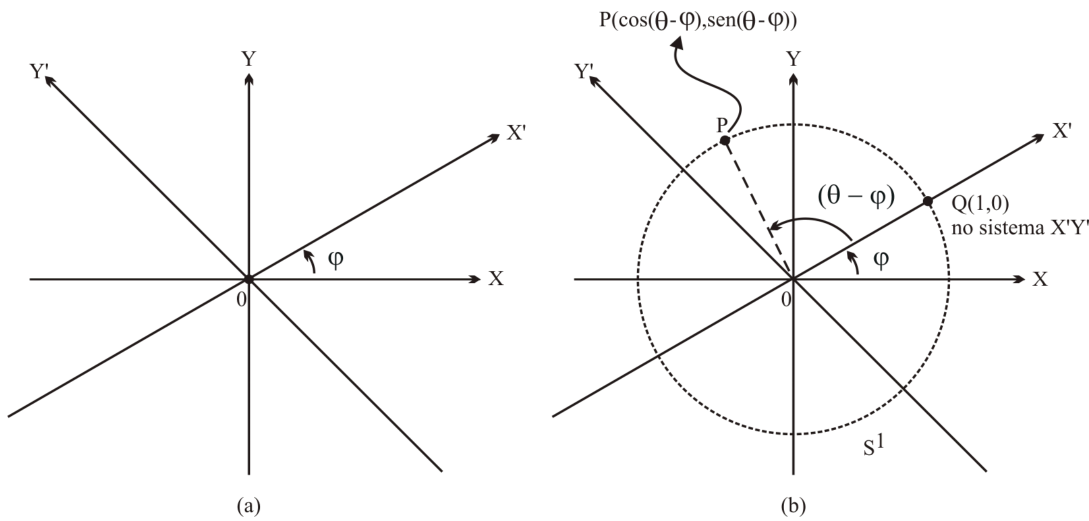



Fig. 4.3

No sistema X'OY' , o ponto Q tem coordenadas (1,0) e o ponto P tem coordenadas ( cos (θ-φ) , sen (θ-φ) ) , mas a distância é a mesma, logo:

$$d^2 = (1 - \cos(\theta - \varphi))^2 + (0 - \operatorname{sen}(\theta - \varphi))^2$$

ou

$$d^2 = 1 + \cos^2(\theta - \varphi) - 2\cos(\theta - \varphi) + \operatorname{sen}^2(\theta - \varphi) = 2 - 2\cos(\theta - \varphi)$$

Igualando as duas expressões obtidas para $d^2$ resulta que:

$$2 - 2\,(\cos(\theta)\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)) = 2 - 2\cos(\theta - \varphi)$$

ou

**(4)** $$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$$

Para obtermos o cosseno da soma de dois arcos, basta substituir φ por -φ em **(4):**

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(-\varphi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(-\varphi) \text{ ou seja,}$$

(10) $$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$$

Quanto à relação entre os cossenos de arcos complementares ou suplementares basta fazer, respectivamente, em **(4)** $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \pi$ **:**

$\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\varphi) + \text{sen}(\frac{\pi}{2})\,\text{sen}(\varphi) = \text{sen}(\varphi)$ ou seja

(*) $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \text{sen}(\varphi)$ e, analogamente, $\cos(\pi - \varphi) = -\cos(\varphi)$

Trocando $\varphi$ por $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ da 1ª identidade (*) acima, vem:

$$\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \varphi) = \cos(\varphi) \qquad (**)$$

Em outras palavras, dizemos em (**) que o cosseno de um arco é o seno de seu complemento e em (*) que o seno de um arco é o cosseno de seu complemento.

Agora o seno da soma de dois arcos resulta de (*) quando substituímos $\varphi$ por $\theta + \varphi$ :

$\text{sen}(\theta + \varphi) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\theta + \varphi)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \theta) - \varphi)$ mas, por ( 4 )

$\cos((\frac{\pi}{2} - \theta) - \varphi)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\cos(\varphi) + \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \theta)\,\text{sen}(\varphi)$

Levando em conta (*) e (**), finalmente vem:

$$(11) \qquad \text{sen}(\theta + \varphi) = \text{sen}(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi)$$

Fazendo em (11) $-\varphi$ em lugar de $\varphi$ temos que:

$\text{sen}(\theta - \varphi) = \text{sen}(\theta)\cos(-\varphi) + \cos(\theta)\,\text{sen}(-\varphi)$ ou seja:

$$(12) \qquad \text{sen}(\theta - \varphi) = \text{sen}(\theta)\cos(\varphi) - \cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi)$$

Em particular, se $\theta = \pi$ , resulta de (12) que

$$\text{sen}(\pi - \varphi) = \text{sen}(\varphi),$$

isto é, o seno de um arco é o seno do seu suplemento.

Para a tangente, teremos:

$$\text{tg}\,(\theta + \varphi) = \frac{sen(\theta+\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)} = \frac{sen(\theta)\cos(\varphi)+\cos(\theta)sen(\varphi)}{\cos(\theta)\cos(\varphi)-sen(\theta)sen(\varphi)}. \quad ,$$

de modo que, dividindo numerador e denominador do 2º membro por cos(θ)cos(φ), resulta:

$$(13) \quad \text{tg}\,(\theta + \varphi) = \frac{\dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}+\dfrac{sen(\theta)}{\cos(\varphi)}}{1-\dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}.\dfrac{sen(\varphi)}{\cos(\varphi)}} = \frac{tg(\theta)+tg(\varphi)}{1-tg(\theta).tg(\varphi)},$$

e fazendo em (13) - φ em lugar de φ obtemos:

$$(14) \quad \text{tg}\,(\theta - \varphi) = \frac{tg(\theta)-tg(\varphi)}{1+tg(\theta)tg(\varphi)}$$

Podemos resumir as identidades obtidas nos quadros:

sen (θ + φ) = sen (θ) cos (φ) + cos (θ) sen (φ)

cos (θ + φ) = cos (θ) cos (φ) – sen (θ) sen (φ)

sen (θ - φ) = sen (θ) cos (φ) – cos (θ) sen (φ)

cos (θ - φ) = cos (θ) cos (φ) + sen (θ) sen (φ)

$$\text{tg}\,(\theta + \varphi) = \frac{tg(\theta)+tg(\varphi)}{1-tg(\theta)tg(\varphi)} \qquad \text{tg}\,(\theta - \varphi) = \frac{tg(\theta)-tg(\varphi)}{1+tg(\theta)tg(\varphi)}$$

Para o arco duplo 2θ, basta fazer φ = θ em (11) obtendo:

(15) sen (2θ) = 2 sen (θ) cos (θ)

e , em (10):

(16) cos (2θ) = $\cos^2$ (θ) – $\text{sen}^2$ (θ)

Para as expressões do ângulo metade basta observar que sendo

**(1)** $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ e

(16) $\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) = \cos(2\theta)$,

somando as duas identidades, membro a membro, vem:

$2\cos^2(\theta) = 1 + \cos 2(\theta)$ ou

(17) $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ e subtraindo, vem

$2\,\text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos 2(\theta)$ ou

(18) $\text{sen}^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$

<u>Exercício 4.1:</u>

1) Deduza fórmulas para $\text{sen}(3\theta)$ em termos de $\text{sen}(\theta)$ e para $\cos(3\theta)$ em termos de $\cos(\theta)$

2) Deduza uma fórmula para $\cos(4\theta)$ em termos de $\cos(\theta)$

3) Deduza uma fórmula para $\text{sen}(4\theta)$ em termos de $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$

5) Calcule sen(15 ), onde 15 é a medida em graus do ângulo, usando :

(a) 15 = 45 – 30 (b) $15 = (\frac{1}{2}).\ 30$

6) Mostre que:

(19) $\text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\varphi) = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$

(20) $\cos(\theta)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)]$

(21) $\text{sen}(\theta)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\,[\,\text{sen}(\theta+\varphi) + \text{sen}(\theta-\varphi)\,]$

7) Usando as identidades ( 17 ) e ( 18 ), do exercício 5) , obtenha as identidades para o arco metade:

(22) $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$

(23) $\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$

8) Um arco a do primeiro quadrante é tal que sen(a) = 1/5. Determine:

cos(a), sen(2a), sen(a/2), cos(a/2), tg(a), tg(2a)

## Aula 5

Esta aula tem por objetivo abordar as duas mais importantes relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. As relações de ambas são tão importantes na trigonometria, que receberam até a denominação de "Lei": "Lei dos Cossenos" e "Lei dos Senos".

### 5.1 A LEI DOS COSSENOS E A LEI DOS SENOS

As leis do seno e do cosseno têm importantes aplicações como, por exemplo, medir distância entre um ponto acessível A e um ponto inacessível B. É o caso de pontos A e B em margens opostas de um rio.

• Iniciamos com a Lei dos Cossenos. Essa Lei é um instrumento útil numa variedade de situações em Matemática e Física. Ela dá o valor do terceiro lado de um triângulo ABC em termos de dois lados dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e do ângulo $\theta$ por eles formado.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

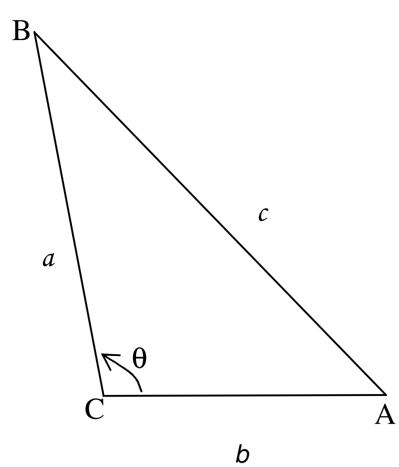



Fig 5.1

De fato, a prova fica bem simples se colocamos o triângulo no plano XY, fazendo $b \subset OX$ ($C \approx O$) e com B no semi-plano em que y é positivo, como ilustramos na figura abaixo, e aplicamos a fórmula da distância **d** entre os vértices A e B do triângulo. Observe que as coordenadas de B são obtidas levando-se em conta os catetos do triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos B e C.

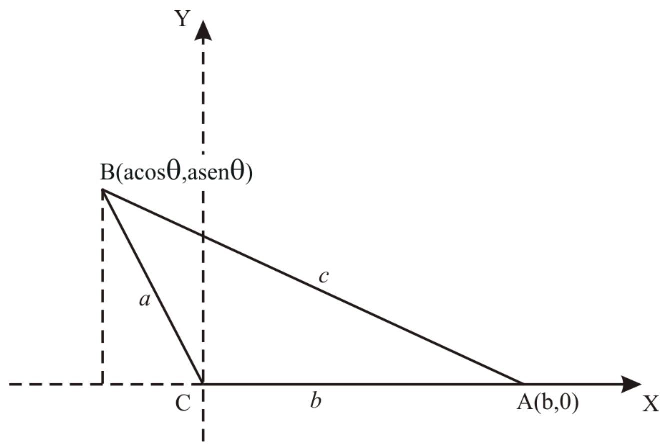



Fig. 5.2

O quadrado de c é o quadrado da <u>distância</u> entre A e B, assim:

$$c^2 = (a\cos(\theta) - b)^2 + (a\ \mathrm{sen}(\theta) - 0)^2 = a^2(\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)) + b^2 - 2ab\cos(\theta) =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

OBS :

1) Quando o ângulo ACB é reto, isto é, quando $\theta = \pi/2$, ou seja, o triângulo é <u>retângulo</u>, teremos $\cos(\theta) = \cos(\pi/2) = 0$ e a <u>Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras</u>, pois teremos :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

<u>Exercício resolvido</u> :

Acabamos de demostrar a Lei dos cossenos usando o sistema de coordenadas no plano. Mostre esta lei usando as relações métricas num triângulo retângulo.

<u>Solução</u> :

Consideremos um $\triangle$ABC.

Separamos os casos : O $\triangle$ tem os três ângulos agudos;
O $\triangle$ tem um ângulo obtuso;
O $\triangle$ tem um ângulo reto.

<u>1º Caso</u> : O $\triangle$ tem os três ângulos agudos:

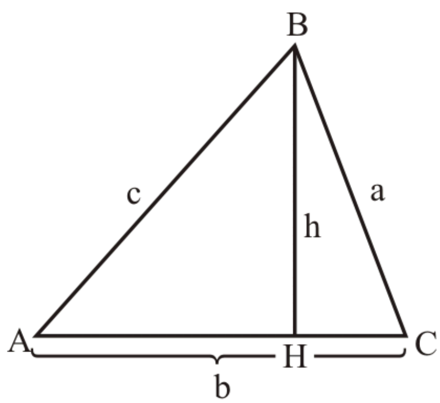



Fig. 5.3

Seja $\overline{BH} = h$. Do $\Delta$ retângulo BHC, vem que : $a^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2$, mas do $\Delta$ retângulo BHA temos que:

$$h^2 = c^2 - \overline{AH}^2, \quad \text{logo}$$

$$a^2 = c^2 - \overline{AH}^2 + b^2 - 2b\overline{AH} + \overline{AH}^2 = c^2 + b^2 - 2b\overline{AH}$$

mas $\overline{AH} = c \cos \hat{A}$, logo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\hat{A}$

2º Caso : O △ tem um ângulo obtuso.

De modo análogo, temos

$$a^2 = h^2 + (\overline{AH} + b)^2 \qquad \text{ou seja,}$$

$$a^2 = c^2 - \overline{AH}^2 + \overline{AH}^2 + b^2 + 2\overline{AH}\, b,$$

mas $\overline{AH} = c.\cos(\pi - \hat{A}) = - c.\cos(\hat{A})$ ,

Assim, $\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2\, bc \cos\hat{A}}$

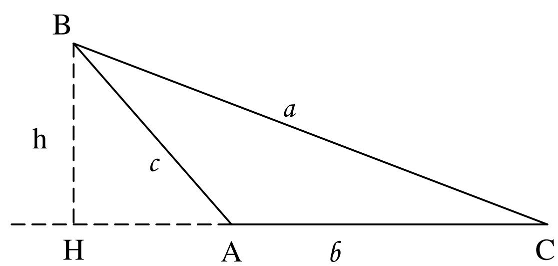



Fig (5.4)

3° Caso : O △ tem um ângulo reto.

$\hat{A}$ é reto $\Rightarrow \cos \hat{A} = 0$. Por Pitágoras temos que:

$a^2 = b^2 + c^2$ , logo :

$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2\, bc \cos\hat{A}}$

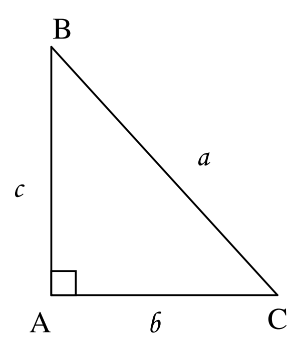



Fig (5.5)

• <u>A Lei dos Senos</u>

Em geral, nos livros do Ensino Médio, a demonstração da Lei dos senos é feita por semelhança de triângulos e apela para as alturas do triângulo, aplicando as identidades trigonométricas convenientes e destacando os três casos: triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo. Nesta demonstração, em geral, não é determinada a constante de proporcionalidade entre cada lado e o seno do ângulo correspondente. Faremos adiante, como exercício resolvido, este jeito de demonstração.

Optamos por fazer, inicialmente, a demonstração desta lei, abaixo enunciada, e sem fazer uso de coordenadas, objetivando contribuir com mais uma alternativa de demonstração.

"Seja **ABC** um triângulo de lados *a*, *b* e *c* e *r* o raio da circunferência a ele circunscrita.

Então: $$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)} = 2r$$ "

<u>Demonstração</u> :

Consideremos a circunferência $\mathbf{S^r}$ circunscrita ao triângulo ABC e D o ponto de S diametralmente oposto a B (Fig5.6 b).

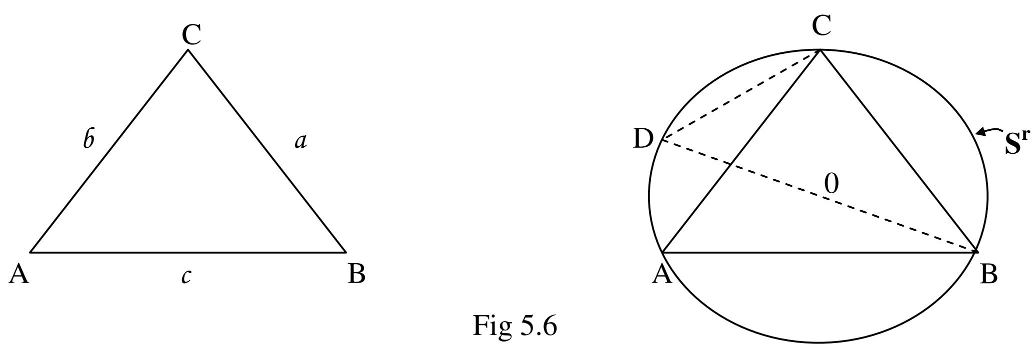



Fig 5.6

(a) (b)

Vamos provar apenas que $\frac{a}{sen(A)} = 2r$

Se o ponto D coincide com C, $C \cong D$, o ângulo Â (BÂC) está inscrito numa semicircunferência e, portanto, Â = 90°, sen (A) = 1 e o lado *a* é o diâmetro, logo a fórmula é verdadeira neste caso.

Se D ≠ C então os ângulos Â e $\hat{D}$ são iguais (por subentenderem o mesmo arco CB, como na Fig 5.6 (b)) ou suplementares (como na Fig.5.6 (c) .

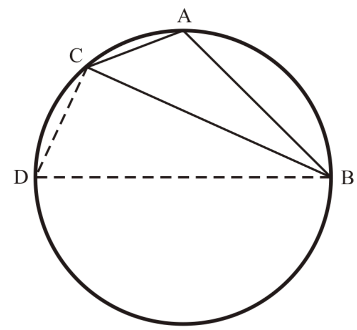



Fig. 5.6 (c)

Em qualquer caso (Â = $\hat{D}$ ou Â = 180º - $\hat{D}$), Â e $\hat{D}$ têm o mesmo seno. Mas o triângulo DCB é retângulo de hipotenusa DB, portanto :

$$\text{sen }(\hat{A}) = \text{sen }(\hat{D}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} = \frac{a}{2r}, \text{ logo } \frac{a}{sen(A)} = 2r$$

Analogamente, $\frac{b}{sen(B)} = 2r$ e $\frac{c}{sen(C)} = 2r$

Exemplo :

Demonstre a "Lei dos senos" usando relações métricas no triângulo retângulo.

Solução:

Consideremos um triângulo (qualquer) ABC, como na figura :

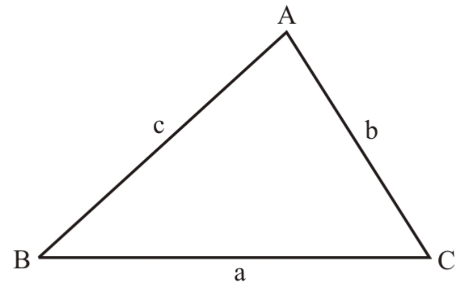



Fig. 5.7

Traçando por A a altura h relativa ao lado BC e considerando os dois triângulos retângulos tais que h é cateto comum, resulta do que ficou estabelecido na aula 2 que :

c sen B = h = b sen (C), assim :

$$(*) \quad \frac{c}{sen(C)} = \frac{b}{sen(B)}$$

Por outro lado, se por B, traçamos a altura h' relativa ao lado AC, teremos:

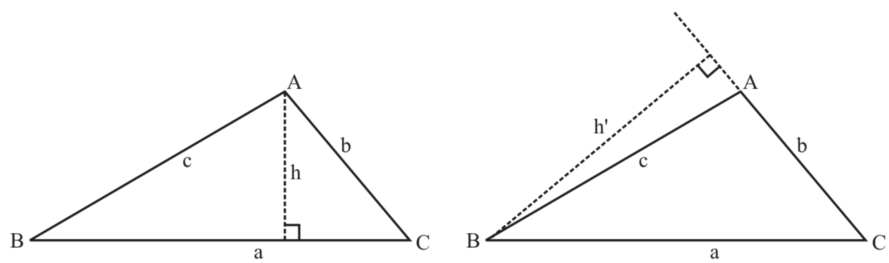



Fig. 5.8

c sen ($\pi$ - A) = h' = a sen C ou c sen A = h' = a sen C

(pois sen ($\pi$ - A) = sen A),

$\dfrac{c}{sen(C)} = \dfrac{a}{sen(A)}$ . Juntando (*) com (**) resulta:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

Obs: Ilustramos a demonstração com um triângulo acutângulo, mas ela poderia ter sido ilustrada com um triângulo obtusângulo. Verifique, anotando o ângulo obtuso por B e lembrando que sen (180 - $\alpha$) = sen($\alpha$). É claro que a demonstração também continua válida se o triângulo é retângulo pois não exigimos, em instante algum, que todos os ângulos fossem agudos. No caso de retângulo (anotando o ângulo reto por B) a altura h = cateto *c.*

Exercícios resolvidos :

1. A partir da área S de um triângulo ABC, obtenha a Lei dos senos (Fig 5.7).

Solução:

$$S = \frac{\overline{BC}}{2}h = \frac{ah}{2}, \quad \text{mas} \quad h = b \text{ sen (C)} \Rightarrow S = \frac{ab sen(C)}{2}, \quad \text{ou seja:}$$

2S = *ab* sen (C).

Analogamente, 2S = *ac* sen (B) e 2S = *bc* sen (Â), logo:

*ac* sen (B) = *bc* sen (Â) =*ab*sen (C)

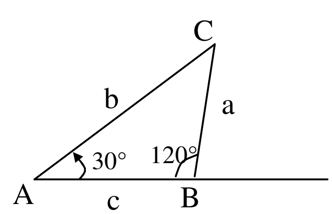
Dividindo-se esta identidade por *abc*, vem que:

$$\frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(C)}{c}$$

2. Um observador, num ponto A de uma planície observa um ponto C de modo que AC forma com a planície um ângulo de 30º. A uma distância de 500 metros de A, um observador B observa o mesmo ponto tal que BC forma com a planície um ângulo de 120°. Determine a distância do ponto C ao observador A

Solução :

De acordo com o enunciado, os ponto A, B e C formam um triângulo ilustrado na figura abaixo:



O ângulo C mede 180 – (30 + 120) = 30 graus. Pela lei dos senos aplicada ao triângulo ABC, temos:

$$\frac{b}{sen(120)} = \frac{c}{sen(30)} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{\sqrt{3}/2} = \frac{500}{1/2} \Rightarrow b \times 1/2 = 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

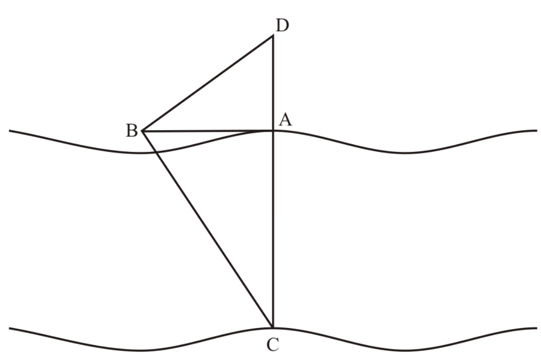
$\Rightarrow$ $b = 500 \times \sqrt{3}$ m $\cong$ $500 \times 1{,}75$ m = 875m ou seja,

a distância do ponto C ao observador A é de, aproximadamente, 875m.

**Exercício Proposto**

( Unicamp-SP) Para medir a largura AC de um rio um homem usou o seguinte procedimento: marcou um ponto **B** de onde podia ver na margem oposta o coqueiro **C,** de modo que o ângulo ABC fosse de 60º ; determinou o ponto **D** no prolongamento de CA de forma que o ângulo CBD fosse de 90º. Medindo AD = 40m, calculou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio.

Ver figura abaixo:



**Aula 6**

Esta aula aborda os gráficos das funções trigonométricas e de suas inversas. Construímos alguns deles e comentamos sobre outros.

## 6.1 GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O objetivo aqui é traçar um esboço do gráfico das principais funções trigonométricas. Observamos que o esboço é tão mais facilitado quanto mais informações temos da função. Assim, por exemplo, importa saber seu domínio e se ela é par (ou ímpar), se é periódica, se é limitada, seu comportamento perto de pontos onde ela não está definida, dentre outras informações.
Iniciamos fazendo esta análise para a função seno e sugerindo ao leitor que faça o análogo para o cosseno.

Gráfico de sen(x)

- O Domínio da função seno é o conjunto **R** dos números reais.
- Já observamos que a função seno é periódica e seu período é $2\pi$. Assim, basta esboçar seu gráfico num intervalo de comprimento igual ao período ($2\pi$) e teremos o esboço do gráfico para todo $x \in$ **R.**
- Observamos também que seno é função ímpar, pois sen (-x) = - sen (x)
- Sabemos da definição de seno que ela é função limitada, sendo $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, qualquer que seja $x \in$ **R**.
- Em cada um dos quatro quadrantes, buscamos ilustrar o comportamento dos valores de sen (x). Os pontos onde a função assume valores máximos e mínimos, bem como aqueles onde ela corta os eixos coordenados são importantes e devem ser assinalados.

No 1º quadrante (Fig.6.1), isto é, para $0 \leq x \leq \pi/2$, o seno cresce desde 0 (quando $x=0$) até 1 (quando $x = \pi/2$).

A partir de $\pi/2$ até $\pi$ ela continua positiva, mas decrescendo e torna-se zero em $\pi$ (Fig 6.2).

Entre $\pi$ e $3\pi/2$ o seno é negativo e "cresce" em valor absoluto, isto é, decresce em **R**, até atingir seu valor mínimo $-1$ quando x é igual a $3\pi/2$ (Fig.6.3). A partir de $3\pi/2$ até $2\pi$ ele "decresce" em valor absoluto e é negativo, logo cresce em **R** de $-1$ até 0, valor atingido quando $x = 2\pi$ (Fig.6.4)

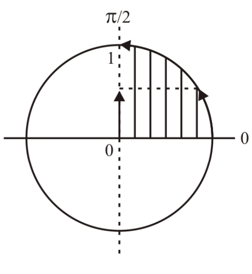



Fig. 6.1

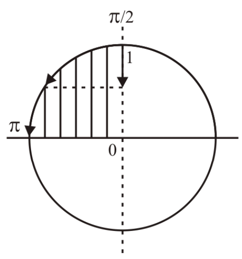



Fig. 6.2

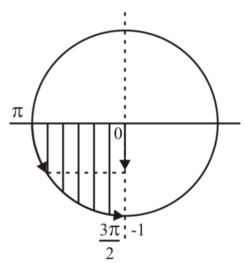



Fig. 6.3

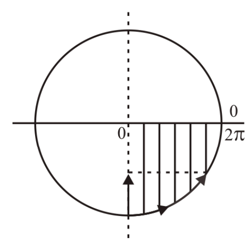



Fig. 6.4

Todos estes dados obtidos nos fazem crer que o esboço abaixo (Fig 6.5) é uma boa representação, no plano, do gráfico de $y = \text{sen}(x)$.

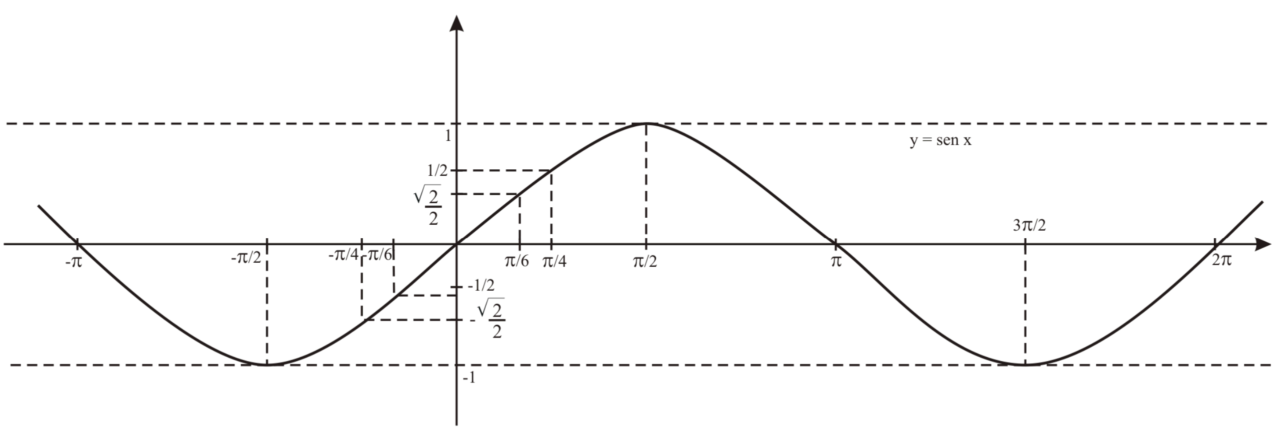



Fig. 6.5

Exercício 6.1

Esboce o gráfico de cos(x) procedendo de modo análogo ao que fizemos para o sen(x).

Gráfico da Tangente.

Observamos que a função tangente, isto é, $y = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$ tem características bem distintas das funções seno e cosseno. Uma delas é que (como já vimos) ela não está definida para todo $x \in$ **R**, pois não está definida nos números $x = k\pi + \pi/2$, com $k \in$ **Z ,** onde cos (x) = 0.

Verifique que seu período também (ao contrário do seno e do cosseno) não é $2\pi$ e sim $\pi$. Temos que tg é função ímpar, pois tg(-x) $= \frac{sen(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-sen(x)}{\cos(x)}$ = - tg(x)

Outra característica bem distinta é o fato de que tg não é limitada, pois a medida que x se aproxima de $\pi/2$, sen (x) se aproxima de 1 e cos (x) se aproxima de 0, o que nos dá os quocientes $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$ "cada vez maiores" em valor absoluto. Estamos querendo dizer que tg(x) toma valores arbitrariamente "grandes" quando x se aproxima de $\pi/2$. Naturalmente, sempre que x está "muito perto" de $\pi/2$ mas é menor que $\pi/2$, tanto seno como cosseno são positivos e este quociente será "grande", mas positivo. Mas se x é "um pouquinho" maior que $\pi/2$, o seno ainda é positivo, mas o cosseno é negativo de modo que tal quociente é um número negativo.

Resumimos estas explicações dizendo que tg (x) tende a “+∞” se x se aproxima de π/2 por valores menores que π/2 ou

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{tg(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{sen(x)}{\cos(x)} = +\infty$$

e que tende a “- ∞” se x se aproxima de π/2 por valores maiores que π/2 ou ainda $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \text{tg(x)} = -\infty$

Comportamento inteiramente análogo se dá quando x está próximo de 3π/2 (isto é, à esquerda de 3π/2 ou à direita de 3π/2).

Para se ter idéia do comportamento da tangente perto de π/2 e 3π/2 é interessante buscar na tabela os valores de seno e do cosseno de arcos “bem próximos” destes, isto é, arcos “um pouco maiores” e “um pouco menores” que estes e fazer o quociente $\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Apelando para a interpretação geométrica da tangente, também rapidamente seremos convencidos destes fatos. Observe que a medida que x se aproxima de π/2 o segmento AT vai crescendo ilimitadamente.

Ver figura abaixo:

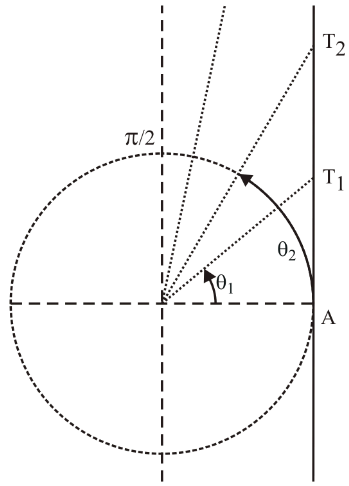



Fig. 6.6

O análogo se dá quando x se aproxima de $3\pi/2$.

Partindo dos sinais de seno e de cosseno nos quatro quadrantes, obtemos os sinais da tangente nos quatro quadrantes. Lembrando ainda que $tg(0) = tg(\pi) = 0$, pois $sen(0) = sen(\pi) = 0$, temos informações bem razoáveis para arriscarmos o traçado do gráfico de $y = tg(x)$ no plano XY, com $x \in [0,2\pi]$.

Usando o fato de que ela tem período $\pi$ (porque?), construímos o esboço em todo o conjunto dos reais:

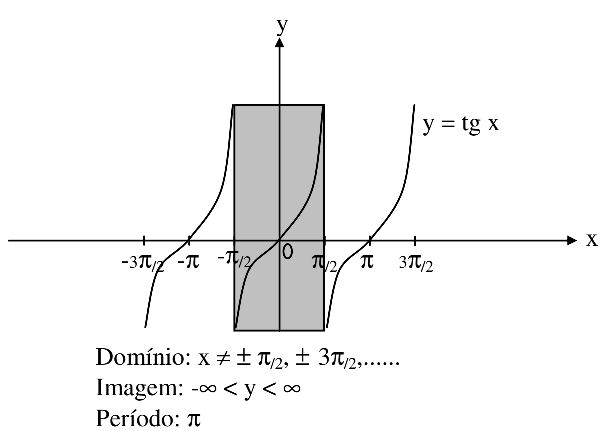



Fig 6.7

Observe que qualquer número real ("por maior que seja" ou "por menor que seja") é tangente de algum x entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ , isto é, de algum $x \in (-\pi 2, \pi/2)$. Geometricamente, estamos dizendo que toda reta paralela ao eixo OX corta o gráfico da tg(x) . Isto é , "Se $M \in$ **R**, existe $x \in (-\pi 2, \pi/2)$ tal que M = tg(x)." O que estamos dizendo é que a função tangente de x é sobrejetiva, isto é, o conjunto imagem é o conjunto **R** dos números reais .

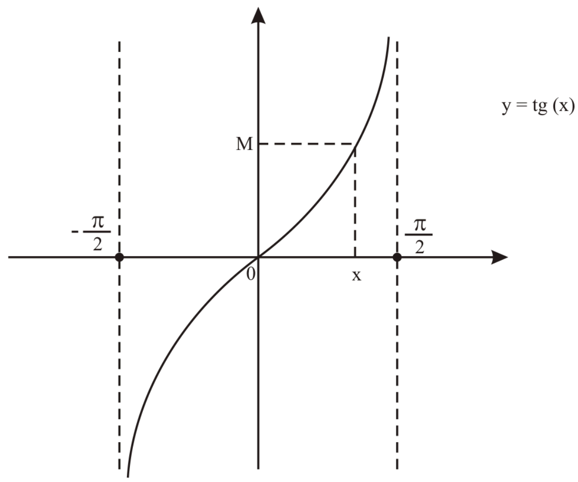



Fig. 6.8

Observamos ainda que tg não é uma função injetiva pois, por exemplo, tal M = tg(x) também é igual a $tg(x+k\pi)$ com $k \in$ Z. Assim, existem infinitos arcos que têm M como tangente. É claro que, se nos restringirmos ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ , o número (arco) x cuja tangente é M é só um, ou seja, em $(-\pi/2, \pi/2)$ ela é injetiva. Naturalmente, as funções periódicas não são injetivas, posto que $\forall x$, f(x+p) = f(x), onde p é o período.

Os gráficos das funções cossecante, secante e cotangente podem ser esboçadas através dos mesmos procedimentos e análises feitas para as funções sen, cos e tg.

Vamos ilustrar com a análise para o esboço do gráfico de cossec(x):

- cossec(x) = $\dfrac{1}{\text{sen}(x)}$ não está definida nos x onde sen(x) = 0, logo não está definida em $x = k\pi$, $k \in$ Z;

- Sendo o número real sen(x) entre –1 e 1, isto é, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$; $\text{sen}(x) \neq 0$, seu inverso $\frac{1}{\text{sen}(x)}$ satisfará à desigualdade $\frac{1}{\text{sen}(x)} \geq 1$ ou $\frac{1}{\text{sen}(x)} \leq -1$ , isto é, $\cos\sec(x) \geq 1$ ou $\cos\sec(x) \leq -1$;

- o sinal de cossec(x) é o mesmo de sen(x);

- Quando x é tal que sen(x) se aproxima de zero, isto é, tal que $x \to k\pi$, cossec (x) tende a " $+\infty$ ou $-\infty$", respectivamente, se sen (x) → $0^+$ ou sen (x) → $0^-$. Experimente alguns valores de x para k = 1.

<u>Exercício 6.2</u>: Analise para k=0, k=2,...

- Sendo sen(x) periódica (de período $2\pi$) cossec também será periódica de período $2\pi$. Naturalmente, ela não está definida em zero, não está definida em $\pi$ nem em $2\pi$.

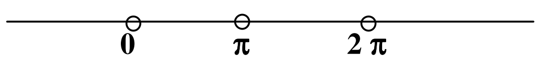



Fig 6.9

Assim, analisaremos seu gráfico em $(0,\pi) \cup (\pi,2\pi)$ que constitui um período completo.

Em $(0, \pi)$, $\text{sen}(x) > 0 \Rightarrow \text{cossec}(x) > 0$ e o "maior" valor do seno é assumido quando $x = \pi/2$ e este valor é 1, logo o "menor" valor de cossec é assumido em $\pi/2$ e este valor é $\frac{1}{\text{sen}(x)} = 1$, assim em $(0, \pi)$, $\cos\sec(x) \geq 1$. Já analisamos o que ocorre quando $x \to \pi$ ou $x \to 0$. Em $(\pi,2\pi)$, $\text{sen}(x) < 0 \Rightarrow \cos\sec(x) < 0$ e o "menor" valor de seno é assumido quando $x = (3\pi)/2$ e este valor é –1, logo o maior valor de cossec é assumido em $x = (3\pi)/2$ e este valor é $\frac{1}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -1$.

Já analisamos o que ocorre quando $x \to \pi$ ou $x \to 2\pi$.

Assim, podemos arriscar o gráfico de cossec ( x ) em **R**:

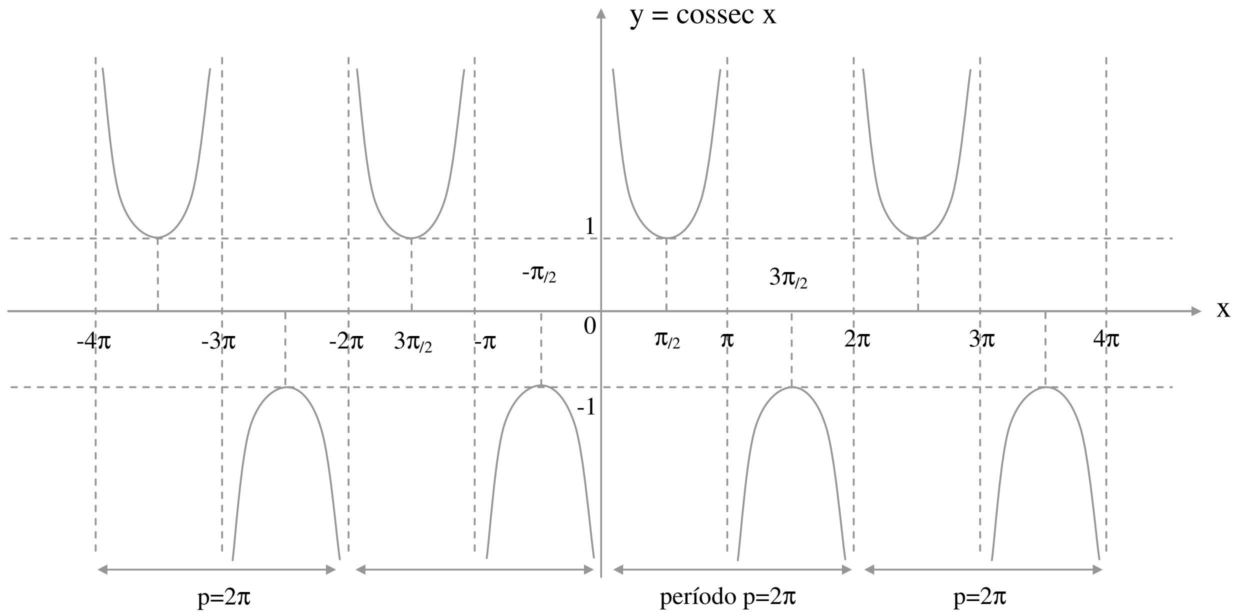
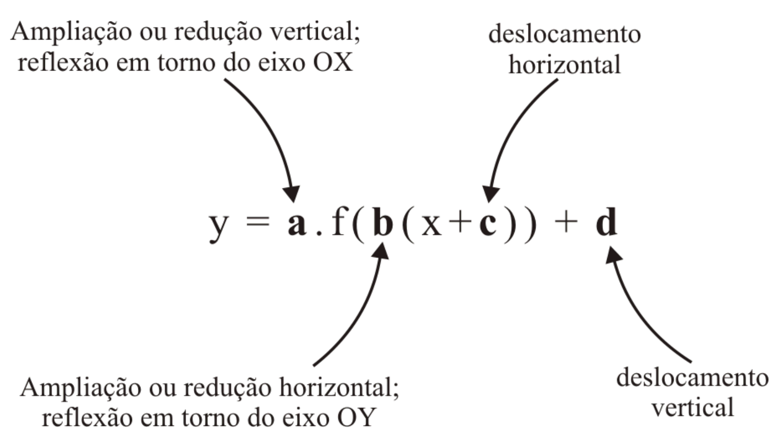



Fig 6.10

Exercício 6.3 : Faça análise similar para a $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, bem como para a $\cot g(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$.

Obs:As regras para deslocamento, ampliação, redução e reflexão do gráfico de uma função, aplicam-se, naturalmente, às funções trigonométricas. O diagrama a seguir vai relembrá-lo dos parâmetros de controle correspondentes.



Na aula 8 (grupo de exercícios resolvidos) consideramos dois gráficos que ilustram o diagrama acima.

## 6.2 <u>FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:</u>

Consideremos sen: $[0, \pi/2] \to [0,1]$, ou seja, a função seno apenas no 1º quadrante. Temos por exemplo, que sen(0) = 0, sen($\pi$/6) = 1/2 , sen($\pi$/4) = $\sqrt{2}/2$ ,

sen($\pi$/3) = $\sqrt{3}/2$ , sen($\pi$/2) = 1 .

Assim, se perguntamos qual é:

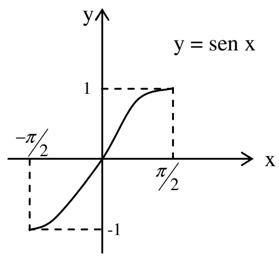
1. o arco cujo seno é 0? Resp: 0
2. o arco cujo seno é 1/2? Resp: $\pi$/6
3. o arco cujo seno é $\sqrt{2}/2$ ? Resp: $\pi$/4
4. o arco cujo seno é $\sqrt{3}/2$ ? Resp: $\pi$/3
5. o arco cujo seno é 1? Resp: $\pi$/2

Ou seja, se sen(x) = y, x é o arco cujo seno é y, anotamos assim: x = arcsen(y) e dizemos que <u>arcoseno</u> é a função inversa do seno, abreviadamente arcsen.

Naturalmente, as respostas (1,2,3,4) não poderiam ser dadas se o intervalo considerado, ao invés de ser $[0, \pi/2]$ fosse $[0, 2\pi]$, posto que, por exemplo, arcsen(1/2) poderia ser $\pi$/6, mas também poderia ter como resposta 5$\pi$/6 pois
$5\pi/6 = \pi - \pi/6$ , o que contraria a definição de uma função. Por definição, uma função associa a cada ponto de seu domínio um <u>único</u> valor.

Assim, uma dada função só tem inversa se for injetiva. O seno não é injetiva em $[0,2\pi]$, logo não tem “inversa” em $[0,2\pi]$, mas se a restringirmos a um intervalo em que ela é injetiva, teremos sua inversa arcsen bem definida.

Ver figuras abaixo:




Domínio: [-π/2, π/2]
Imagem: [-1, 1]

Fg 6.11(a)

Domínio: $-1 \le x \le 1$
Imagem: $-\pi/2 \le y \le \pi/2$

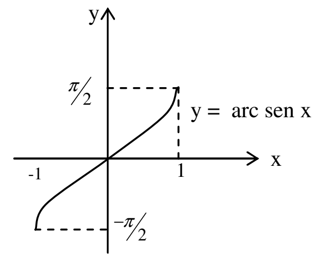



Fig 6.11(b)

Assim, se considerarmos (Fig 6.11(a)) sen: $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, que leva:

$x \to \text{sen}(x) = y$, teremos:

(Fig 6.11(b)) arcsen:$[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, leva $y \to x = \text{arcsen}(y)$.

Verifique que: cos : $[0, \pi] \to [-1,1]$ $\Rightarrow$ arccos: $[-1,1] \to [0, \pi]$

$x \to y = \cos(x)$ $\qquad$ $y \to x = \arccos(y)$

e tg: $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ arctg: $\mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

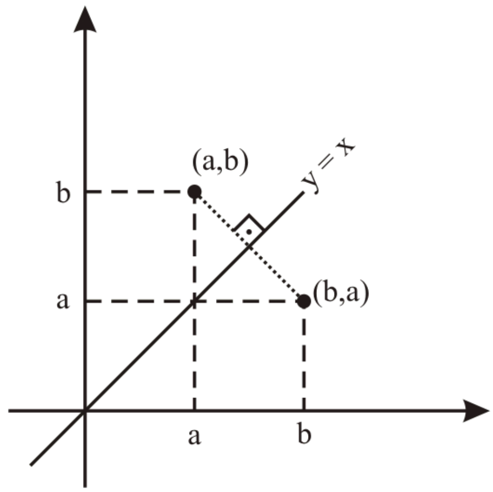
$x \to y = \text{tg}(x)$ $\qquad$ $y \to x = \text{arctg}(y)$

estão bem definidas.

<u>Exercício 6.4</u>: Determine x em cada caso

a) $x = \text{arcsen}(1/2)$ b) $x = \text{arcsen}(0)$ c) $x = \text{arctg}(1)$ d) $x = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $x = \text{arctg}(-\sqrt{3})$

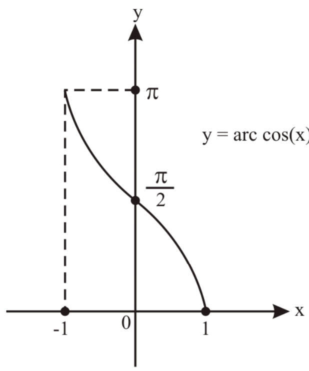



OBS: Da definição de $f^{-1}$ , isto é, da inversa de uma função f, tem-se que se um par ordenado (a,b) pertence ao gráfico de f, o par (b, a) pertence ao gráfico de $f^{-1}$. Assim, se “a reta y = x fosse um espelho”, o gráfico de $f^{-1}$ seria o “refletido de f nesse espelho”. Use esta observação e compare os gráficos das funções $f^{-1}$ seguintes com os gráficos das respectivas funções f. Não esqueça de considerar os eixos nos quais você está representando os domínios e as imagens.

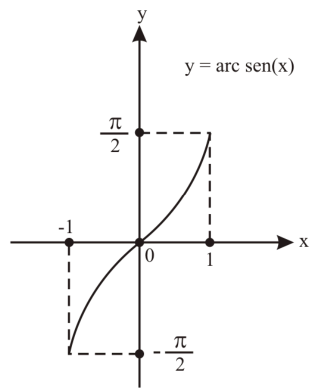
Veja na página seguinte as figuras com os esboços dos gráficos das funções:

(a) arc cos(x) ; (b) arc sen(x) ; (c) arc tg(x) ; (d) arc sec (x) ; (e) arc cosec(x) ;
(f) arc cotg(x)

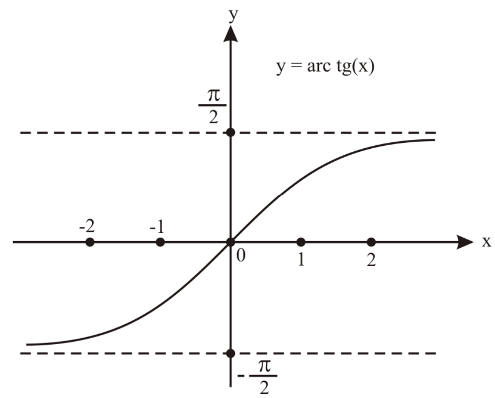
<u>Exercício</u>: Justifique todos esses gráficos com os mesmos procedimentos que usamos para a construção dos gráficos de seno, cossecante,....



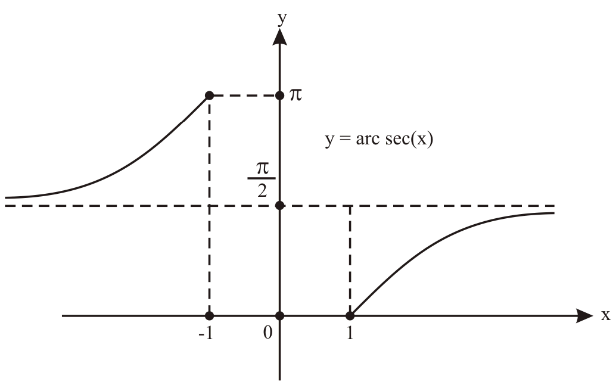

(a)
Domínio: $-1 \leqslant x \leqslant 1$
Imagem: $0 \leqslant y \leqslant \pi$



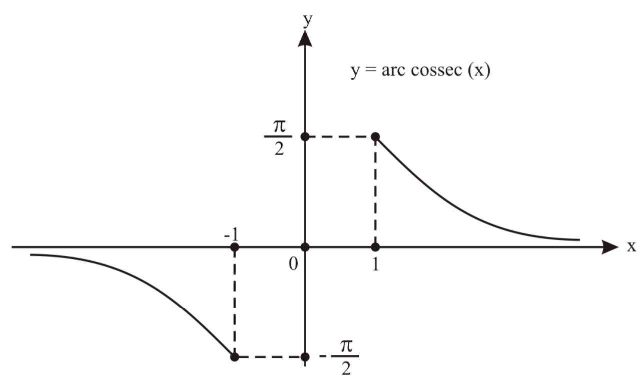

(b)
Domínio: $-1 \leqslant x \leqslant 1$
Imagem: $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$



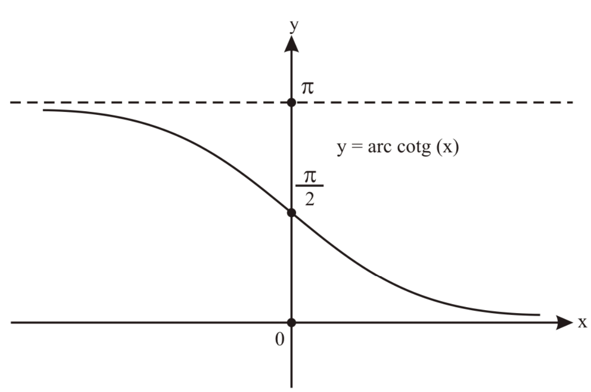

(c)
Domínio: $\mathbb{R}$
Imagem: $-\pi/2 < y < \pi/2$




(d)
Domínio: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$
Imagem: $0 \leqslant y \leqslant \pi$ ; $y \neq \pi/2$




(e)
Domínio: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$
Imagem: $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ ; $y \neq 0$




(f)
Domínio: $\mathbb{R}$
Imagem: $0 < y < \pi$

## Aula 7

A aula 7 tem por objetivo discutir situações em que precisamos determinar um arco x quando se conhece uma relação envolvendo funções trigonométricas de x. Dito de outro modo, ela aborda equações e inequações trigonométricas.

### 7.1 Equações Trigonométricas

Já trabalhamos com muitas identidades trigonométricas, isto é, identidades envolvendo funções trigonométricas como, por exemplo, $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, válida para todo x real. Na álgebra também, uma igualdade como $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ válida para todo número real é dita uma identidade, mas se queremos determinar um x real tal que $x^2 – 12x = - 36$, estamos diante de uma equação. Estamos diante de uma equação trigonométrica se a variável x é o arco a ser determinado e do qual se conhece uma relação envolvendo funções trigonométricas de x, como, por exemplo, $\sqrt{3}\,sen(x) + cos(x) = 1$.

Freqüentemente, encontramos tais equações sob formas que dividiríamos em 2 grupos.

1ºGrupo: Fixado um número real *a* ou fixado um arco $\alpha$, freqüentemente precisamos determinar x , respectivamente, em equações do tipo i) ou ii):

i) $\text{sen}(x) = a; \quad \cos(x) = a; \quad tg(x) = a$

ii) $\text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha); \quad \cos(x) = \cos(\alpha); \quad tg(x) = tg(\alpha); \quad \text{sen}(x) = \cos(\alpha)$

De certa forma, já tratamos de equações deste tipo no nosso texto. Não deixe de fazer a correspondente figurinha, ao iniciar o problema. Figura não serve como demonstração mas, tanto em geometria quanto em trigonometria, a figura é importante e auxilia muito a perceber as soluções. Em particular ela é "quase imprescindível" quando se trata de equações trigonométricas.

Obs: Nesta aula **k** e **n** serão sempre números inteiros, isto é, **k** ; **n** $\in$ **Z**

Exemplos:

i) $2\cos(x) = -1 \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ = x

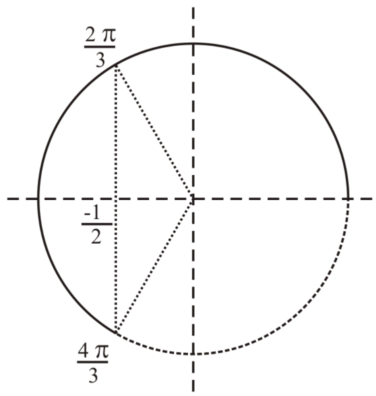



Fig. 7.1

Na 1ª volta positiva, x = (2π)/3 ou x =(4π)/3 $\Rightarrow$ a solução x da equação pertence ao conjunto:

$\left\{x \in \Re; x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ ou ainda $\left\{x \in \Re; x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$

ii) $\text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha)$; $\cos(x) = \cos(\alpha)$; $tg(x) = tg(\alpha)$; $\text{sen}(x) = \cos(\alpha)$

Vamos analisar, simplesmente, observando o círculo trigonométrico. Naturalmente, no caso sen($x$) = sen($\alpha$) teremos que x e $\alpha$ são arcos cujas extremidades determinam a mesma coordenada y sobre $\mathbf{S^1}$ , conforme ilustra a primeira figura abaixo. Assim :

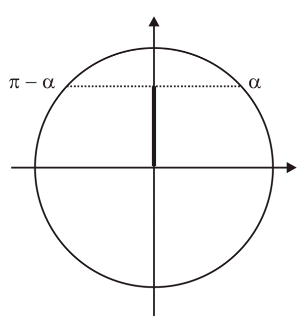



Fig. 7.2

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad (*) \end{cases}$$

Analogamente, se $\cos(x) = \cos(\alpha)$ :

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi \end{cases}$$

ou ainda : $x = \pm\alpha + 2k\pi$

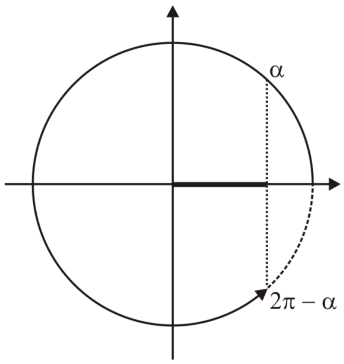



Fig. 7.3

Quando tg(x) = tg($\alpha$), teremos que: $tg(x) = tg(\alpha) \Rightarrow x = \alpha + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

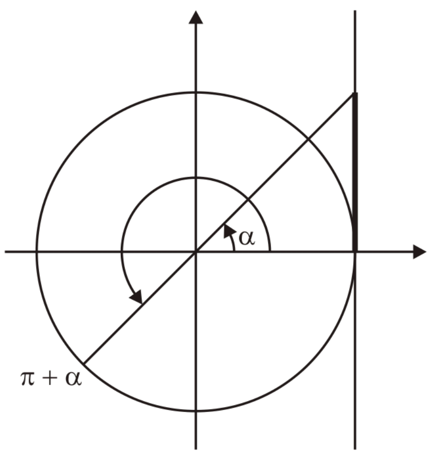



Fig. 7.4

Observamos que nas equações do tipo sen($x$)=cos($\alpha$) é possível substituir cos(α) por $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, que resulta na equação: $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ a qual recai no tipo (*).

2º.Grupo: Consideremos aqui equações que, após convenientes transformações em suas formas através de artifícios, identidades, definições, etc, resultam em expressões tratadas no 1º grupo. Ilustramos abaixo algumas soluções típicas:

1)

$$sen(3x) + sen(x) = 0$$

$$\Rightarrow sen(3x) = -sen(x) \text{ e sendo sen função ímpar, vem:}$$

$$sen(3x) = sen(-x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = -x + 2k\pi \text{ ou} \\ 3x = [\pi - (-x)] + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \text{ ou} \\ 2x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} \text{ ou} \\ x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

O conjunto dos x que satisfazem à equação é:

$$S = \left\{ x \in \Re; x = k\frac{\pi}{2} \; ou \; x = k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \text{ mas este conjunto é exatamente } S = \left\{ x \in \Re; x = k\frac{\pi}{2} \right\} k \in Z$$

2) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$

Seja $\cos(x) = t \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow t = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Assim, cos(x)=1 e cos(x)=1/2 são as raízes da equação dada.

Agora: $\begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \cos(x) = 1/2 \end{cases}$

pertencem ao 1ºgrupo e as soluções são:

$$\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \text{ e } \cos(x) = 1/2 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow S = \left\{ x \in \Re; x = 2k\pi \; ou \; x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right\}$$

3) Consideremos a equação à qual nos referimos no início desta aula :

$$\sqrt{3}\,\text{sen}(x) + \cos(x) = 1$$

Observamos que para equação da forma :

$$a\ \text{sen}(x) + b \cos(x) = c, \quad \text{com } a^2 + b^2 \neq 0,$$

um interessante artifício é dividir a equação por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, resultando em $\frac{a}{r} sen(x) + \frac{b}{r}\cos(x) = \frac{c}{r}$ e sendo $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$, tomamos α tal que $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{r}$ e $\cos(\alpha) = \frac{b}{r}$, para transformar a equação em:

$$\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(x) + \cos(\alpha)\cos(x) = \frac{c}{r} \qquad \text{ou seja: } \cos(x-\alpha) = \frac{c}{r},$$

que já abordamos no 1º grupo.

No nosso exemplo, teríamos: $r = \sqrt{3+1} = 2, c = 1$. Logo: sen(α) $= \sqrt{3}/2$, cos(α) = ½, portanto α = π/3 .Assim,o x que procuramos é tal que $\cos(x - \pi/3) = \frac{1}{2}$ (que recai no grupo 1) e obteremos como conjunto solução

$$\{x \in \Re \ ; \ x = 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi + 2\pi/3\}.$$

Obs1) : Para resolver este mesmo problema, poderíamos ter optado por escrever a equação na forma:

$$\sqrt{3}\,\text{sen}(x) = 1 - \cos(x)$$

e elevado a identidade ao quadrado, qual seja:

$3\text{sen}^2(x) = 1 + \cos^2(x) - 2\cos(x)$, ou ainda,

$3(1 - \cos^2(x)) = 1 + \cos^2(x) - 2\cos(x)$, ou seja, $3 - 3\cos^2(x) = 1 + \cos^2(x) - 2\cos(x)$,

que resulta em:

$4\cos^2(x) - 2\cos(x) - 2 = 0$ ou $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$

tipo já exemplificado no item 2) anterior.

Entretanto é necessário um especial cuidado. Ao elevarmos a identidade ao quadrado, introduzimos soluções que não são, necessariamente, da equação original. Deste modo, é necessário que as soluções encontradas após este procedimento sejam <u>testadas</u> na equação original.

Obs2):Pode ser uma boa alternativa, para resolver equações trigonométricas, a substituição das referidas funções por expressões em função de uma nova variável t, onde

$$t = tg(x/2).$$

Neste caso, sem maior dificuldade (este é um exercício resolvido na aula 8) você pode verificar que:

$$sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{ e }\ tg(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Notemos que nossa equação trigonométrica fica transformada numa equação onde só temos expressões racionais na variável t. Apos obtermos t, recaímos no grupo 1, pois tg(x/2) = t.

Também na aula 8 você encontrará exercício resolvido no qual fazemos a interpretação geométrica do parâmetro t = tg(x/2).

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

**1.** Resolva as equações (isto é, obtenha todas as soluções).

a) sen x = $\frac{1}{2}$. b) 3 tg ( x + $\frac{\pi}{2}$ ) = $-\sqrt{3}$

**2.** Resolva: a) cos2x = cos(x - $\frac{\pi}{6}$) em [ 0 , 2π ];

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

**3**. Resolva as inequações em [ 0 , 2π ].

a) sen ( x + $\frac{\pi}{3}$) < $-\frac{1}{2}$ b) tg x + 1 < 0

**4.** Resolva, em [ 0, 2π ] o sistema : sen x > $\frac{1}{2}$

e tg x > 1

**Aula 8**

Nesta aula você é convidado a resolver exercícios de Trigonometria. Não nos preocupamos em ordená-los de acordo com a seqüência das 7 aulas anteriores, nem mesmo quanto ao grau de dificuldade. Você encontrará exercícios muito elementares e outros mais elaborados, dentre os quais algumas questões de conceituados vestibulares, bem como algumas de avaliações em cursos de especialização para professores de Matemática. Esta aula consta de Exercícios Resolvidos e Exercícios Propostos, para os quais seria interessante você tentar soluções diferentes das apresentadas.

**Exercícios Resolvidos**

**1**. Transforme 1 radiano em graus e 1 grau em radianos. Em seguida obtenha 18°30' em radiano.

Solução:

a ) $\pi$ rd $\longrightarrow$ 180°, logo

1 rd $\longrightarrow x^o$. Resulta que $\frac{\pi}{1} = \frac{180}{x}$ então $x = \frac{180}{\pi}$

Se tomarmos para $\pi$ um valor aproximado com duas casas decimais exatas (3,14), teremos um valor aproximado para $x$, qual seja :

$x \cong \frac{180}{3,14} \cong 57,3°$ ou ainda 57° e $\frac{3}{10} \cdot 60' = 18'$ isto é, $x \cong 57°18'$, ou

**1rd ≅ 57°18'.**

b ) 180º $\longrightarrow \pi$ rd

1º $\longrightarrow x$ rd, portanto $\frac{180}{1} = \frac{\pi}{x}$ ou $x = \frac{\pi}{180}$.

Tomando $\pi \cong 3,14$, teremos $x \cong 0,017$, isto é : **1° ≅ 0,017 rd.**

c ) Ora, 18º 30' correspondem a 18 . 60' + 30' = 1080' + 30'= 1110'

Pelo item b), 60'= 1° ≅ 0,017 rd, portanto $1' \cong \frac{0,017}{60}$, logo $1110' \cong 1110 \cdot \frac{0,017}{60} =$

$= \frac{111 \times 17}{6 \times 1000} = \frac{1887}{6000} \cong 0,3145$ rd.

Assim, 18°30' ≅ 0,3145 rd.

**2**. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 10 cm. Qual é a distância que sua extremidade percorre em 15 min?

Solução:

Ora, em 15 min a extremidade percorre ½ da semi-circunferência do relógio, ou seja $\frac{\pi}{2}$ rd.

O comprimento do arco $\frac{\pi}{2}$ rd de uma circunferência de raio 10 cm é, em centímetros, $10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi \cong 15{,}7$. Assim, a distância percorrida pela extremidade do ponteiro é de aproximadamente 15,7 cm.

**3**. Determine a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de $\frac{19\pi}{4}$ rd e explicite o arco negativo do intervalo $[-2\pi , 0]$ côngruo a $\frac{19\pi}{4}$.

Solução:

Tem-se : $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$. Assim, a expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{19\pi}{4}$ é

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

Para $k = -1$, $x = -2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{-8\pi + 3\pi}{4} = \frac{-5\pi}{4}$ e $\frac{-5\pi}{4} \in [-2\pi , 0]$

**4**. Com auxílio da tabela ao final da aula 2 determine seno e cosseno de:

a) $-227°$ b) $\frac{12\pi}{5}$ rd

Solução:

O arco cuja medida é $-227°$ é côngruo com $360° - 227° = 133°$, portanto tem-se:

$\text{sen}\,(133°) = \text{sen}\,(180° - 133°) = \text{sen}\,(47°) \cong 0{,}731$

e $\cos\,(133°) = -\cos\,(47°) \cong -0{,}687$

**5**. Obtenha cos (2985°) recorrendo apenas ao cosseno e/ou seno de arcos clássicos.

Solução:

Tem-se que $2985° = 8 \times 360° + 105°$, logo o arco de 2985° é côngruo com o arco de $105° = 60° + 45°$.

Assim, cos (2985°) = cos (105°) = cos (60° + 45°) =

= cos (60°). cos (45°) - sen (60°). sen (45°) =

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(1-\sqrt{3})}{2} = \sqrt{2}\,\frac{(1-\sqrt{3})}{4}$.

**6**. Determine sen (2x) sabendo que tg (x) + cotg (x) = 3.

<u>Solução</u>:

sen (2x) = 2sen (x)cos (x) e $\frac{sen(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{sen(x)} = 3$, ou seja,

$\frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos(x).sen(x)} = 3$ ou ainda $\frac{1}{sen(x)\cos(x)} = \frac{3}{1}$,

daí sen (x)cos (x) = $\frac{1}{3}$, logo 2sen (x)cos (x) = $\frac{2}{3}$.

Portanto, sen (2x) = $\frac{2}{3}$.

**7**. Considere o triângulo retângulo abaixo e "resolva-o"(isto é, determine x, $\alpha$ e $\beta$).

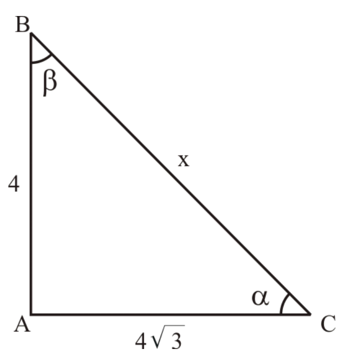



Fig 8.1

<u>Solução</u>:

Tem-se que $x^2 = 16 + 16\times 3 = 16 + 48 = 64$. Daí x = 8. Então sen ($\alpha$) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

logo $\alpha = 30°$ portanto, $\beta = 90° - 30° = 60°$.

**8.** "Este exercício tem por objetivo (dentre outros) chamar atenção para o fato de que quando você afirma (como em (*)) uma identidade baseando-se nas relações métricas de um triângulo, ela só tem sentido se estes números forem possíveis medidas no triângulo (no caso 0< x <1,pois x = 0,x = 1 não tem triângulo, bem como x < 0 não pode ser medida de cateto). Assim, para afirmá-la em um conjunto mais amplo devemos fazer as considerações pertinentes."

A figura a seguir estabelece a identidade

$$(*) : \text{arc sen}(x) + \text{arc cos}(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{para } 0 < x < 1.$$

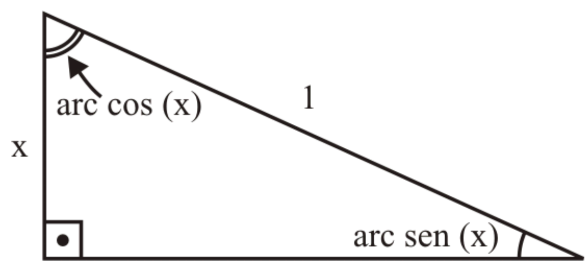



Fig 8.2

a) Verifique, por cálculo direto, que esta identidade é verdadeira também para x = 0, x = 1 e x = -1.

b) Para afirmá-la em todo o intervalo [-1 , 1], resta o intervalo (-1 , 0). Estabeleça a identidade em (-1 , 0), usando (*) ( sugestão : comece fazendo x = - a em (*) ).

<u>Solução</u>:

a) $x = 0$ $\begin{cases} \text{sen}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \text{arc sen}(0) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \text{arc cos}(0) \Rightarrow \text{arc sen}(0) + \text{arc cos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = 1$ $\begin{cases} \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \text{arcsen}(1) \\ \cos(0) = 1 \Rightarrow 0 = \text{arc cos}(1) \Rightarrow \text{arc sen}(1) + \text{arc cos}(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = -1$ $\begin{cases} \text{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = \text{arc sen}(-1) \\ \cos(\pi) = -1 \Rightarrow \pi = \text{arc cos}(-1) \Rightarrow \text{arc sen}(-1) + \text{arc cos}(-1) = \\ = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) Vamos estabelecer a identidade em (-1 , 0), usando (*).

Seja $x \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < x < 0$ ( não posso usar direto (*) pois esta está afirmada para $0 < x < 1$)

Seja $a = -x$, logo $0 < a < 1$, portanto arc sen (a) + arc cos (a) = $\frac{\pi}{2}$ por (*), ou seja:

$$\text{arc sen}(-x) + \text{arc cos}(-x) = \frac{\pi}{2},$$

mas arc sen (-x) = -arc sen (x) e arc cos (-x) = π - arc cos (x), daí :

–arc sen (x) + π - arc cos (x) =π/2 ou π - π/2 = arc sen (x) + arc cos (x),

isto é: arc sen (x) + arc cos (x) = $\frac{\pi}{2}$ com $-1 < x < 0$.

Assim, $\forall x \in [-1, 1]$, arc sen (x) + arc cos (x) = $\frac{\pi}{2}$

**9.** Obtenha sen (x), cos (x) e tg (x) em função da tangente do arco metade (isto é, de $tg(\frac{x}{2})$ ).

<u>Solução</u>:

Usando a expressão do arco duplo vem:

sen (x) = 2sen $(\frac{x}{2})$.cos $(\frac{x}{2})$ = $\dfrac{2sen(\frac{x}{2}).\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+sen^2(\frac{x}{2})}$ . Dividindo-se numerador

e denominador desta última expressão por $\cos^2(\frac{x}{2})$, vem que

$$\text{sen}(x) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$$

$$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - sen^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-sen^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+sen^2(\frac{x}{2})} = (\div\cos^2(\frac{x}{2})) = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} .$$

Como tg (x) = $\dfrac{sen(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\dfrac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}}{\dfrac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}} = \dfrac{2tg(\frac{x}{2})}{1-tg^2(\frac{x}{2})}$

**10.** Interprete geometricamente, t = tg ($\frac{x}{2}$).

<u>Solução</u>:

Vamos anotar tg ($\frac{x}{2}$) = t, substituí-la nas expressões em 1) e interpretar t geometricamente.

sen (x) = $\dfrac{2t}{1+t^2}$ ; cos (x) = $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e tg (x) = $\dfrac{2t}{1-t^2}$

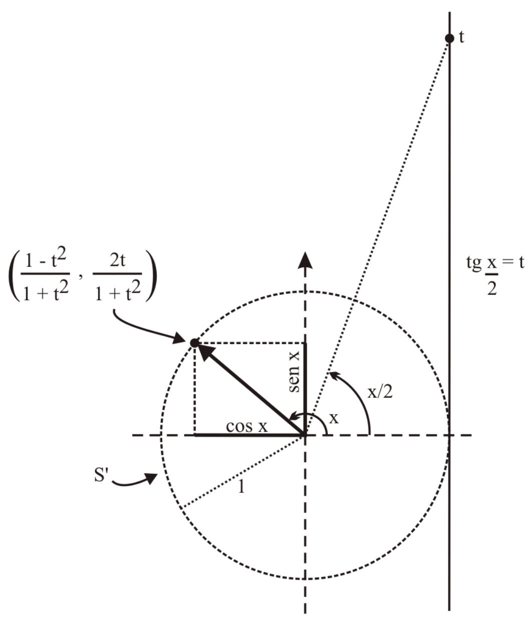



Fig 8.3

<u>Obs</u>: A substituição tg ($\frac{x}{2}$) = t é dita uma parametrização (racional) do círculo $S^1$. Ela é muito útil na solução de diversos problemas de geometria, de física, de cálculo integral e diferencial, dentre outros.

**11.** Esboce o gráfico da função y indicando as interpretações das constantes A, B, C e D , supondo-as positivas.

$$y = A \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{B}(x - C)\right] + D$$

<u>Solução</u>: A curva é uma senóide, em que $|A| = A$ (pois A é positivo) é a amplitude, $|B| = B$ é o período, C é o deslocamento horizontal e D é o deslocamento vertical.

Ver figura abaixo:

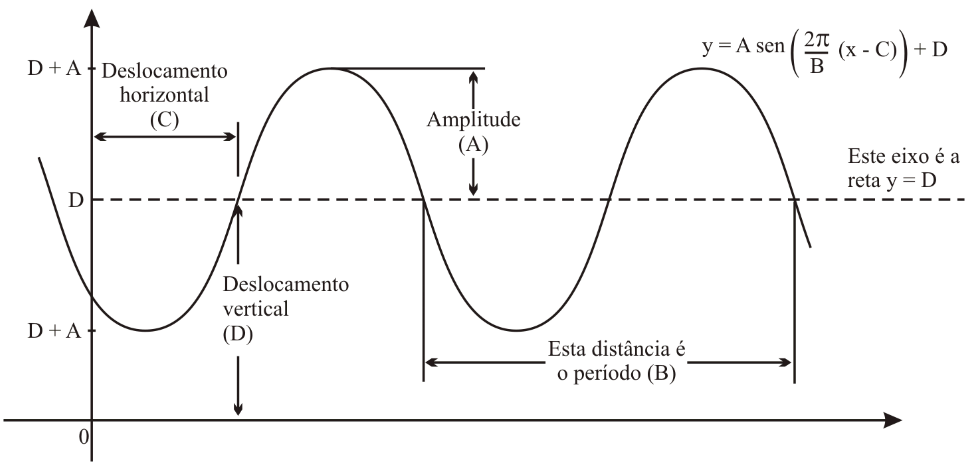



Fig 8.4

**12.** Determine as soluções de $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Solução</u>:

Na 1ª determinação tem-se que $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ são os únicos arcos cujo cosseno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Da 1ª identidade, vem : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, logo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e da 2ª identidade, vem $x = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$ que é côngruo com $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ( note que $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ ).

Assim : $S = \{ x \in \Re;\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \}$

**13.** Resolva a equação : tg (2x) = tg ( x - $\frac{\pi}{3}$ ).

<u>Solução</u>:

tg (2x) = tg (x - $\frac{\pi}{3}$) $\Rightarrow$ 2x = x - $\frac{\pi}{3}$ + k$\pi$, k $\in$ Z $\Rightarrow$ x = - $\frac{\pi}{3}$ + k$\pi$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S = { x $\in \Re$; x = -$\frac{\pi}{3}$ + k$\pi$ } ou ainda S = { x $\in \Re$; x = 2$\frac{\pi}{3}$ + k$\pi$ , k $\in$ **Z** }.

**14.** Resolva : 2sen$^2$ (x) – 7sen (x) – 4 = 0.

<u>Solução</u>:

Fazendo sen (x) = t, tem-se : 2t$^2$ – 7t – 4 = 0, cujas soluções são t = -$\frac{1}{2}$ e t = 4.
Ora, 4 não pode ser sen (x), portanto a única solução possível é sen x = -$\frac{1}{2}$, portanto x é côngruo com -30° $\cong$ 330° ou com 180° + 30° = 210°.

Assim x $\in$ S = { x $\in \Re$; x = 360°k + 330° ou x = 360°k + 210° , k $\in$ **Z** }

**15.** Determine as soluções básicas (isto é, no intervalo [0 , 2$\pi$) ) de :

$$2\text{sen}^2 (x) + 7\text{sen}(x) + 3 \geq 0.$$

<u>Solução</u>:

Anotando y = sen x, o problema consiste no estudo da inequação 2y$^2$ + 7y +3 $\geq$ 0, associada à equação 2y$^2$ +7y +3 = 0, cujas raízes são assim obtidas:

$$y_1 = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \text{ e } y_2 = \frac{-7-\sqrt{49-24}}{4} \quad \text{ou} \quad y_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } y_2 = -3$$

A parábola z = 2y$^2$ + 7y +3 é tal que z $\geq$ 0 se y $\geq$ -$\frac{1}{2}$ ou y $\leq$ -3 e z $\leq$ 0 se -3 $\leq$ x $\leq$ -$\frac{1}{2}$

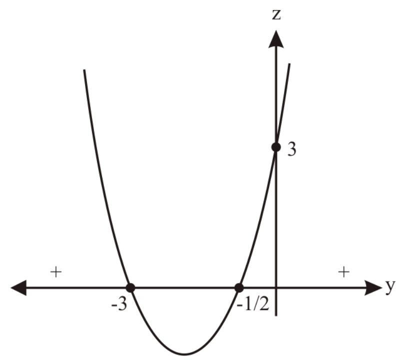



Fig 8.5

Mas, para y = sen(x), tem-se $-1 \le y \le 1$, daí $y \in \{(-\infty,-3] \cup [-1/2,+\infty)\} \cap [-1,1]$, daí

y = sen(x) $\in [-1/2,1]$ , logo x = arco cujo seno é maior ou igual a -1/2 e x $\in$ [0 , 2π)

por ser solução básica, então $0 \le x \le \dfrac{7\pi}{6}$ ou $\dfrac{11\pi}{6} \le x \angle 2\pi$, isto é,

$x \in \left[0,\dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6},2\pi\right)$

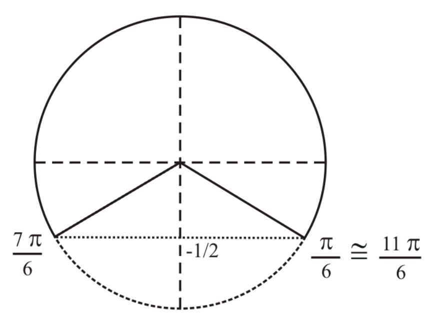



Fig 8.6

**16.** Resolva a equação: sen(x) - $\sqrt{3}$ cos(x) = 1

<u>Solução</u>:

Seja r = $1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$. Então $\dfrac{sen(x)}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos(x) = \dfrac{1}{4}$.

Seja α tal que cos(α ) = $\dfrac{1}{4}$ e sen(α ) = $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⇒

⇒ cos(α )sen(x) + sen(α )cos(x) = 1 /4 ou seja,

sen(α+x) = 1 /4 ⇒ α +x =arc sen(1/4), logo,

$$x = \text{arc sen}(1/4) - \text{arc sen}(-\frac{\sqrt{3}}{4})$$

Obs: Você pode consultar uma calculadora e obter um valor aproximado para x.

**17.** Resolva a equação:

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(2x) = 0$$

<u>Solução</u>:

Iniciamos agrupando a soma cos(x) + cos(3x) , e considerando que :

$$(\cos(\alpha)+\cos(\beta)) = 2.\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

(Esta identidade é um exercício proposto).

Assim, a equação nos diz que:

$$2\cos[\frac{x+3x}{2}].\cos[\frac{x-3x}{2}] + \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2\cos(2x).\cos(-x) + \cos(2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2x).(2\cos(x)+1) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

ou $\quad 2\cos(x) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad (2)$

ou $\quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad (3)$

No caso (1) $\begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \\ k = 3 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$

Todos pertencem ao intervalo [0 , 2π],

k<0 resultará em x fora deste intervalo.

No caso (2), k = 0 $\Rightarrow$ x = $\frac{2\pi}{3}$ serve, mas k $\neq$ 0 não serve

No caso (3), k = 1 $\Rightarrow$ x = $\frac{4\pi}{3}$ serve, mas k $\neq$ 1 não serve.

Assim, S = { $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ }

**18.** Determine sen(2arc sen(x)).

Solução:

Seja y = arc sen(x), ou seja sen(y) = x, mas então

sen(2arc sen(x)) = sen(2y) = 2sen(y)cos(y).

Sendo x = sen(y), tem-se que cos(y) = $\pm\sqrt{1-x^2}$ e daí

sen(2arc sen(x)) = $\pm 2x\sqrt{1-x^2}$

**19.** Seja k uma constante, determine (justificando) sen (x) e cos (x) tal que:

k sen (x) + cos (x) = k

<u>Solução</u>:

Seja k sen (x) + cos (x) = k (1)

Uma solução óbvia é cos (x) = 0 e sen (x) = 1, válida $\forall k \in \Re$. Outra é

cos (x) = 0 e sen (x) = -1, somente válida para k = 0.

Assim, vamos buscar soluções tais que cos (x) $\neq$ 0, ( logo sen (x) $\neq \pm 1$ e k $\neq$ 0 ) ($*$)

Multiplicando a equação por (1 + sen (x) ) $\neq$ 0, por ($*$) resulta que:

(1 + sen (x) ) cos (x) = k (1 – sen$^2$(x) ) = k cos$^2$(x).

Sendo cos (x) $\neq$ 0, podemos dividir esta última equação por cos (x) :

1 + sen (x) = k cos (x) $\Rightarrow$ cos (x) = $\frac{1+sen(x)}{k}$ , pois k $\neq$ 0 (2)

Comparando com (1), resulta que:

$\frac{1+sen(x)}{k}$ = k – k sen (x) $\Rightarrow$ 1 + sen (x) = $k^2$ – $k^2$ sen (x) ou

sen (x)(1 + $k^2$) = $k^2$ –1 $\Rightarrow$ sen (x) = $\frac{k^2-1}{k^2+1}$ o que, levado em (2) fornece:

$$\cos(x) = \frac{1+\frac{k^2-1}{k^2+1}}{k} = \frac{k^2+1+k^2-1}{k(k^2+1)} = \frac{2k^2}{k(k^2+1)} = \frac{2k}{k^2+1}$$

Assim, cos (x) = $\frac{2k}{k^2+1}$ e sen (x) = $\frac{k^2-1}{k^2+1}$, $\forall k \in \Re,\ k \neq 0$.

<u>Obs</u> : Se k = 0, pela nossa 3ª linha, a solução acima também é válida.Logo, a solução acima vale $\forall k \in \Re$. Assim, temos duas soluções possíveis :

cos x = 0 e sen x = 1 ou

cos (x) = $\frac{2k}{k^2+1}$ e sen (x) = $\frac{k^2-1}{k^2+1}$, ambas válidas $\forall k \in \Re$.

## <u>Exercícios Propostos</u>

**1.** Obtenha sen ( 10 π + x ) + cos ( $\frac{9\pi}{2}$ ) , sabendo que sen ( x) = $\frac{1}{2}$

**2.** (FMJ-SP) A expressão $\frac{sen(x+\pi)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{tg(\pi-x)}$, na qual x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k ∈ Z,

é equivalente a :

a) – cotg x ; b) – 2 cos x ; c) 0 ; d) 2 cos x ; e) cotg x

**3.** Usando as fórmulas de adição determine:

a) sen 165º ; b) cos 300º ; c) sen 225º ; d) cos 195º ; e) sen 345º

**4.** Determine o domínio da função f(x) = cotg ( x + $\frac{\pi}{3}$ )

**5.** Dê o domínio de f(x) = $\sqrt{1-2sen(x)}$ e de g(x) = $\sqrt{\cos(4x-\frac{\pi}{2})}$ :

**6.** a) Sabendo que sen x + cos x = 0,2 , determine sen( 2x).

b) Sabendo que sen x = m e cos x = n, com 0 < x < $\frac{\pi}{2}$, determine

tg $(\frac{\pi}{4}+x)$ e cotg $(\frac{\pi}{4}+x)$ em função de m e n.

**7**. ( Fuvest-SP) Calcule a medida de x indicada na figura abaixo

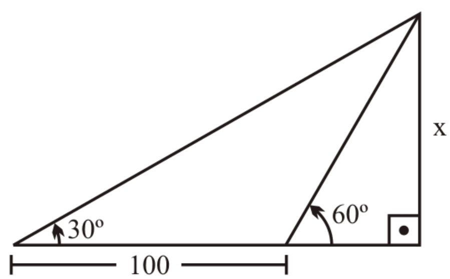



Fig 8.7

**8.** ( Mack – SP) Calcule a medida do segmento AB na figura abaixo, sabendo que BCDE é um retângulo:

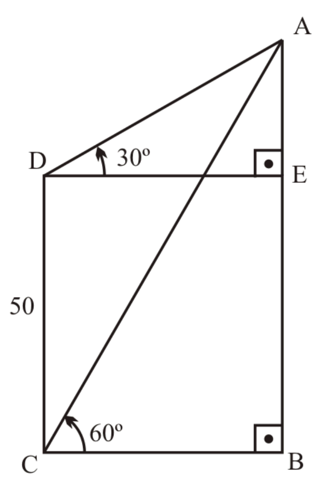



Fig 8.8

**9.** Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados alem de um rio, marcaram-se dois pontos C e D aquém do rio e mediram-se os ângulos ACB =35º, BCD = 20º, ADC = 18º, ADB = 41º e a distância CD = 320m. Calcule a distância $\overline{AB}$ .

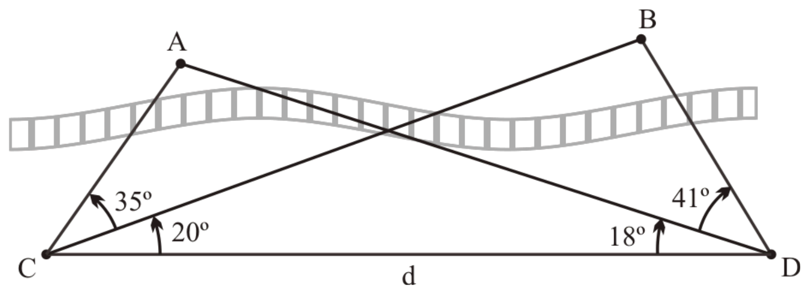



Fig 8.9

**10**. ( UNEB-BA) Seja o ponto **M,** no interior do ABCD, conforme a figura abaixo.

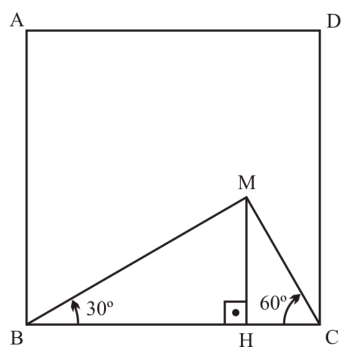



Fig 8.10

Se MH = $4\sqrt{3}$ cm, o perímetro do quadrado, em centímetros, é:

a) 64. b) $64\sqrt{3}$. c) 128. d) $128\sqrt{3}$. e) 256.

**11.** ( PUC-MG) No triângulo da figura, B > C e tg B = $\frac{4}{3}$.

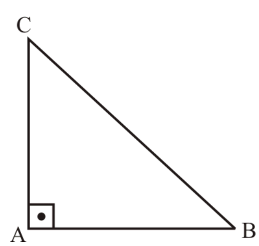



Fig 8.11

O valor do seno do ângulo **C** é:

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{2}{5}$. e) $\frac{3}{5}$.

**12.** De um ponto **A** um agrimensor enxerga o topo **T** de um morro, segundo um ângulo de 45º. Ao se aproximar 50m do morro ele passa a ver o topo **T** segundo um ângulo de 60º. Determine a altura do morro.

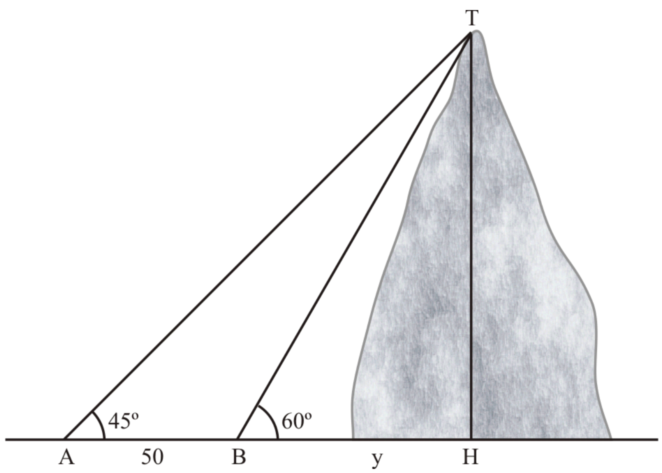



Fig 8.12

**13.** Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a B afasta-se 20m da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a 40m de C, do qual ainda pode ver as árvores. Tendo verificado que os ângulos DCA e ADC medem, respectivamente, 15º e 120º, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6}$ = 2,4 ?

**14.** Esboce o gráfico de $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$ e interprete as constantes $\frac{1}{2}$ e $\pi$
.

**15.** Resolva as equações (isto é, obtenha todas as soluções).

a) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\cos x = \text{sen}\,\frac{2\pi}{9}$

**16.** Decida se a equação $\sqrt{1 - sen(x)} + \cos x = -\sqrt{2}$ tem solução no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Caso afirmativo determine-a.

**17.** ( UNIFAP) Determine a(s) solução(ções) de $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

**18.** Resolva:

a) sen x – cos x = 0 em $[\ 0 , 2\pi\ ]$.

b) cos 5x – cos 3x = 0 em $[\ 0 , 2\pi\ ]$.

c) 2 sen 3x = $\sqrt{2}$, $x \in [\ 0 , \pi\ ]$.

d) tg 4x = tg ( 2x - $\frac{\pi}{4}$ ) $x \in [\ 0 , \pi\ ]$.

e) $tg^2$ x = tg x

**19**. Resolva as inequações em $[\ 0 , 2\pi\ ]$.

a) tg x > 1

b) 2 sen x + $\sqrt{2}$ > 0

c) 2 $cos^2$ x + cos x – 1 < 0

d) | sen x | ≤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**20.** Determine o conjunto solução da inequação 1 - 2 cos x ≥ 0 para $x \in [\ 0 , 2\pi\ ]$.

**21.** Determine, em $[\ 0 , 2\pi\ ]$, o conjunto solução da inequação: 2 $sen^2$ x ≥ sen x

**22.** Resolva as equações:

a) tg ( 7x) = tg ( 3x)

b) $sen^4$ (x) + $cos^4$ ( x) = $\frac{1}{2}$

c) tg x + tg 2x = tg 3x

d) arc tg $(\frac{x+1}{2})$ + arc tg $(\frac{1-x}{2})$ = $\frac{\pi}{4}$

**23.** Determine:

a) tg ( arc sen x)

b) 4 arc tg $(\frac{1}{5})$ – arc tg $(\frac{1}{239})$

c) arc tg ( -x) + arc tg (x)

**24**. Resolva a inequação: cos x + $\sqrt{3}$ sen x ≤ 1

## Aula 9

Na aula 9 introduzimos os números complexos. Temos convicção de que a maneira como este tema é abordado na quase totalidade dos livros do ensino médio, ele reduz-se a algo, literalmente, “imaginário”. Por esta razão, abordamos o tema explorando a apresentação dos complexos e suas operações, do ponto de vista geométrico, interpretando as operações entre os complexos como “movimentos” no plano, o que é bem “real”.

## Os Números Complexos :

### 9.1 Introdução

Como nasceram os números complexos? Eles nasceram no curso das descobertas das fórmulas para resolução de equações do terceiro e quarto graus, na primeira metade do século XVI. Os matemáticos da época trabalhavam com o complexo de forma envergonhada, desculpando-se por “fingirem” que existia tal entidade, pois não fazia sentido o quadrado de um número ser um número negativo. Qual o significado e que explicação se daria para objeto tão estranho, mas tão útil na resolução de insolúveis problemas de Matemática que não tinham solução no corpo dos reais?

Apenas no final do século XVIII, o norueguês Wessel atinou para uma explicação simples e, simultaneamente, fantástica. As operações com complexos são as transformações geométricas dos vetores do plano, dentre as quais você já viu algumas na nossa aula 1, quais sejam: translação, dilatação, contração, bem como outras como a rotação, além das composições dessas transformações.

Entretanto, foi na primeira metade do século XIX que o grande matemático Gauss fechou a questão, dando clareza e formalizando, rigorosamente, toda estrutura que passou a constituir o perfeito Corpo dos Números Complexos, o qual contém, num certo sentido a ser precisado, o Corpo dos Números Reais.

## 9.2 Os Números Complexos

Os complexos formam um sistema de números que estende os números reais. De que modo isto se dá? Em que sentido "estende" os reais?
Vamos considerar os pontos (vetores) do plano com a operação de soma definida na Introdução da aula 1 e, em seguida, definir uma multiplicação entre estes pontos (vetores) do plano. Definida esta multiplicação, passaremos a chamar tal sistema (o conjunto dos vetores do plano com as referidas operações) de **Números Complexos** e o anotaremos por **C** .
Não há nada de novo em relação à operação de adição, pois se $u = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ estão em **C**, teremos a adição usual entre os vetores do plano, que você já conhece da aula 1, qual seja:

$$u + v = ( x_1 + x_2, y_1 + y_2) .$$

A novidade aqui é a definição da operação de multiplicação **u.v** , que daremos adiante.

## 9.3 Módulo

O módulo ou comprimento de um complexo $z = (x, y)$ é o número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

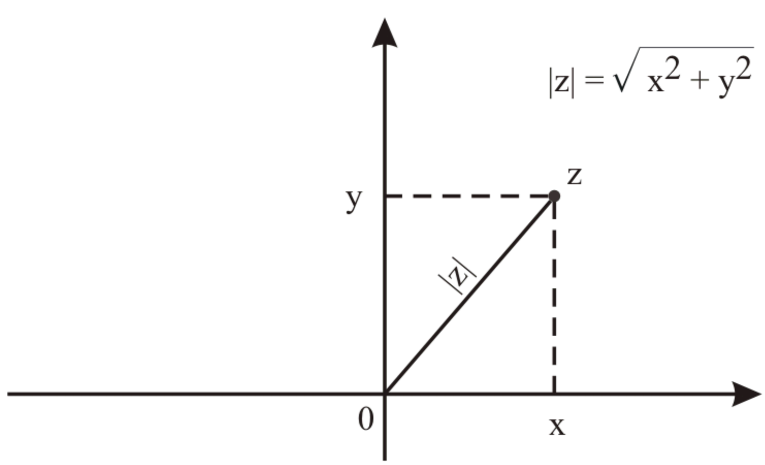



Fig. 9.1

<u>Exemplo</u> :

Sejam u , v e w os complexos : u = ( 2, -3) ; v = ( -2,0) e w = ( -1, 2).
Então,
u +v = ( 0, - 3) , u + w = ( 1, -1), | u | = $\sqrt{4+9}$ = $\sqrt{13}$, |u + w| =. $\sqrt{2}$

<u>Exemplo</u>:

Dados, graficamente, u e v na Fig. 9.2 represente, geometricamente, os complexos u + v ; u – v ; 2u ; ½ v ( Fig. 9.3)

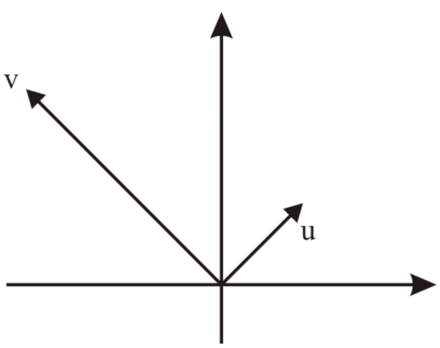



Fig. 9.2

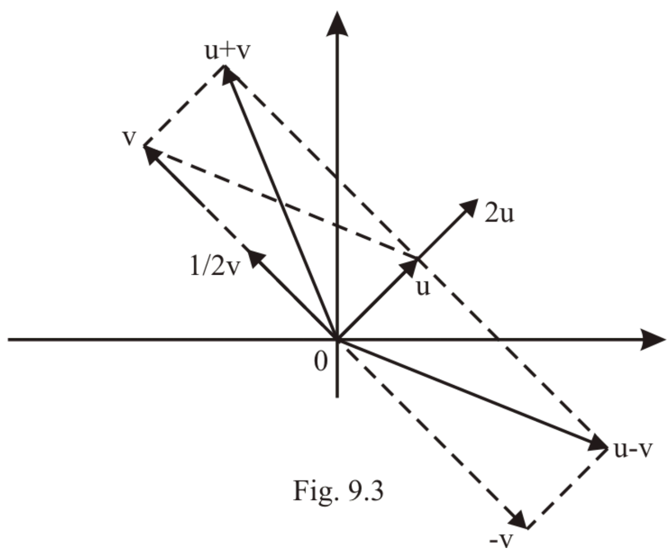



Fig. 9.3

Obs: Já observamos na **aula 1** que somar um par ordenado z = (x, y) com o par ordenado (3, 1) equivale , geometricamente, a operar em z uma translação do vetor (3,1). Estamos dizendo que somar um complexo z = (x, y) com o complexo (3, 1) equivale a operar no complexo z uma translação do complexo (3, 1).
Ver abaixo, Fig. 9.4 (a) e (b)

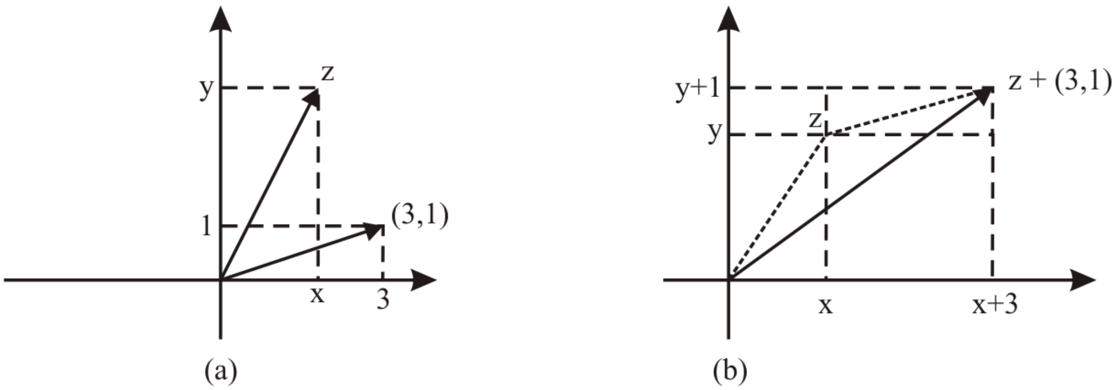



Fig. 9.4

Em geral, a soma equivale a uma translação e a multiplicação, como veremos adiante, equivale a uma rotação.

Obs: Se u e v não são colineares, os complexos 0, u , v e u + v são vértices de um paralelogramo e u + v é uma diagonal (Fig.9.4.(c)). A Fig. 9.4(d) ilustra um caso em que u e v são colineares.

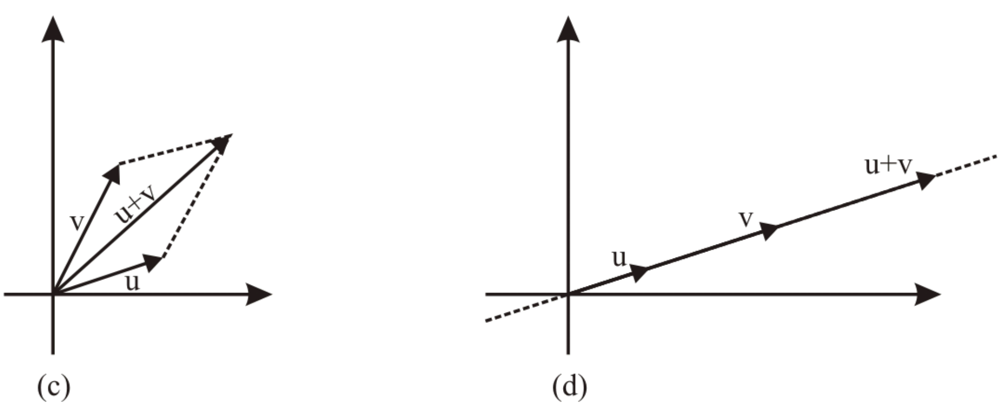



Fig. 9.4

<u>Exercício 9.1</u>:

Sejam u = ( 2, 4) e v = ( -3, 1). Interprete, geometricamente :

a) u + v, b) u – v , c) ½ u , d) 2v, e) -v.

Obs: Se $z \neq 0$, então $\frac{z}{|z|}$ isto é, $\frac{1}{|z|}z$ tem mesmo sentido e direção de z e módulo 1. Ele é dito o unitário de z (Fig.9.5)

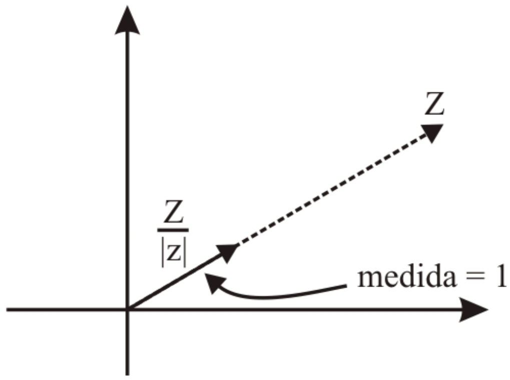



Fig. 9.5

Exercício Resolvido:

Represente, geometricamente, todos os complexos unitários de **C**.

Solução:

z = (a, b) tem módulo 1, isto é , $\sqrt{a^2+b^2}$ = 1 ou $a^2 + b^2 =1$ se e somente se z está sobre o círculo trigonométrico $\mathbf{S^1}$.

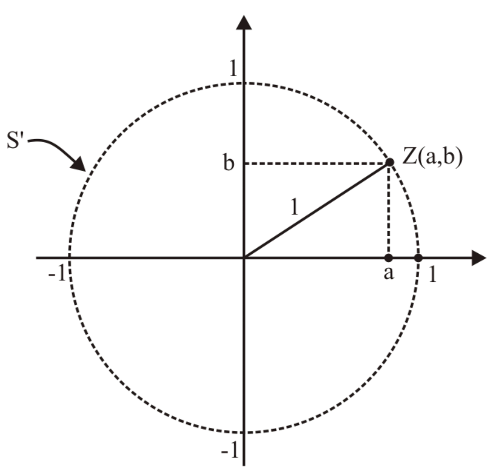



Fig. 9.6

Assim, se $|z| = 1$ então $z = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$, para algum $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

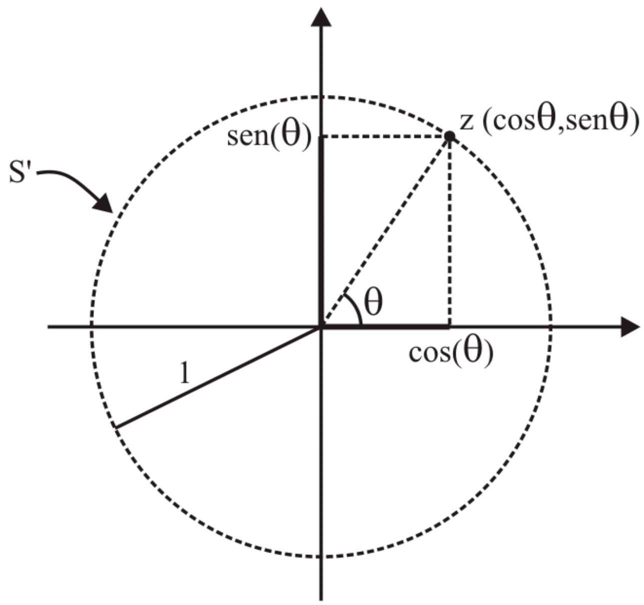



Fig. 9.7

Tal $\theta$ é dito <u>argumento de z</u>. Bem, deste modo, todo ângulo $\theta + 2k\pi$ é também um argumento de z . Mas se $0 \leq \theta \leq 2\pi$ então $\theta$ é dito <u>argumento principal</u> de z .

Podemos dizer que $\frac{z}{|z|} = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$, isto é,

$$z = |z| \, (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$$

dita expressão trigonométrica ou **forma trigonométrica** ou **forma polar** do complexo z .

<u>Exercício Resolvido:</u>

Seja z = (3 , 3) . Escreva a forma trigonométrica de z .

<u>Solução:</u> $|z| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Assim, $(3, 3) = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ou ainda

(3 , 3) = $3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , isto é, z = |z| ( cos(45º) , sen(45º) ) , conforme ilustra a figura abaixo .

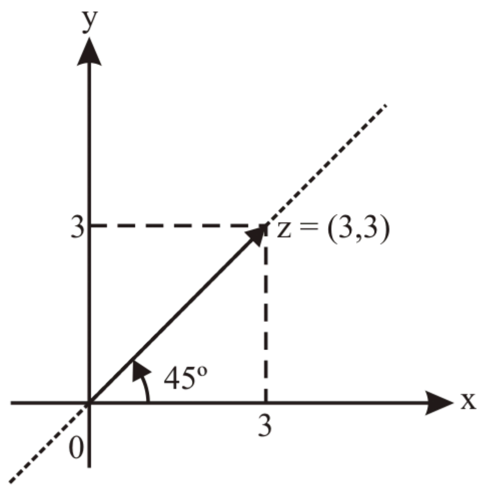



Fig. 9.8

<u>Exercício 9.2</u>:

Escreva os complexos abaixo na forma trigonométrica e calcule um argumento de z :
a) z = (1,-1) b) z = (2,0) c) z = (0,-3) d) z = (1/3, 0) e) z = ( -3,4) f) z = (3,-4)

## <u>9.4 A Multiplicação de Complexos</u>.

Finalmente, definiremos a <u>multiplicação</u> nos complexos.

Se $z_1$ = (a , b) e $z_2$ = (c , d) definimos o **produto** de $z_1$ por $z_2$ como o complexo $z_1.z_2$ cujas coordenadas são:

$$z_1.z_2 = (ac - bd\ ,\ ad + bc)$$

<u>Exemplo</u> :

(1, 2).(-3,4) = ( -3-8 , 4 – 6) = ( -11 , -2)

Exercício 9.3:

Verifique que :

1) z.w = w.z  e  z.(w + u) = z.w + z.u

2) i) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$  ii) $\dfrac{z_1.z_2}{|z_1.z_2|} = \dfrac{z_1}{|z_1|}.\dfrac{z_2}{|z_2|}$

Mas qual a motivação para tal "definição"? Como identificar a já referida rotação com a multiplicação?

Acompanhemos o que segue:

Vamos iniciar com os Complexos de módulo 1, isto é, com os que estão sobre **$S^1$**, ou seja, sobre o círculo trigonométrico.

Sejam $z_1$ e $z_2$ tais complexos. Então $z_1 = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ e $z_2 = (\cos(\beta), \text{sen}(\beta))$.

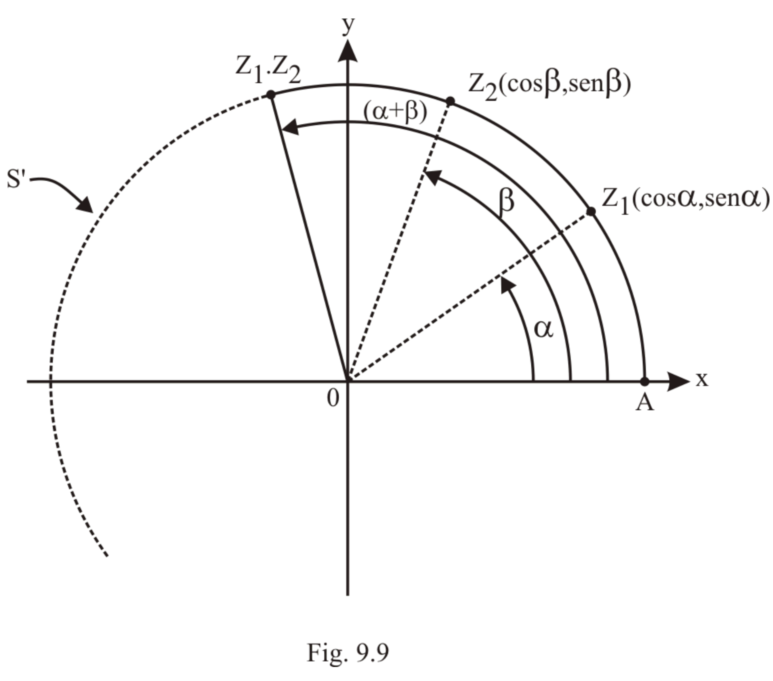



Fig. 9.9

$z_1$ define uma rotação $\alpha$ de OA e $z_2$ define uma rotação $\beta$ de OA.

O que ocorre com o complexo $z_1.z_2$ ?

Apliquemos a nossa definição de multiplicação de $z_1$ por $z_2$.

Tem-se :

$$z_1.z_2 = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)).(\cos(\beta), \text{sen}(\beta)) =$$
$$= (\cos(\alpha)\cos(\beta)-\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)\ ,\ \cos(\alpha)\text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha)\cos(\beta)) =$$
$$= (\ \cos(\alpha+\beta)\ ,\ \text{sen}(\alpha+\beta)\ ),$$

ou seja, acabamos de mostrar que o complexo $z_1.z_2$ é o complexo de $\mathbf{S^1}$ que define uma rotação $(\alpha+\beta)$ de OA.

Assim, poderíamos ter "<u>definido geometricamente</u>" $z_1.z_2$ como o vetor do círculo trigonométrico obtido somando as rotações de $z_1$ e de $z_2$, isto é , definido pela rotação $(\alpha+\beta)$ , qual seja, o complexo $z_1.z_2 = (\ \cos(\alpha+\beta)\ ,\ \text{sen}(\alpha+\beta)\ )$ .

<u>Exemplo</u>:

$(\sqrt{2}/2\ , \sqrt{2}/2\ )\ (-1, 0) = (\ \cos(45^o)\ ,\ \text{sen}(45^o)\ ).(\ \cos(180^o)\ ,\ \text{sen}(180^o)\ ) =$

$= (\ \cos(225^o)\ ,\ \text{sen}(225^o)\ ) = (-\sqrt{2}/2\ , -\sqrt{2}/2\ )$

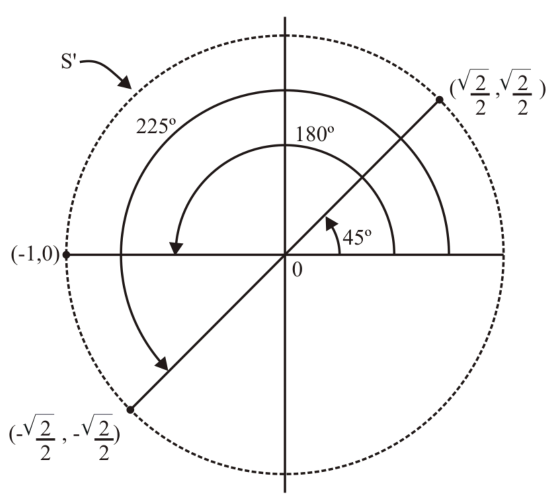



Fig. 9.10

Exercício 9.4 :

Determine ( $\sqrt{3}/2$ , - $1/2$). (0, 1)

i) usando a definição algébrica

ii) apoiado na interpretação geométrica.

Solução :

i) = ( $\sqrt{3}/2$ , - $1/2$). (0, 1) = ( $0-(-1/2)$ , $\sqrt{3}/2$ + 0 ) = ( + $1/2$ , $\sqrt{3}/2$ )

ii) ( cos(330), sen(330) ) . ( cos(90), sen(90) ) = ( cos(420), sen(420) ) =

= ( cos(60) , sen(60) ) (Fig. 9.11)

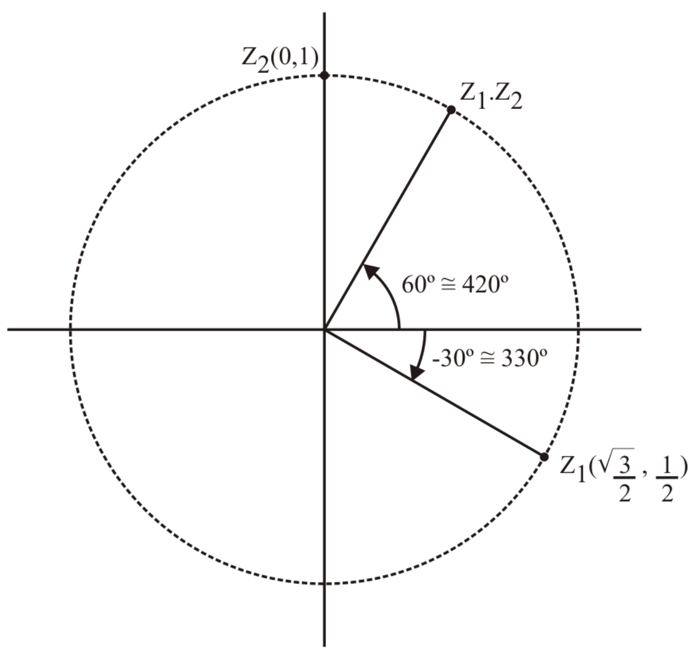



Fig. 9.11

Definição: O conjugado de um complexo z, anotado por $\bar{z}$ é o complexo $\bar{z}$ = (a , -b).

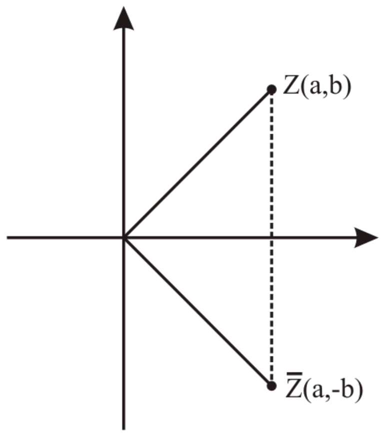



Fig. 9.12

Exercício Resolvido:

Seja z = (a, b) ≠ (0, 0). Obtenha o produto $\frac{\bar{z}}{|z|^2}.z$

Solução:

Seja z = (a, b) , então $|z|^2 = a^2 + b^2$ e $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a,-b)}{a^2+b^2}$ ou

$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ , logo $\frac{\bar{z}}{|z|^2}.z = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. (a, b) =

$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$, portanto

$\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ z = (1,0), ou seja, $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ é o inverso multiplicativo de z e anotado por $\frac{1}{z}$

Estamos dizendo que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , sempre que z ≠ (0,0).

Exemplo:

O inverso de (- 2, 3 ) é $\dfrac{(-2,-3)}{4+9} = \left(\dfrac{-2}{13},\dfrac{-3}{13}\right)$ ou seja, $\dfrac{1}{(-2,3)} = \left(\dfrac{-2}{13},\dfrac{-3}{13}\right)$.

Exercício 9.5:

Determine os inversos de (1,2), de (-3,1) e de (1, -1).

Definição:

Definimos o **quociente** $\dfrac{z}{w}$ como z. $\dfrac{1}{w}$, se w ≠ (0,0).

Assim, $\dfrac{z}{w} = z.\dfrac{1}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{|w|^2} = \dfrac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$

Obs: Sabemos que $|w|^2 = w.\ \overline{w}$ , logo dividir z por w equivale a multiplicar numerador (z) e denominador (w) pelo conjugado $\overline{w}$ de w.

Exercício Resolvido:

Determine $\dfrac{(1,3)}{(-3,4)}$

Solução:

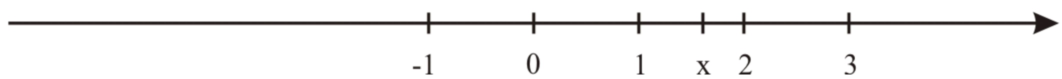
$$\frac{(1,3)}{(-3,4)} = \frac{(1,3).(-3,-4)}{(-3,4).(-3,-4)} = \frac{(9,-13)}{25} = \left(\frac{9}{25},\frac{-13}{25}\right)$$

Exercício 9.6:

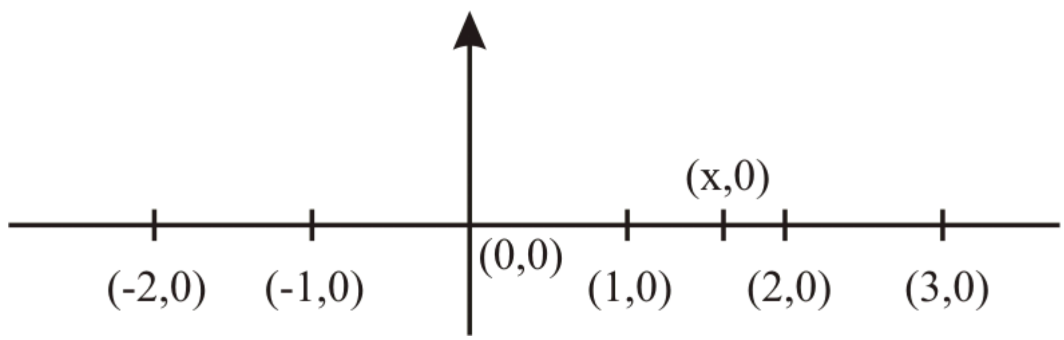
Determine $\dfrac{(5,1)}{(3,-1)}$

<u>*Questão importante*</u>: Como justificar a afirmação de que os complexos "estendem" os reais se, ao falarmos em **C** ,estamos sempre pensando em dois números reais ordenados ( pares ordenados) e quando nos referimos a **R** temos em mente apenas um número real? Então em que sentido, **R** $\subset$ **C** ?

<u>Resposta</u>: Seja **R** o conjunto dos números reais. Na aula 1 interpretamos **R**, geometricamente, como uma reta ou eixo (que passamos a chamar de eixo real ou reta real) onde cada ponto representa um número real :

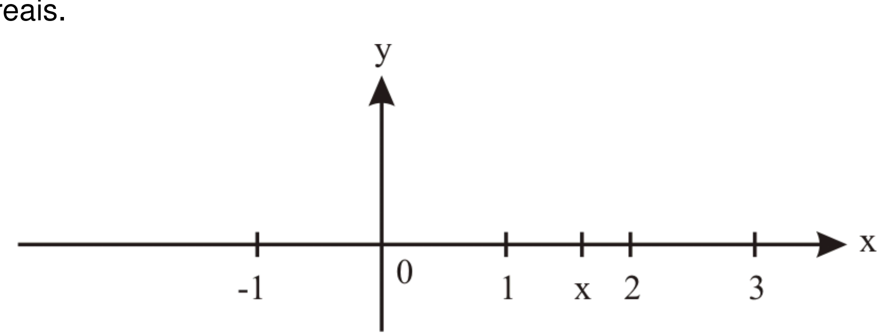



Quando criamos um outro eixo real ( que passamos a anotar por OY) , perpendicular ao eixo real **R** ( o qual passamos a anotar por OX), o que estamos fazendo é imergir o nosso eixo real OX no plano. Assim, cada ponto (número real **x** ) do nosso eixo OX agora passa a ser um par ordenado onde a segunda coordenada é zero.




Nos desenhos, por simplicidade de notação, omitimos a $2^a$ coordenada (que sabemos ser 0 ) e escrevemos 1 em lugar de (1,0), -3 em lugar de ( -3, 0), **x** em lugar de ( **x** , 0) , etc..

O que estamos fazendo é identificando um eixo contido no plano com os números reais.



Ou seja, a cada número real **a** de **R** associamos o par ordenado (**a** , 0) , isto é, consideramos o eixo real **OX** . Temos que o eixo real **OX** $\subset$ **C**, isto é, o conjunto **OX** = { (**a**,0); a$\in$ **R** } $\subset$ **C**. Sejam $z_1$ e $z_2 \in$ **OX** quaisquer e apliquemos a $z_1$ e $z_2$ as operações de adição e multiplicação **definidas para os elementos de C**. Teremos que se $z_1$ e $z_2$ estão em **OX** , tem-se

$$z_1 = (\mathbf{a},0) \text{ e } z_2 = (\mathbf{c},0),$$

logo, pelas definições de **adição e multiplicação** dadas **em C** obteremos:

$z_1 + z_2 = (\mathbf{a}+\mathbf{c},0)$ e $z_1.z_2 = (\mathbf{ac},0)$ , logo $z_1 + z_2$ e $z_1.z_2$ também são elementos de **OX**.

Acabamos de mostrar que, se identificamos os pares de números reais (**x**,0) com os números reais **x**, as operações de adição e de multiplicação coincidem com a adição e a multiplicação (respectivamente, **a**+**c** e **ac,** que já conhecíamos) entre os reais. Assim, identificamos o par (**a**,0) com o número real **a**. Neste sentido, o eixo real **OX** passa a ser identificado com o conjunto **R** dos reais , daí dizemos que **R** $\subset$ **C**, pois **OX** $\subset$ **C**. Por esta razão, tratamos o complexo (**a**,0) simplesmente como o número real **a** e escrevemos, por abuso de notação, (**a**,0) = **a**.

Em particular, de acordo com o que acabamos de dizer, o complexo (**-1**,0) será identificado ao real - **1** e, neste sentido, dizemos que o complexo (-**1**,0) = - **1** (*).

Um complexo muito especial:

O complexo **(0,1)** é anotado por **i** e dito **unidade imaginária**.

Exercício Resolvido:

Represente no plano os especiais complexos : (**1**, **0**), (**0**,**1**) ( ou **i**) e (**- 1**,**0**). Dê seus respectivos argumentos e formas polares( trigonométricas).

Solução:

arg(**1**, **0**) = 0; (**1**, **0**) = ( cos(0), sen(0) )

arg(**0, 1**) = 90; (**0, 1**) = ( cos(90), sen(90) )

arg(-**1**, **0**) = 180; (-**1**, **0**) = ( cos(180), sen(180) )

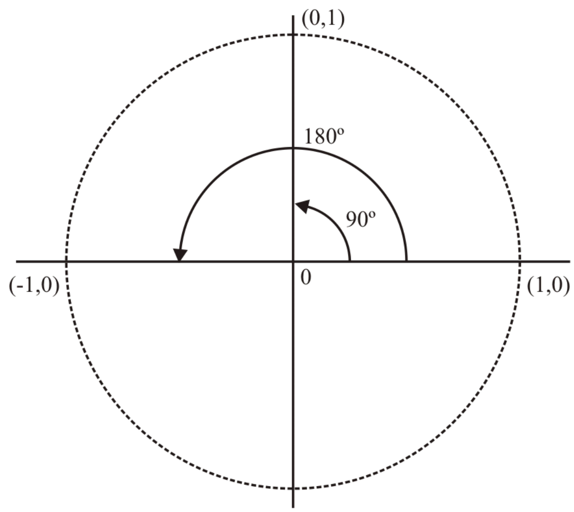



Fig. 9.13

Exercício Resolvido:

a) Obtenha **i.i**, ou seja, **i** $^{2}$.

b) Interprete, geometricamente o particular produto do ítem a)

Solução:

a) Tem-se : $\mathbf{i^2}$ = **i . i** = **(0,1).(0,1)** = (0 –1, 0 +0) = **(-1,0)** , ou seja, de acordo com o que estabelecemos em (*) acima, $\mathbf{i^2}$ = **- 1**

c) Interpretação geométrica do particular produto do ítem a):

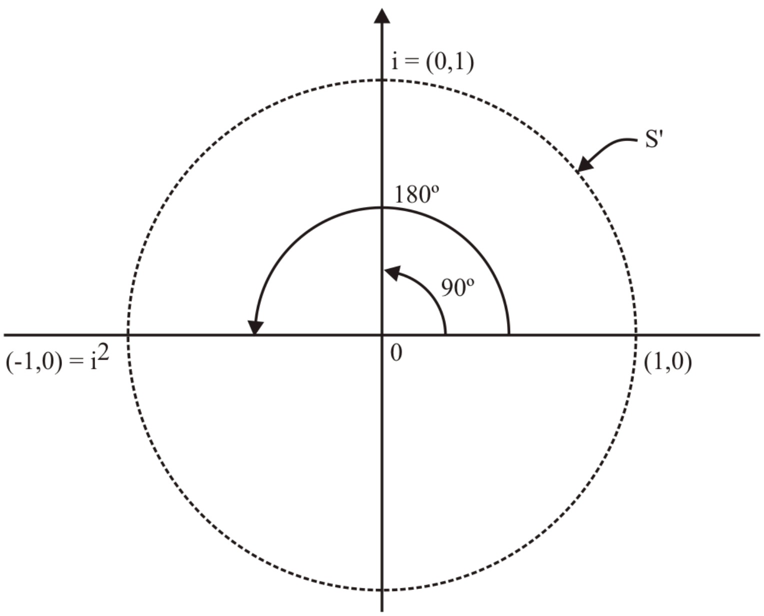



Fig. 9.14

Multiplicar **i** por **i** significa aplicar em **i** uma rotação de 90º (pois 90º é o argumento de **i**). Mas **i** é resultado de uma rotação de 90º do vetor **(1,0)**. Portanto, $\mathbf{i^2} = \mathbf{i} \,.\, \mathbf{i}$ trata-se de uma dupla rotação de 90º do vetor **(1,0)** ou , equivalentemente, de uma rotação de 180º ( 90º + 90º )do vetor **(1,0)**.

A forma algébrica de um complexo.

Se z é um complexo qualquer, isto é , se z = (a,b) , com a e b$\in$**R**, podemos escrever :

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a\,\mathbf{(1,0)} + b\,\mathbf{(0,1)} = a\,.\mathbf{1} + b.\mathbf{i} = a + bi$$

dita a **forma algébrica** do complexo z.

O real a é dito a parte real do complexo z (Re(z)) e o real b é dito a parte imaginária de z (Im(z)).

Representação geométrica:

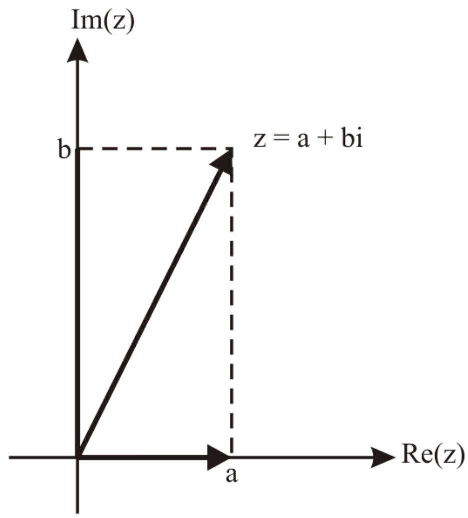



Fig. 9.15

A forma algébrica é muito útil operacionalmente pois, tanto para a soma quanto para o produto de complexos, ela sugere que operemos como se estivéssemos operando em **R** os polinômios do primeiro grau na variável x, onde **i** faz "o papel" do **x**, tal que $\mathbf{x^2} = \mathbf{-1}$.

Assim, se $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ então, na forma algébrica , escrevemos:

$z_1 = a + b\,\mathbf{i}$ , $z_2 = c + d\,\mathbf{i}$ , logo $z_1 + z_2 = (a+c) + (c+d)\,\mathbf{i}$ e

$z_1.z_2 = (a+b\,\mathbf{i}).(c+d\,\mathbf{i}) = ac + ad\,\mathbf{i} + bc\,\mathbf{i} + bd\,\mathbf{i}^2 = (ac-bd) + (ad + bc)\,\mathbf{i}$

Exemplo:

$z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 5 + i$.

Tem –se : $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 5 + i$.

$z_1 + z_2 = ( 2 - 3i) + (5 + i) = ( 2 + 5) + ( -3 + 1)i = 7 - 2i$ e

$z_1.z_2 = ( 2 - 3i).( 5 + i) = 2.5 + 2i - 3.5i - 3i^2 = 10 + 2i - 15i + 3 = 13 - 13i$

Exercícios 9.7:

a).Determine, na forma algébrica, -z, $\bar{z}$ , |z | , $\frac{1}{z}$ , z.$\bar{z}$ .

b) Em que subconjunto de **C,** z = $\bar{z}$ ?

Exercício Resolvido:

Determine :

a) A forma algébrica de um complexo unitário qualquer. Dê um exemplo.

b) As formas trigonométrica e algébrica de um complexo z ≠ 0 qualquer.

Solução:

a) Se |z| = 1, então z = (cos(θ) , sen(θ) ), logo, a forma algébrica de z é

z = cos(θ) + **i** sen(θ), abreviadamente, z = c**i**s(θ)

Um exemplo é : z = $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$**i** = cos(30°) + **i** sen(30°) = ou z = c**i**s(30° )

b) Se z ≠ 0 é qualquer, então $\frac{z}{|z|}$ = ( cos(θ), sen(θ) ) ou z = |z| ( cos(θ) , sen(θ) ),

isto é

z = |z| (cos(θ) + **i**sen(θ)) , ou z = |z| c**i**s(θ)

Exercício 9.8 :

I. Descreva, geometricamente, o conjunto dos complexos z tais que:

a) Re(z) > 2, b) | z – **i**| < 3, c) Im(z) ≥ -1 d) | z | ≥ 2

II. Escreva de uma outra maneira os complexos dados abaixo:

a) 3c**i**s$45^0$, b) –4c**i**s$30^0$, c) 5c**i**s3π/2 , d) –2c**i**sπ , e) 2-3**i** , f) –1 + 2**i** , g) 1 – **i**

## Aula 10

Objetivamos, nesta aula, deixar claras as operações para obtenção da potência n de um complexo z (fórmula de De Moivre), bem como para a raiz n-ésima de um complexo z : $z^n$ e $\sqrt[n]{z}$ , respectivamente. Fazemos também as interpretações geométricas das raízes da unidade.

A potência n de um complexo :

Conforme já observamos, para obter o produto de um complexo z por w é suficiente multiplicar os módulos de z e de w e somar seus argumentos. Assim, se z é um complexo, $z = |z|(\cos(\theta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\theta))$ o produto de z por z ou seja,

$$z^2 = |z|^2(\cos(2\theta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(2\theta)).$$

Também, $z^3 = z^2.z = |z|^3(\cos(3\theta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(3\theta))$ e , de um modo geral,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(n\theta))$$

Exemplos:
$z = 3\text{cis}(45^0)$ , então $z^3 = 27\text{cis}(135^0)$

De um modo geral, temos:

$$(|z|\cos(\theta) + \mathbf{i}\,|z|\operatorname{sen}(\theta))^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(n\theta)),$$

dita a **fórmula de De Moivre**.

Exercício 10.1:

Obtenha : a) $(1-2i)^3$, b) $(4-3i)^{25}$ , c) $(-1+i)^{149}$, d) $i^{18}$ e) $i^{1327}$, f) $i^3$

Exerçicio Resolvido :

Obtenha $\cos(2\theta)$ usando a fórmula De Moivre.

Solução:

$$\cos(2\theta)+\mathbf{i}\,\mathrm{sen}(2\theta) = (\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta))^2 = \cos^2(\theta)+\mathbf{i}^2\mathrm{sen}^2(\theta) + 2\mathbf{i}\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) =$$
$$= \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) + 2\mathbf{i}\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)$$

Igualando as partes real e imaginária, resulta que :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) \quad \text{e } \mathrm{sen}(2\theta) = 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

A raiz n-ésima de um complexo

Dado um complexo w, achar uma raiz n-ésima de w consiste em achar um z tal que

$$z^n = w \qquad (*)$$

Vamos supor $w \neq 0$, pois se $w = 0$ a única raiz n-ézima de w é $z = 0$.

Sendo assim, vamos escrever $w = |\,w\,|\mathrm{cis}(\theta)$ e $z = |\,z\,|\mathrm{cis}(\varphi)$, onde $|\,w\,|$ e $\theta$ são dados e $|\,z\,|$ e $\varphi$ são as incógnitas. Assim, (*) fica:

$$|\,z\,|^n \mathrm{cis}\,(n\,\varphi) = |\,w\,|\,\mathrm{cis}\,(\theta)$$

resultando que :

$$|\,z\,|^n = |\,w\,| \quad \Rightarrow \quad |\,z\,| = \sqrt[n]{|w|} \quad \text{e}$$

$\mathrm{cis}(n\varphi) = \mathrm{cis}(\theta)$ ou $\cos(n\varphi) = \cos(\theta)$ e $\mathrm{sen}\,(n\varphi) = \mathrm{sen}(\theta)$ .

Das identidades de cosseno e seno entre os arcos $n\varphi$ e $\theta$ segue que $n\varphi = \theta + 2k\pi$ , logo $\varphi = (\theta + 2k\pi)/n$ , com $k\in$ **Z.**

Mas para que $0 \leq \varphi < 2\pi$ é necessário que $0 \leq k < n-1$.

Para cada k = 0, 1, 2, 3...,n –1,

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\ \ (\cos((\theta + 2k\pi)/n) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}((\theta + 2k\pi)/n))$$

é uma raiz de w de módulo $\sqrt[n]{|w|}$

<u>Exercício Resolvido</u>:

Determinar as raízes cúbicas do complexo unitário $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$

<u>Solução</u>:

Temos que $w = \cos(60^o + k360^o) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(60^o + k360^o)$, com $k \in \mathbf{Z}$. Portanto, pela fórmula De Moivre, $z_k = \cos \frac{60^o + k360^o}{3} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{60^o + k360^o}{3}$, com $k \in \mathbf{Z}$ é tal que

$$(z_k)^3 = w, \text{ ou}$$

seja , $z_k$ é uma raiz cúbica de w, para todo $k \in \mathbf{Z}$ . Vamos explicitar estas raizes:

Se k =0 então $z_0 = \cos(20^o) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(20^o)$,

Se k =1 então $z_1 = \cos(140^o) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(140^o)$,

Se k =2 então $z_2 = \cos(260^o) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(260^o)$,

Se k =3 então $z_3 = \cos(20^o + 360^o) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(20^o + 360^o) = z_0$ .

Paramos em k =3 pois $z_3 = z_0$. Naturalmente : $z_4 = z_1$, $z_5 = z_2$, etc.. e as raízes estão se repetindo, inclusive quando atribuímos valores negativos ao inteiro k. Portanto, temos de fato 3 raízes distintas de w, correspondentes aos ângulos de $20^o$ $140^o$ e $260^o$. Observamos, ao dispormos os complexos $z_k$ sobre $\mathbf{S}^1$, que estas raízes $z_k$ dividem $\mathbf{S}^1$ em 3 arcos iguais.

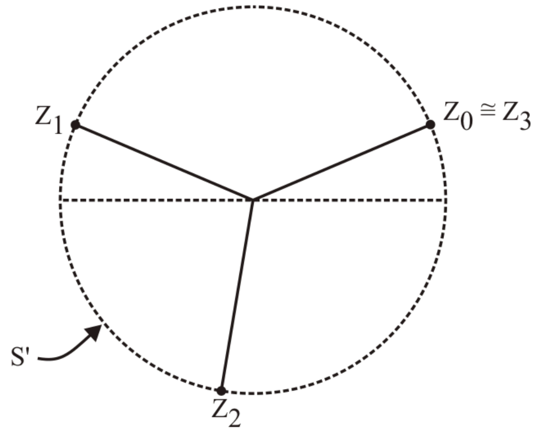



Fig. 10.1

Observamos ainda que o exemplo acima é um caso particular do caso geral segundo o qual se

$$w = \cos(\theta + 2k\pi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\theta + 2k\pi),$$

então as raízes n-ésimas de w são os complexos da forma:

$$z_k = \cos((\theta + 2k\pi)/n) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}((\theta + 2k\pi)/n) \qquad \text{ou}$$

$$z_k = \cos(\theta/n + k\,.\,(2\pi/n)) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\theta/n + k\,.\,(2\pi/n))$$

expressão que deixa claro que os argumentos estão numa P.A. de razão $2\pi/n$ e onde o primeiro termo é $\theta/n$.

As raízes distintas são dadas pelos inteiros k = 0, 1, 2, ......., n-1.

Para $k \geq n$ e $k \leq -1$ as raízes coincidirão com uma destas n raízes.

Obs: Em particular, a divisão da circunferência $S^1$ em n partes iguais, equivale à determinação das raízes n-ésimas do complexo 1. Observe que sendo

$$1 = \cos(0) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(0),$$

as raízes n-ésimas da unidade podem ser escritas por:

$$(*) \qquad \mathbf{1}^{1/n} = \cos(2k\pi/n) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(2k\pi/n), \quad k = 0, 1, 2, ...., n-1.$$

Anotemos por **u** a raiz correspondente a k = 1, isto é,

$$\mathbf{u} = \cos(2\pi/n) + \mathbf{i}\,\text{sen}(2\pi/n).$$

Pela fórmula De Moivre, as raízes em (*) são, fazendo k = 0, 1, 2, ......., n-1,

$$\mathbf{1}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^2, \ldots\ldots, \mathbf{u}^{n-1}$$

Assim, no plano complexo, as raízes n-ésimas da unidade são os vértices do polígono regular de n lados, inscrito no círculo $\mathbf{S}^1$ ( isto é, no conjunto dos w tais que | w | =1) e com vértice no ponto z =1.

Veja figura (a) para n = 3 e figura (b) para n = 6.

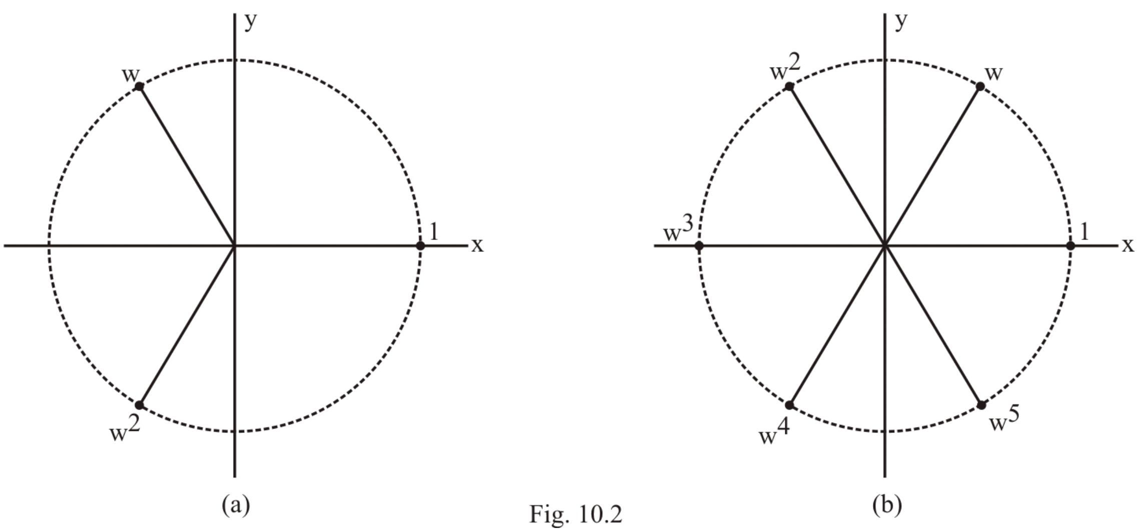



Fig. 10.2

Assim, se $z_1$ é uma raiz n-ésima qualquer de z, então

$$z_1, z_1\mathbf{u}, z_1\mathbf{u}^2, z_1\mathbf{u}^3, \ldots\ldots\ldots, z_1\mathbf{u}^k, \ldots\ldots, z_1\mathbf{u}^{n-1}$$

são raízes n-ésimas de z, pois multiplicar $z_1$ por $\mathbf{u}^k$ corresponde a aumentar de $2k\pi/n$ o argumento de $z_1$

Expl: n =8 e $z_1$ = raiz (índice 8) 8-ésima de z.

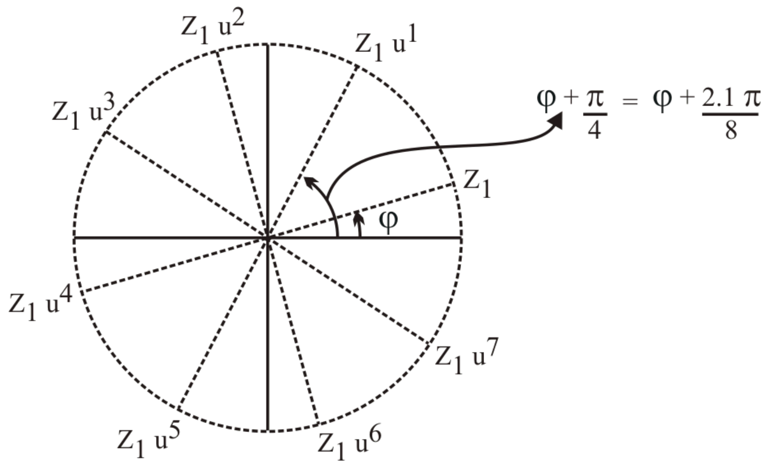



Fig. 10.3

Os números complexos são importante instrumento para resolução de problemas de geometria que envolvem rotações.

<u>Exercício 10.2</u>:

a) Determine as 5 raízes da unidade
b) Os pontos A(1,2) e B(3,5) são vértices de um triângulo equilátero ABC. Determine o vértice C, através de uma rotação de AB.

Os dois exercícios resolvidos que seguem têm por objetivo desenvolver um pouco mais esta particular e importante raiz de um complexo, qual seja, a raiz quadrada.

<u>Exercício Resolvido:</u>

a) Seja w complexo de argumento $\theta$. Explicite as raízes quadradas de w.

Solução:

Tem-se $z^2 = w = |w|\text{cis}(\theta) \Rightarrow z = \sqrt{|w|}\ \text{cis}(\theta/2 + k\pi)$, com k = 0 ou k = 1.

Para k =0, obtemos $z_1 = \sqrt{|w|}\ \text{cis}(\theta/2)$ e

para k =1 obtemos $z_2 = \sqrt{|w|}\ \text{cis}(\theta/2 + \pi) = -\sqrt{|w|}\ \text{cis}(\theta/2) = -z_1$

Resulta que as raízes quadradas de w são $\pm\sqrt{|w|}\ \text{cis}(\theta/2)$.

b) Determine as raízes quadradas de $w = 4 - 3\mathbf{i}$

Solução:

Tem-se : $z_2 = 4 - 3\mathbf{i} = 5\ (4/5 - 3/5\ \mathbf{i}) = 5\ \text{cis}\ (-36{,}87^o) \Rightarrow$

$z = \pm\sqrt{5}\ \text{cis}(-36{,}87^o/5) = \pm\sqrt{5}\ \text{cis}(-18{,}43^o) \cong \pm\ (2{,}121320 - \mathbf{i}\ 0{,}707107)$,

ou seja :

$$z_1 \cong (2{,}121320 - \mathbf{i}\ 0{,}707107) \quad \text{e} \quad z_2 \cong -\ (2{,}121320 - \mathbf{i}\ 0{,}707107)$$

Bem, no caso particular da raiz quadrada, poderíamos ter apelado para procedimento mais simples, qual seja:

Sendo z o complexo raiz quadrada de $4 - 3\mathbf{i}$ , temos que $z = a + b\mathbf{i}$ é tal que:

$$z^2 = 4 - 3\mathbf{i} \ \text{ ou } \ (a + b\mathbf{i})^2 = 4 - 3\mathbf{i}\text{ , isto é,}$$

$$a^2 + 2ab\mathbf{i} - b^2 = 4 - 3\mathbf{i} \quad \text{ou ainda , } (a^2 - b^2) + 2ab\mathbf{i} = 4 - 3\mathbf{i}$$

Igualando-se a parte real e a imaginária dos complexos, vem que:

$$a^2 - b^2 = 4$$

$$\text{e} \qquad 2ab = -3\ .$$

Assim chegamos a um sistema de duas equações e duas incógnitas , cujas soluções nos darão as partes real e imaginária das raízes procuradas.

Tirando o valor de b na 2ª equação e substituindo na 1ª equação vem:

$$4a^4 - 16a^2 - 9 = 0, \quad \text{logo } a^2 = 9/2 .$$

Resulta que $z = \pm\ ( 3/\sqrt{2} \ - \ \mathbf{i}\ 1/\sqrt{2}\ ) \cong \pm\ ( 2{,}121320 - \mathbf{i}\ 0{,}707107)$

Exercício 10.3:

Determine as raízes quadradas de:

a) $12 - 5\mathbf{i}$ b) $1+\mathbf{i}$ c) $\mathbf{i}$ d) $-10$

## Aula11

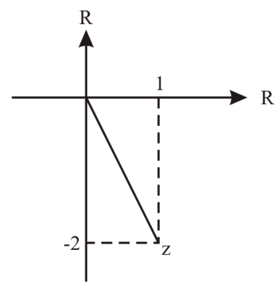
Nesta aula você é convidado a resolver exercícios de Números Complexos. Não nos preocupamos em ordená-los de acordo com a seqüência das aulas anteriores, nem mesmo quanto ao grau de dificuldade. Você encontrará exercícios muito elementares e outros mais elaborados, dentre os quais algumas questões de conceituados vestibulares, bem como algumas de avaliações em cursos de especialização para professores de Matemática. Esta aula consta de Exercícios Resolvidos e Exercícios Propostos, para os quais seria interessante você tentar soluções diferentes das apresentadas .

## Exercícios Resolvidos

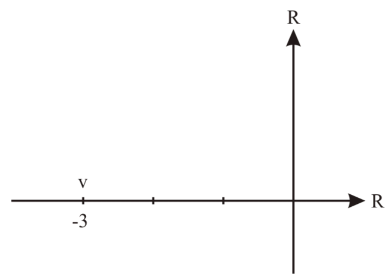
**1.** Represente no plano e calcule o módulo dos complexos:

a) z = (1 , -2) b) v = (-3 , 0) c) w = $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Solução:



(a)

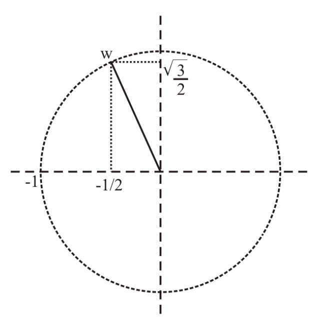


(b)

| z | = $\sqrt{1+(-2)^2}$ = $\sqrt{5}$

| v | = $\sqrt{9+0}$ = 3

c) | w |= $\sqrt{(-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$ = 1



(c)

**2.** Escreva $z = (\sqrt{3}\ , 1)$ ou $z = \sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica.

Solução :

$| z | = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \frac{z}{|z|} = \frac{(\sqrt{3},1)}{2} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}) = (\cos(30°), \text{sen}(30°)) \Rightarrow$

sendo a forma trigonométrica de $z = | z |(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)$ $\Rightarrow$

tem-se $(\sqrt{3}\ , 1) = 2(\cos(30°), \text{sen}(30°))$.

**3.** Determine o produto abaixo algebricamente e geometricamente:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Solução:

a) Algebricamente :

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{3}{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{4}{5},-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{3}{5}\right) = (-\frac{7}{5\sqrt{2}},-\frac{1}{5\sqrt{2}}).$$

Equivalentemente se preferimos escrever $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ e $z_2 = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ ,

o produto fica :

$$z_1.z_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i).(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i) = -\frac{3}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}}i + \frac{3}{5\sqrt{2}}i + \frac{4}{5\sqrt{2}}i^2 =$$

$$= -\frac{3}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}}i + \frac{3}{5\sqrt{2}}i = \frac{-7}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{2}}i$$

b) Geometricamente :

$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos(135^{\circ}), \text{sen}(135^{\circ}))$ e $(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) \cong (\cos(53^{\circ}\ 7'), \text{sen}(53^{\circ}\ 7'))$, então o complexo resultante do produto:

$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}).(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) \cong (\cos(135^{\circ} + 53^{\circ}\ 7'), \text{sen}(135^{\circ} + 53^{\circ}\ 7')) =$

$= (\cos(188^{o}\ 7'), \text{sen}(188^{o}\ 7')) = (\frac{-7}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{5\sqrt{2}})$

Obs :Esta última igualdade foi obtida na calculadora.

**4.** Determine o argumento de i ( 1+ i) :

a) recorrendo à soma dos argumentos;

b) diretamente, após multiplicação.

c) Represente, graficamente, o complexo i ( 1+ i).

Solução:

a) arg i = $\frac{\pi}{2}$ e para o argumento de w = (1 + i) é suficiente obter | w | = $\sqrt{2}$ , logo

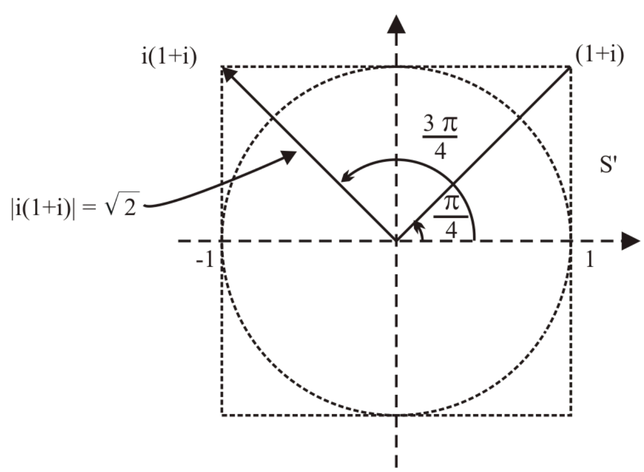
w = $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ ou w = $\sqrt{2}$ (cos ($\frac{\pi}{4}$) + i sen ($\frac{\pi}{4}$)), logo arg w = $\frac{\pi}{4}$.

Resulta que o argumento de z = i (1 + i) = $\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{3\pi}{4}$.

b) i (1 + i) = i + i$^2$ = i – 1 = -1 + i, logo

z = $\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ = $\sqrt{2}$ ( cos ($\frac{3\pi}{4}$) + sen ($\frac{3\pi}{4i}$) ), logo argumento de z = $\frac{3\pi}{4}$.

c)




**5.** Use a fórmula de Moivre para obter a expressão de cos (2θ) em função de θ.

Solução:

cos (2θ) + i sen (2θ) = ( cos (θ) + i sen (θ) )$^2$ = cos$^2$ (θ) + i$^2$ sen$^2$ (θ) + 2cos (θ)sen (θ) i =

= ( cos$^2$ (θ) - sen$^2$ (θ) ) + i.2cos (θ)sen (θ).

Assim, igualando-se as partes real e imaginária de ambos os lados da igualdade, vem :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) \quad \text{e} \quad \text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta).$$

Obtivemos, portanto, cosseno e seno do arco duplo. De um modo geral, obtemos $\cos(n\theta)$ e $\text{sen}(n\theta)$ a partir da "Fórmula de Moivre".

**6.** Seja z um complexo qualquer e θ o argumento de z. Escreva **z** e **i** na forma polar, multiplique-os algebricamente e represente, graficamente, o produto **iz**.

<u>Solução</u>:

$z = |z|(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$, e $i = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}))$

Então $iz = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2})) \cdot |z|(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) =$

$= |z|(i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}).\cos(\theta) + i^2\text{sen}(\frac{\pi}{2}) \cdot \text{sen}(\theta)) =$

$= |z|(i\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)) = |z|(-\text{sen}(\theta) + i\cos(\theta)) =$

$= |z|[\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})].$

**7.** Da definição de quociente $\frac{z}{w}$ de dois complexos, qual seja, $\frac{z}{w} = \frac{z.\overline{w}}{|w|} = \frac{z.\overline{w}}{w.\overline{w}}$

concluímos que a divisão de z por w equivale a multiplicar numerador e denominador por $\overline{w}$.

Use este fato para :

a) dividir 2 + 3i por 3 – 2i;

b) obter, diretamente, a expressão de $\frac{z}{w}$ na forma trigonométrica.

<u>Solução</u>:

a) $\dfrac{5+3i}{3-2i}=\dfrac{(5+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{15+10i+9i-6}{9+4}=\dfrac{9+19i}{13}=\dfrac{9}{13}+\dfrac{19}{13}i$

b) z = | z |( cos $\theta_1$ + i sen $\theta_1$) e w = | w |( cos $\theta_2$ + i sen $\theta_2$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}.\frac{(\cos\theta_1+isen\theta_1)(\cos\theta_2-isen\theta_2)}{(\cos\theta_2+isen\theta_2)(\cos\theta_2-isen\theta_2)}=$$

$$=\frac{|z|}{|w|}.\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-isen\theta_2\cos\theta_1+isen\theta_1\cos\theta_2+sen\theta_1 sen\theta_2}{\cos^2\theta_2+sen^2\theta_2}=$$

$$=\frac{|z|}{|w|}.[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\,\text{sen}\,(\theta_1-\theta_2)].$$

**8.** Seja z = 2( cos ($\frac{\pi}{4}$)+ i sen ($\frac{\pi}{4}$) ). Determine $z^7$.

<u>Solução</u>:

$z^7$ = [2(cos ($\frac{\pi}{4}$) + i sen ($\frac{\pi}{4}$)]$^7$ = $2^7$(cos ($\frac{7\pi}{4}$) + i sen ($\frac{7\pi}{4}$) ) =

= 128( cos ($\frac{7\pi}{4}$) + i sen ($\frac{7\pi}{4}$) ) = 128($\frac{\sqrt{2}}{2}$ – i$\frac{\sqrt{2}}{2}$) = 64$\sqrt{2}$ - 64$\sqrt{2}$ i

**9.** Determine $(1 – i)^{10}$.

<u>Solução</u>:

Se z = 1 – i $\Rightarrow$ | z | = $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ cos θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e sen θ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ = = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$, portanto

θ = $\frac{7\pi}{4}$, logo 1 – i = $\sqrt{2}$ ( cos ($\frac{7\pi}{4}$) +i sen ($\frac{7\pi}{4}$) ), assim

$(1 – i)^{10}$ = $(2^{1/2})^{10}$( cos ($\frac{70\pi}{4}$) + i sen ($\frac{70\pi}{4}$) ).

Resulta que $(1 - i)^{10}$ = $2^5$[cos ($\frac{35\pi}{2}$) + i sen ($\frac{35\pi}{2}$)], mas

$\frac{35\pi}{2}$ = $\frac{32\pi}{2}$ + $\frac{3\pi}{2}$ = 16π + $\frac{3\pi}{2}$ = 8.2π + $\frac{3\pi}{2}$, ou seja, $\frac{35\pi}{2}$ é côngruo com $\frac{3\pi}{2}$,

logo $(1 - i)^{10}$ = $2^5$[cos ($\frac{3\pi}{2}$) + i sen ($\frac{3\pi}{2}$)] = $2^5$(0 – i) = -32 i.

**10.** Determinar as raízes cúbicas de **w = - i**.

Solução:

Tem-se w = 0 – i , logo | w | = 1 e arg (w) = $-\frac{3\pi}{2}$, pois cos (θ) = $\frac{0}{1}$ = 0 e sen (θ) = $\frac{-1}{1}$ = -1.

Resulta que w = $1[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2})]$

A fórmula de Moivre para as raízes n-ézimas de um número complexo w é dada por:

$$w_k = \sqrt[n]{|w|}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n})] \qquad (*)$$

De (*) vem :

$$w_k = \sqrt[3]{1}\ [\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)], \text{ com } k = 0, 1 \text{ e } 2.$$

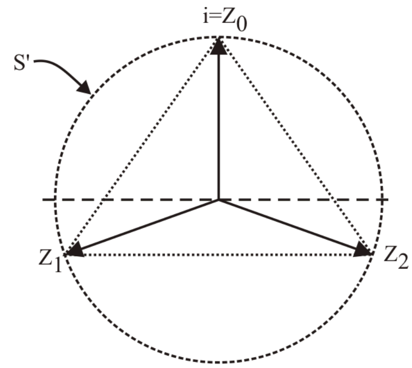
Assim : quando k = 0, $\varphi = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, quando k = 1, $\varphi = \frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ e quando k = 2, $\varphi = \frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$. Resulta que

$w_o = 1[\cos(\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})] = i$ ,

$w_1 = 1[(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{6})] = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ e

$w_2 = 1[(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i \operatorname{sen}(\frac{11\pi}{6})] = +\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2}) = +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Ou seja, as raízes cúbicas de –i têm módulo 1, logo estão sobre $S^1$.




Observamos que $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{3\pi}{6}$, logo $\frac{3\pi}{6}$ , $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ dividem $S^1$ em 3(três) arcos côngruos de medida $\frac{4\pi}{6}$ rd. Assim, $z_o$ , $z_1$ e $z_2$ são vértices de um triângulo equilátero.

Observamos ainda que se fizermos k = 3, teremos $z_3 = z_0$, k = 4 teremos $z_4 = z_1$ e k =5 teremos $z_5 = z_2$, etc...

**11.** Resolva, em C, a equação $x^4 - 1 - i = 0$.

<u>Solução</u>:

Esta equação equivale a determinar x tal que $x^4 = 1 + i$, ou seja, precisamos determinar as raízes quartas do complexo z = 1 + i.

z = 1 + i , logo de acordo com nossa notação : a = 1, b = 1.

$| z | = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4} \quad ; \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Portanto:

$z = \sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))$

Aplicando a segunda fórmula de Moivre, temos:

$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i \text{ sen } (\frac{\theta+2k\pi}{n})] \Rightarrow$

$\omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\ [\cos(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}) + i \text{ sen } (\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})]$

$\omega_k = \sqrt[8]{2}\ [\cos(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}) + i \text{ sen } (\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})]$

Como n = 4, então k poderá ser 0 , 1 , 2 e 3. Assim :

- para k = 0 :

$$\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$

- para k = 1 :

$$\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{4} = \frac{9\pi}{16}$$

- para k = 2 :

$$\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4} = \frac{\frac{17\pi}{4}}{4} = \frac{17\pi}{16}$$

- para k = 3 :

$$\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{4} = \frac{25\pi}{16}$$

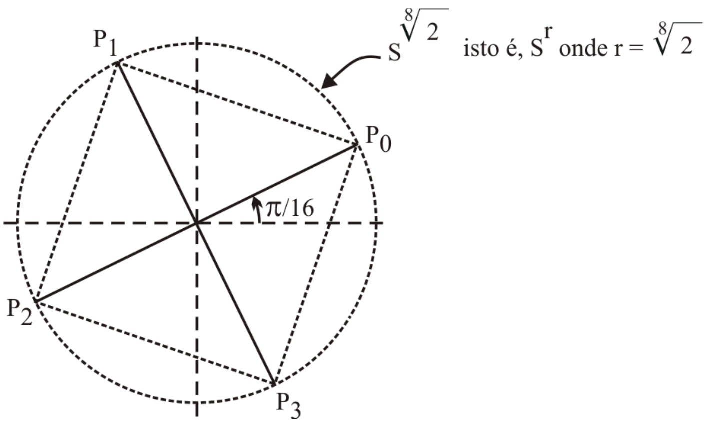
Observe que os argumentos $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}$ , $\frac{17\pi}{16}$ , $\frac{25\pi}{16}$ formam uma PA de razão $\frac{8\pi}{16}$.

As raízes quartas de z são dadas por :

$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\ (\cos(\frac{\pi}{16}) + i \text{ sen } (\frac{\pi}{16}))$ $\omega_2 = \sqrt[8]{2}\ (\cos(\frac{17\pi}{16}) + i \text{ sen } (\frac{17\pi}{16}))$

$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\,(\cos(\frac{9\pi}{16}) + i\,\text{sen}\,(\frac{9\pi}{16}))$ $\omega_3 = \sqrt[8]{2}\,(\cos(\frac{25\pi}{16}) + i\,\text{sen}\,(\frac{25\pi}{16}))$

Geometricamente, as quatro raízes quartas estão sobre uma circunferência de raio $\sqrt[8]{2}$ e dividem a circunferência em quatro arcos congruentes a $\frac{8\pi}{16}$ rd, isto é, congruentes a $\frac{\pi}{2}$ rd formando um quadrado de vértices $P_0$, $P_1$, $P_2$ e $P_3$, como na figura abaixo.




## Exercícios Propostos

**1.** Represente no plano e calcule o módulo dos complexos:

a) u = ( 3 , -2 ) b) v = ( 0 , -3 ) c) $w = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ d) $z = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

**2.** Explique, geometricamente, porque..

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

**3.** Calcule e represente, geometricamente, no plano:

a) 2 ( -1 , 2) b) $(-\frac{1}{2})(4, 2)$ c) -1 ( 2 , -3)

**4.** Represente, geometricamente, o conjunto de todos os complexos z cujo módulo é igual a 1. ( isto é, o conjunto dos pares z = ( a , b ) tais que | z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ = 1, ou seja, tais que $a^2 + b^2 = 1$)

**5.** Seja z complexo diferente de zero. Determine o módulo do complexo u = $\frac{z}{|z|}$

**6.** Sendo $\frac{z}{|z|}$ = ( cos θ , sen θ ), determine θ para z = ( 2 , 1 ) e para z = ( 2 , 0 ). Faça as respectivas figuras.

**7.** Para cada um dos complexos abaixo, escreva-o na forma trigonométrica

a) ( -1 , 1) b) ( -3 , 4) c) ( -1, $\sqrt{3}$ ) d) ( -3 , 0 ) e) ( 0 , -2 )

**8.** Calcule os produtos algebricamente ( de acordo com a definição ) e geometricamente

a) ( $-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$). ( -1 , 0 ) b) ( $-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$). ( $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$)

**9.** Determine os inversos dos complexos seguintes. Faça o desenho no plano e para certificar-se de que, de fato, um é o inverso do outro, multiplique-os para obter a unidade de C, ou seja, ( 1 , 0 ).

a) ( 3 , -2 ) b) ( -1 , 1) c) ( 5 , 0 ) d) ( 0 , 2 )

**10.** Determine o quociente $\frac{(2,3)}{(-1,4)}$

**11.** Usando a forma algébrica de z = a + bi, escreva:

a) – z b) $\bar{z}$ c) |z| d) $\frac{1}{z}$ e) $z.\bar{z}$

**12.** Escreva na forma algébrica o complexo $z = 10 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right)$

**13.** Calcule $z + w$, $z - w$ e $\frac{z}{w}$ se $z = 2 - 5i$ e $w = 1 + 3i$

**14.** Considere um ponto arbitrário z do plano. Você está diante de um complexo z. Agora interprete, geometricamente, os seguintes complexos:

a) $2z$ b) $iz$ c) $-iz$ d) $z^2$ e) $z = (1, 1)$ ou seja, $z = (1 + i)$

**15. (** FUVEST 2003) Nos itens abaixo, z denota um número complexo. Suponha $z \neq i$.

a) Para que valores de z tem-se $\frac{z+i}{1+iz} = 2$ ?

b) Determine todos os valores de z para os quais $\frac{z+i}{1+iz}$ é um número real.

**16.** ( UNICAMP 2003) Considere a função quadrática $f(x) = x^2 + x \cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)$

a) Resolva a equação $f(x) = 0$ para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

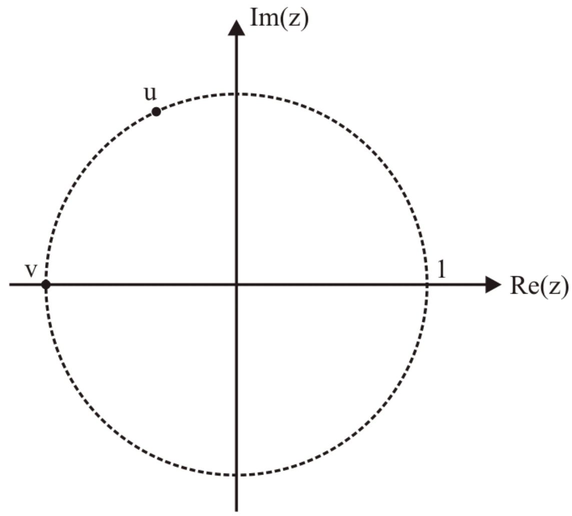
b) Encontre os valores de $\alpha$ para os quais o número complexo $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ é raiz da equação $f(x) + 1 = 0$

**17.** ( UNEP 2001) Considere os números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = x + 2i$, em que x é um número real . Determine:

a) O número complexo $z_1.z_2$ em função de x

b) Os valores de x tais que, $\operatorname{Re}(z_1.z_2) \leq \operatorname{Im}(z_1.z_2)$, onde Re denota a parte real e Im a parte imaginária do número complexo.

**18**. ( UFRS 2001) Considere a figura, onde u e v são números complexos.




Se v = u + $\frac{1}{u}$ , então u vale:

a) -1 + i  b) $\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$  c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$  d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$  e) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

**19.** Dado o complexo $z = -4 - i$, escreva-o na forma $z = |z| \text{ cis } \theta$ ( se necessário, use a calculadora).

**20.** Os complexos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ são vértices de um triângulo eqüilátero. Deduza a expressão de $z_3$ em função de $z_1$ e $z_2$ e use esta expressão para calcular $z_3$ quando $z_1 = 5 + 4i$ e $z_2 = 3 - 3i$.

**21.** Calcule o módulo, um argumento, a parte real e a parte imaginária do complexo $(1 - i)^{51}$

**22.** Determine o argumento de cada um dos complexos:

a) $z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$  b) $z = \frac{i}{-2-2i}$

**23.** Dados os complexos $z = 6\,(\cos\frac{5\pi}{6}+isen\frac{5\pi}{6})$ e $w = 3\,(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4})$ determine:

$zw$ , $w^2$ , $\frac{z}{w}$ e $\frac{w}{z}$ .

**24.** Determine as raízes quartas dos complexos em a) e b) e faça as respectivas representações geométricas.

a) $-1 - \sqrt{3}\, i$ b) $-i$

**25.** Resolva, em C, as equações:

a) $x^3 - 8 = 0$ b) $x^4 + 1 = 0$ c) $2x^5 - 64 = 0$ d) $x^6 + 729$

**26.** Sejam z e w complexos não nulos. Mostre que z e w são colineares com a origem se e só se a parte imaginária de $z\overline{w}$ é nula.

**27.** Mostre que dois complexos não nulos z e w são perpendiculares se e somente se a parte real de $z\overline{w}$ é nula.

# Tabela Trigonométrica

| Ângulo | sen | cos | tg | Ângulo | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º | 0,017 | 1,000 | 0,017 | 46º | 0,719 | 0,695 | 1,036 |
| 2º | 0,035 | 0,999 | 0,035 | 47º | 0,731 | 0,682 | 1,072 |
| 3º | 0,052 | 0,999 | 0,052 | 48º | 0,743 | 0,669 | 1,111 |
| 4º | 0,070 | 0,998 | 0,070 | 49º | 0,755 | 0,656 | 1,150 |
| 5º | 0,087 | 0,996 | 0,087 | 50º | 0,766 | 0,643 | 1,192 |
| 6º | 0,105 | 0,995 | 0,105 | 51º | 0,777 | 0,629 | 1,235 |
| 7º | 0,122 | 0,993 | 0,123 | 52º | 0,788 | 0,616 | 1,280 |
| 8º | 0,139 | 0,990 | 0,141 | 53º | 0,799 | 0,602 | 1,327 |
| 9º | 0,156 | 0,988 | 0,158 | 54º | 0,809 | 0,588 | 1,376 |
| 10º | 0,174 | 0,985 | 0,176 | 55º | 0,819 | 0,574 | 1,428 |
| 11º | 0,191 | 0,982 | 0,194 | 56º | 0,829 | 0,559 | 1,483 |
| 12º | 0,208 | 0,978 | 0,213 | 57º | 0,839 | 0,545 | 1,540 |
| 13º | 0,225 | 0,974 | 0,231 | 58º | 0,848 | 0,530 | 1,600 |
| 14º | 0,242 | 0,970 | 0,249 | 59º | 0,857 | 0,515 | 1,664 |
| 15º | 0,259 | 0,966 | 0,268 | 60º | 0,866 | 0,500 | 1,732 |
| 16º | 0,276 | 0,961 | 0,287 | 61º | 0,875 | 0,485 | 1,804 |
| 17º | 0,292 | 0,956 | 0,306 | 62º | 0,883 | 0,469 | 1,881 |
| 18º | 0,309 | 0,951 | 0,325 | 63º | 0,891 | 0,454 | 1,963 |
| 19º | 0,326 | 0,946 | 0,344 | 64º | 0,899 | 0,438 | 2,050 |
| 20º | 0,342 | 0,940 | 0,364 | 65º | 0,906 | 0,423 | 2,145 |
| 21º | 0,358 | 0,934 | 0,384 | 66º | 0,914 | 0,407 | 2,246 |
| 22º | 0,375 | 0,927 | 0,404 | 67º | 0,921 | 0,391 | 2,356 |
| 23º | 0,391 | 0,921 | 0,424 | 68º | 0,927 | 0,375 | 2,475 |
| 24º | 0,407 | 0,914 | 0,445 | 69º | 0,934 | 0,358 | 2,605 |
| 25º | 0,423 | 0,906 | 0,466 | 70º | 0,940 | 0,342 | 2,747 |
| 26º | 0,438 | 0,899 | 0,488 | 71º | 0,946 | 0,326 | 2,904 |
| 27º | 0,454 | 0,891 | 0,510 | 72º | 0,951 | 0,309 | 3,078 |
| 28º | 0,469 | 0,883 | 0,532 | 73º | 0,956 | 0,292 | 3,271 |
| 29º | 0,485 | 0,875 | 0,554 | 74º | 0,961 | 0,276 | 3,487 |
| 30º | 0,500 | 0,866 | 0,577 | 75º | 0,966 | 0,259 | 3,732 |
| 31º | 0,515 | 0,857 | 0,601 | 76º | 0,970 | 0,242 | 4,011 |
| 32º | 0,530 | 0,848 | 0,625 | 77º | 0,974 | 0,225 | 4,332 |
| 33º | 0,545 | 0,839 | 0,649 | 78º | 0,978 | 0,208 | 4,705 |
| 34º | 0,559 | 0,829 | 0,675 | 79º | 0,982 | 0,191 | 5,145 |
| 35º | 0,574 | 0,819 | 0,700 | 80º | 0,985 | 0,174 | 5,671 |
| 36º | 0,588 | 0,809 | 0,727 | 81º | 0,988 | 0,156 | 6,314 |
| 37º | 0,602 | 0,799 | 0,754 | 82º | 0,990 | 0,139 | 7,115 |
| 38º | 0,616 | 0,788 | 0,781 | 83º | 0,993 | 0,122 | 8,144 |
| 39º | 0,629 | 0,777 | 0,810 | 84º | 0,995 | 0,105 | 9,514 |
| 40º | 0,643 | 0,766 | 0,839 | 85º | 0,996 | 0,087 | 11,430 |
| 41º | 0,656 | 0,755 | 0,869 | 86º | 0,998 | 0,070 | 14,301 |
| 42º | 0,669 | 0,743 | 0,900 | 87º | 0,999 | 0,052 | 19,081 |
| 43º | 0,682 | 0,731 | 0,933 | 88º | 0,999 | 0,035 | 28,636 |
| 44º | 0,695 | 0,719 | 0,966 | 89º | 1,000 | 0,017 | 57,290 |
| 45º | 0,707 | 0,707 | 1,000 | | | | |

# CADERNOS DO IME
## Série Matemática

**Normas para publicação de trabalhos**

Os artigos podem ser submetidos diretamente a qualquer um dos Editores, desde que o contato seja efetuado através de correio eletrônico (e-mail). Os autores podem ainda indicar um dos Editores quando da submissão de um artigo ao Editor Chefe (nunes@ime.uerj.br). Para toda e qualquer correspondência é fortemente aconselhado o uso do correio eletrônico (e-mail).

Há três seções nos Cadernos do IME - Série Matemática: a primeira delas é destinada à divulgação de trabalho inédito de pesquisa em Matemática ou Educação Matemática realizado por docentes do IME/UERJ ou de outras instituições; a segunda é destinada à publicação de artigos de divulgação e a terceira, denominada Caderno de Notas, é destinada a divulgar idéias, com características de originalidade, e a estimular o estudo e a curiosidade intelectual de todos os que se interessam pelo ensino e pelo estudo da Matemática em nível superior.

Os artigos técnicos e de divulgação devem ser escritos preferencialmente em português ou inglês e não devem ultrapassar 10 páginas, embora, excepcionalmente, possam ser considerados artigos mais longos.

Os trabalhos submetidos para a Seção Caderno de Notas devem ser curtos (no máximo 5 páginas). Podem versar sobre uma nova prova de um resultado já conhecido, uma apresentação original de um tema familiar bem como aplicações interessantes de resultados conhecidos ou ainda detalhamento de resultados.

Cada trabalho submetido deve conter um resumo com um máximo de 150 palavras, uma introdução que permita aos não-especialistas ter uma idéia clara dos principais temas em discussão, evitando detalhes técnicos, uma lista de palavras-chave e a classificação AMS 2000. No caso de ser o trabalho aceito, será pedido aos autores a versão final do artigo em LaTeX.

**Importante**

Todos os trabalhos enviados para publicação nos Cadernos do IME – Série Matemática deverão seguir os modelos Cadernos do IME, disponíveis para Word (Português e Inglês) e para Latex (Português e Inglês). Os arquivos deverão ser convertidos em formato PDF.

As chamadas de trabalho estão disponíveis na página da revista:

*http://www.ime.uerj.br/cadernos_mat*