k-Campos de Vetores sobre Variedades*

Maria Hermínia de Paula Leite Mello †

Resumo

O índice de um k-campo contínuo de vetores tangentes com um número finito de singularidades é apresentado como sendo um elemento de um grupo de homotopia de uma variedade de Stiefel.

1 Introdução

Em [10], apresentamos a noção de um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes, ou um k-referencial, definido sobre uma variedade diferenciável. O maior número inteiro positivo k para o qual a variedade admite um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes ou um k-referencial é chamado de *Span* da variedade. Caso a variedade não admita um k-referencial, ainda podemos perguntar se ela admite um k-campo contínuo de vetores tangentes com um número finito de singularidades, também chamado, por simplicidade, de um k-campo finitamente singular. Pelo teorema de Poincaré-Hopf, todo campo contínuo de vetores tangentes definido sobre a esfera S^2 tem pelo menos uma singularidade. Assim, o $Span(S^2) = 0$; isto é, S^2 não admite um 1-referencial. No entanto, é possível definir, não apenas um 1-campo, mas também um 2-campo contínuo de vetores tangentes, com uma única singularidade, sobre S^2.

O objetivo deste artigo é o de introduzir a noção de índice de um k-campo finitamente singular e resultados relacionados. Não iremos detalhar as demonstrações, que poderão ser encontradas em [11]. Visamos, assim, facilitar a leitura daqueles que desejem iniciar sua aprendizagem sobre esse assunto. O índice de um k-campo finitamente singular é a obstrução à existência de um k-referencial (ou um k-campo sem singularidades) sobre a variedade. Em outras palavras, quando o índice de um k-campo finitamente singular definido sobre uma variedade é nulo, podemos estender esse campo à variedade toda, removendo as singularidades. Definiremos o índice como um elemento de um grupo de homotopia de uma variedade de Stiefel. Assim é desejável, para uma boa compreensão do texto, noções sobre grupos de homotopia.

Várias questões podem ser levantadas a respeito do índice de um k-campo finitamente singular:

- Quando é possível definir um k-campo finitamente singular sobre uma variedade dada?
- Como achar o índice de um k-campo finitamente singular?
- Para variedades orientáveis, quando é que o índice não depende da orientação fixada na variedade?
- Como definir o índice de um k-campo finitamente singular, quando a variedade não for orientável?

* *Palavras chave:* span, índice de um k-campo com finitas singularidades, variedades de Stiefel

†Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, mherminia@ime.uerj.br

- Quando é que o índice não depende do k-campo finitamente singular definido sobre a variedade?
- Dada uma variedade compacta, orientada, quais elementos de um determinado grupo de homotopia de uma variedade de Stiefel podem ser realizados como índice de algum k-campo finitamente singular definido sobre a variedade?

As tentativas para responder a essas perguntas têm resultado em importantes trabalhos na área de Topologia Algébrica, como o famoso Teorema de Poincaré - Hopf. Este teorema afirma que o índice de um campo contínuo de vetores tangentes com singularidades isoladas (ou zeros isolados), definido sobre uma variedade diferenciável, compacta, orientável, é independente do campo; pois, é a característica de Euler da variedade e, portanto, um invariante topológico. O teorema também é válido para variedades com bordo; mas, neste caso, é preciso que se faça uma hipótese sobre o campo ao longo do bordo da variedade. Alguns problemas sobre k-campos de vetores tangentes ainda se encontram em aberto, dependendo da variedade fixada e do valor do número inteiro k. Portanto, ainda hoje, esse assunto é uma fonte que problemas interessantes, se constituindo em uma linha de pesquisa. Finalizamos este artigo, expondo um breve histórico sobre o desenvolvimento da teoria de k-campos com finitas singularidades.

2 Índice Local de um k-Campo

Em todo este artigo, sempre que nos referirmos a uma variedade, ela será conexa e diferenciável de classe $C^r, r \geq 1$.

Definição 2.1 (k-campo) *Sejam M uma variedade de dimensão n e $k \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq k \leq n$. Um k-campo contínuo de vetores tangentes sobre a variedade M é uma k-upla $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$, onde cada v_i, $1 \leq i \leq k$ é um campo contínuo de vetores tangentes de M; isto é, cada v_i é uma seção do fibrado tangente de M. Quando o conjunto formado pelos campos v_i, $1 \leq i \leq k$, é linearmente independente, o k-campo é chamado de um k-referencial. Designaremos um k-campo contínuo de vetores tangentes, simplesmente, por um k-campo.*

Definição 2.2 (conjunto das singularidades) *O conjunto:*

$$S(v) = \{x \in M, \text{ tal que } v_1(x), v_2(x), \cdots, v_k(x) \text{ são } LD\}$$

é denominado de conjunto das singularidades do k-campo $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$. Quando $S(v) = \emptyset$ o k-campo é um k-referencial. Quando $S(v)$ for finito, o k-campo é dito finitamente singular.

Exemplo 2.1 *O conjunto das singularidades de um k-campo não precisa ser finito. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o 2-campo $v = (v_1, v_2)$, onde $v_1(x, y) = (0, 1)$ e $v_2(x, y) = (sen(x \cdot \pi/2), cos(x \cdot \pi/2))$. Ao longo de cada reta vertical $x = 2j$, $j \in \mathbb{Z}$, temos $v_2(2j, y) = (sen(j\pi), cos(j\pi))$. Logo, $v_2(2j, y) = (0, 1)$ ou $v_2(2j, y) = (0, -1)$. Assim, o conjunto das singularidades $S(v)$ é constituído dessas retas verticais. As* *figuras 1 e 2 mostram, separadamente, os campos v_1 e v_2, que compõem o 2-campo v. A figura 3 mostra os campos v_1 e v_2 sobrepostos, para $-1 \leq x \leq 1$, formando o 2-campo v.*

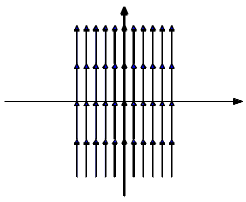

Figura 1: campo v_1

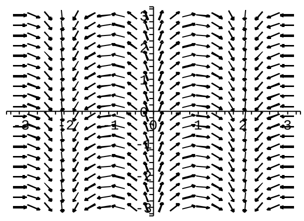

Figura 2: campo v_2

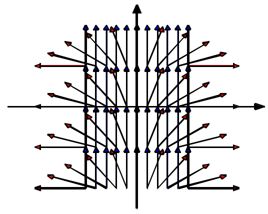

Figura 3: 2-campo v

Exemplo 2.2 *Consideremos $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o 2-campo $v = (v_1, v_2)$ definido sobre a esfera S^2:*

$$v_1(x, y, z) = (1 - z - x^2,\ -x \cdot y,\ x(1 - z))$$

$$v_2(x, y, z) = (-x \cdot y,\ 1 - z - y^2,\ y(1 - z))$$

A única singularidade desse campo é o polo norte $N = (0, 0, 1)$.

Daqui por diante, faremos a hipótese do conjunto das singularidades de um k-campo ser constituído somente de singularidades isoladas; pois, o estudo desses casos já é bastante complexo. A fim de definirmos o índice local de um k-campo e verificar algumas de suas propriedades, necessitamos relembrar o que vem a ser uma variedade de Stiefel e observar que existem algumas involuções, que são definidas de modo natural, sobre essas variedades.

Definição 2.3 (variedade de Stiefel) *Seja $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. A variedade de Stiefel não compacta, denotada por $V_k(\mathbb{R}^n)$, consiste de todas as k-uplas de vetores ou k-referenciais $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ que são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.4 (variedade de Stiefel compacta) *Seja $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Chamamos de variedade de Stiefel compacta ao conjunto de todos os k-referenciais ortonormais em $\mathbb{R}^n$:*

$$V_k^c(\mathbb{R}^n) = \{(v_1, v_2, \cdots, v_k) \in \mathbb{R}^n,\ \text{tal que } \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}.$$

Observação 2.1 *Apesar das variedades de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$ e $V_k^c(\mathbb{R}^n)$ não serem homeomorfas, usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, é possível construir uma homotopia entre elas. Portanto os seus grupos de homotopias são isomorfos.*

Exemplo 2.3 *A variedade de Stiefel $V_1(\mathbb{R}^n)$ tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera S^{n-1}. A variedade $V_n(\mathbb{R}^n)$ tem o mesmo tipo de homotopia que o grupo de Lie $O(n)$.*

Cada elemento da variedade de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$ ou da variedade $V_k^c(\mathbb{R}^n)$ admite uma representação matricial da forma:

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_k) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} \end{pmatrix}$$

Definição 2.5 (involução na variedade de Stiefel) *Para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$ defina a aplicação $\mu_j : V_k(\mathbb{R}^n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$ como sendo aquela que troca o sinal da j-ésima linha da representação matricial de $v = (v_1, \cdots, v_k) \in V_k(\mathbb{R}^n)$; isto é:*

$$\mu_j(v_1, v_2, \cdots, v_k) = \mu_j \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{j1} & v_{j2} & \cdots & v_{jk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -v_{j1} & -v_{j2} & \cdots & -v_{jk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} \end{pmatrix}$$

A aplicação μ_j, $1 \leq j \leq k$ é uma involução, uma vez que ${\mu_j}^2 = id$. Além disso, para quaisquer que sejam i e j, as aplicações μ_i e μ_j são homotópicas [11]. Portanto, todas elas pertencem a uma mesma classe de homotopia, que denotaremos por μ_*.

Exemplo 2.4 *Consideremos $k = 1$. Como $V_1(\mathbb{R}^n)$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^{n-1} , $\mu_* \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$, sendo este grupo de homotopia isomorfo a $\mathbb{Z}$. O isomorfismo leva a classe de homotopia μ_* no grau de uma reflexão em S^{n-1}. Logo, $\mu_* = -1$.*

Definição 2.6 (índice local de um k-campo) *Consideremos M uma variedade, sem bordo, de dimensão n, um k-campo, $v = (v_1, \cdots, v_k)$, definido sobre M e $p \in S(v)$ uma singularidade isolada do k-campo v. Seja (U, φ) uma carta local de M satisfazendo as condições:*
$S(v) \cap U = \{p\}$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U) \supset D^n$, onde $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$. O índice local do k-campo v, na singularidade p, em relação à carta local (U, φ), é a classe de homotopia da aplicação $f_p : S^{n-1} \longrightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$, definida por:

$$f_p(x) = (d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(v_1(\varphi^{-1}(x))), \cdots, d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(v_k(\varphi^{-1}(x)))).$$

Assim, o índice local do k-campo v, na singularidade p, é um elemento do grupo de homotopia $\pi_{n-1}(V_k(\mathbb{R}^n))$. Usamos a notação: $ind_p^{\varphi}(v) = [f_p] \in \pi_{n-1}(V_k(\mathbb{R}^n))$. A figura 4 ilustra a definição do índice local de um k-campo, na singularidade isolada p, para $k = 2$. O ponto $x \in S^1$ e $z = \varphi^{-1}(x) \in M$. A aplicação $d\varphi = d\varphi_z : T_zM \to \mathbb{R}^2$ é a diferencial da carta φ, em z. A diferencial $d\varphi$ leva os campos L. I. $v_1(z)$

e $v_2(z)$, que pertencem ao plano tangente de M , em z, no 2-referencial $(d\varphi(v_1(z)), d\varphi(v_2(z)))$ de $\mathbb{R}^2$. Portanto, neste caso, $f_p : S^1 \to V_2(\mathbb{R}^2)$, $f_p(x) = (d\varphi(v_1(\varphi^{-1}(x))), d\varphi(v_2(\varphi^{-1}(x))))$ e $ind_p^\varphi(v) = [f_p] \in \pi_1(V_2(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_1(O(2))$.

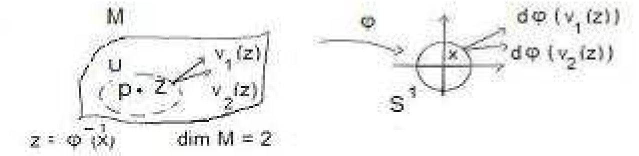

Figura 4: Índice local de um 2-campo

Observação 2.2

1. Na definição de índice local, usamos a diferencial, $d\varphi$, da carta, no ponto $\varphi^{-1}(x)$. Por isso, a variedade deve ser diferenciável.

2. A definição 2.6 ainda é válida para variedades com bordo. Neste caso, supõem-se que $p \in M \setminus \partial M$; isto é, a singularidade isolada pertence ao interior da variedade.

3. Usando-se translação e homotetia é sempre possível obter uma carta local (U, φ) satisfazendo as condições dadas na definição 2.6 acima.

4. Na definição 2.6, não há hipótese a respeito da orientabilidade da variedade M. Isto porque, uma carta local sempre induz um orientação numa vizinhança da singularidade isolada p.

Exemplo 2.5 *Quando $M = \mathbb{R}^n$ e v é um 1-campo, $[f_p] \in \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. O isomorfismo leva a classe de homotopia $[f_p]$ no grau da aplicação f_p. A definição 2.6 coincide com a apresentada em [9].*

Algumas propriedades importantes do índice local de um k-campo com singularidades isoladas, definido sobre uma variedade M, são apresentadas nas proposições abaixo. As demonstrações detalhadas dos resultados podem ser encontradas em [11]. Observamos, ainda, que um k-campo com singularidades isoladas, definido sobre uma variedade compacta , é finitamente singular.

Proposição 2.1 *Sejam $v = (v_1, \cdots, v_k)$ um k-campo sobre uma variedade M, sem bordo, e p uma singularidade isolada de v. Sejam (U, φ) e (V, ψ) cartas locais que induzem a mesma orientação local numa vizinhança de p em M, tais que $p \in U \cap V$ e $U \cap V \cap S(v) = \{p\}$. Indiquemos por $ind_p^\varphi(v)$ e $ind_p^\psi(v)$ os índices locais do k-campo v, na singularidade p, segundo as cartas locais φ e ψ, respectivamente. Então, $ind_p^\varphi(v) = ind_p^\psi(v)$.*

Consideremos a aplicação linear: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por:
$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$. A matriz mudança de base de T tem determinante igual a -1. Portanto, as orientações induzidas, numa vizinhança de p, pelas cartas locais (U, φ) e $(U, T \circ \varphi)$ são opostas.

Proposição 2.2 *Sejam $v = (v_1, \cdots, v_k)$ um k-campo sobre uma variedade M, sem bordo, e p uma singularidade isolada de v. Sejam (U, φ) e $(U, T \circ \varphi)$ cartas locais, com $p \in U$, que induzem orientações opostas em uma vizinhança de p. Então $ind_p^{T\circ\varphi}(v) = -\mu_* ind_p^{\varphi}(v)$.*

Observação 2.3 *A orientação de uma variedade é dada pelo seu atlas $F = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ maximal. Uma carta qualquer desse atlas induz uma orientação local, que será compatível com a orientação fixada na variedade. Desta forma, o índice local, na singularidade p, estará bem definido; pois, independe da carta local escolhida para calculá-lo. Nesta situação, o índice do k-campo em p é denotado por $ind_p(v)$, omitindo-se a referência sobre a carta utilizada.*

Proposição 2.3 *Sejam $u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ e $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ k-campos definidos sobre uma variedade orientada M, tais que $S(u) = S(v) = \{p\}$. Se os k-campos forem homotópicos, então $ind_p(u) = ind_p(v)$.*

Observação 2.4 *Como as componentes de um k-campo, definido sobre uma variedade M, são seções do fibrado tangente de M, a homotopia entre dois k-campos deve preservar essa condição em todos os seus níveis. Deve ser, portanto, uma homotopia por k-campos.*

3 Índice Global de um k-campo e Obstrução à Existência de um k-Referencial

Nesta seção, consideraremos a variedade M como sendo diferenciável, sem bordo, orientada, de dimensão n. Suponhamos que $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ seja um k-campo definido sobre M, cujo conjunto das singularidades é finito. Logo, a soma de todos os índices locais estará bem definida. Além disso, como M é orientada, o cálculo do índice local de v, em cada singularidade p, não depende da carta escolhida, em torno de p. Nessas condições podemos definir o índice global de um k-campo.

Definição 3.1 (índice global de um k-campo) *Sejam M uma variedade sem bordo, orientada, de dimensão n e $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ um k-campo finitamente singular definido em M. O índice global do k-campo v, denotado por $ind(v)$ é definido por:*

$$ind(v) = \sum_{p \in S(v)} ind_p(v), \text{ onde } ind(v) \in \pi_{n-1}(V_k(\mathbb{R}^n))$$

Observação 3.1 *Suponhamos que $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ seja um k-campo, cujas singularidades sejam todas isoladas, definido sobre uma variedade compacta. Pelo fato da variedade ser compacta, o conjunto das singularidades, $S(v)$, será finito e podemos aplicar a definição de índice global dada acima.*

Exemplo 3.1 *As três figuras abaixo mostram campos de vetores em $\mathbb{R}^2$, tendo como única singularidade a origem.*
O campo $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $u(x, y) = (x, y)$ tem índice global igual a 1.
O campo $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $v(x, y) = (x, -y)$ tem índice global igual a -1.
O campo constante $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $w(x, y) = (0, 1)$ tem índice global igual a zero.

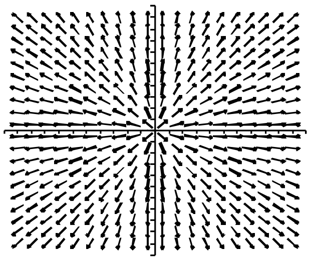
Figura 5: ind(u)=1

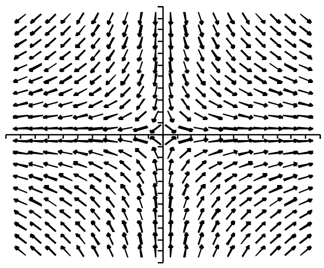
Figura 6: ind(v)= -1

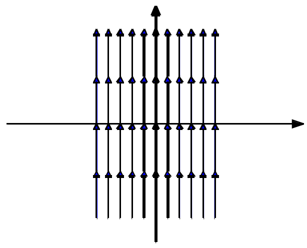
Figura 7: ind(w)=0

Exemplo 3.2 *Seja M^3 uma variedade compacta, sem bordo, orientada, de dimensão 3. O índice de qualquer que seja o 3-campo $v = (v_1, v_2, v_3)$ finitamente singular sobre M será nulo. De fato, $ind(v) \in \pi_2(V_3(\mathbb{R}^3)) \cong \pi_2(O^3))$. Usando os isomosfismos abaixo (vide [8], [11]), temos que o grupo $\pi_2(O^3))$ é nulo.*

$$\pi_2(O^3)) \cong \pi_2(SO^3)) \cong \pi_2(RP^3)) \cong \pi_2(S^3)) = 0$$

Observação 3.2 *O índice de um k-campo finitamente singular sobre a esfera S^n é conhecido, mas a sua descrição exige conceitos mais complexos na área de topologia algébrica. O índice de um k-campo finitamente singular sobre S^2 é sempre diferente de zero. Por outro lado, S^3 é um caso particular do exemplo 3.2.*

Observação 3.3 *Dada uma variedade orientável, há duas orientações possíveis que podemos fixar na variedade. Denotemos as variedades com as orientações fixadas por M^+ e M^-. Se v^+ e v^- denotam um mesmo k-campo v, quando considerado sobre M^+ e M^-, respectivamente, usando a proposição 2.2, temos que $ind(v^+) = -\mu_* ind(v^-)$. Assim, em alguns casos, dependendo da dimensão da variedade e do valor de k, o índice global pode depender da orientação fixada na variedade.*

O principal resultado que desejamos evidenciar, é dado no teorema abaixo, que afirma que o índice de um k-campo é a obstrução à remoção das suas singularidades. Quando o índice de um k-campo v é zero, será possível definir, na variedade, um outro k-campo u sem singularidades. Vamos mostrar este fato, para o caso de um k-campo com uma única singularidade.

Teorema 3.1 *Sejam M uma variedade, sem bordo, orientada, de dimensão n e $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ um k-campo com uma única singularidade p, definido sobre M. Se $ind(v) = 0$, então existe um k-campo $\overline{v}$ sem singularidades, definido sobre M, tal que $\overline{v} = v$ no complementar de um aberto W de M; isto é, $\overline{v}(z) = v(z)$ para $z \in M \setminus W$.*

Demonstração Como o k-campo possui uma única singularidade, o índice global de v coincide com o índice local de v , em p. Pelo fato da variedade ser orientada, podemos escolher qualquer carta (U, φ), com $p \in U$, do atlas maximal de M para calcular o índice. Podemos ainda supor que $\varphi(p) = 0$ e $\varphi(U) \supset D^n$. Denotemos por B^n o interior do disco fechado D^n.

$$ind(v) = ind_p(v) = [f_p], \text{ onde} f_p : S^{n-1} \longrightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$$

$$f_p(x) = (d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(v_1(\varphi^{-1}(x))), \ \cdots, \ d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(v_k(\varphi^{-1}(x)))).$$

Como, por hipótese $ind(v) = 0$, a aplicação $f_p : S^{n-1} \longrightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ pode ser estendida continuamente a uma aplicação definida em D^n, $\overline{f_p} : D^n \longrightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$. Geometricamente, $\overline{f_p}(x) = (w_1(x), w_2(x), \cdots, w_n(x))$ descreve um k-referencial em $\mathbb{R}^n$. Definimos o k-campo $\overline{v}$, em $z \in M$ da seguinte forma:

$$\overline{v}(z) = \begin{cases} (d\varphi^{-1}_{\varphi(z)}(w_1(\varphi(z))), \cdots, d\varphi^{-1}_{\varphi(z)}(w_k(\varphi(z)))) \ , & \text{se} \quad z \in \varphi^{-1}(D^n) \\ v(z) \ , & \text{se} \quad z \in M \setminus \varphi^{-1}(B^n) \end{cases}$$

Como $\overline{f_p}$ é uma extensão de f_p, $\overline{f_p} = f_p$ para $x \in S^{n-1}$ e, portanto, o k-campo $\overline{v}$ estará bem definido para $z \in \partial(\varphi^{-1}(D^n)$. Por fim, notemos que a aplicação diferencial $d\varphi^{-1}_{\varphi(z)}$ é uma aplicação linear e, portanto, leva a k-upla $(w_1(\varphi(z))), \cdots, w_k(\varphi(z))))$ de vetores L. I. de $\mathbb{R}^n$, em um k-referencial de M. Logo, $S(\overline{v}) = S(v) \setminus \{p\} = \emptyset$. □

Observação 3.4 *O resultado do teorema pode ser estendido para o caso de um k-campo com um número finito de singularidades.*

Observação 3.5 *Também é possível definir o índice global de um k-campo finitamente singular, v, definido sobre uma variedade, sem bordo, não-orientável. Neste caso, levando em conta a proposição 2.2, o índice irá pertencer a um grupo quociente G/H, onde $G = \pi_{n-1}(V_k(\mathbb{R}^n)$.*

4 Um breve histórico

Apresentamos um resumo sobre os principais resultados a respeito de k-campos definidos sobre uma variedade diferenciável, compacta, sem bordo, de dimensão n, tendo por base o artigo [15]. Em cada item indicamos as hipóteses sobre k , dimensão e orientabilidade da variedade. Usaremos a hipótese - M *orientável* - nos casos em que o índice independe da orientação fixada na variedade.

- Para $k = 1$, M orientável, o Teorema de Poincaré-Hopf afirma que o $ind(v)$ é a característica de Euler da variedade M. O teorema foi provado para duas dimensões por Jules Henri Poincaré (1854-1912) e generalizado para qualquer dimensão, em 1926, por Heinz Hopf (1894-1971). Observamos ainda que o teorema de Hopf também é válido para variedades orientadas com bordo, desde que se faça alguma hipótese sobre o campo ao longo do bordo da variedade (vide [4] , [15]).

- Para $k = 1$, M não-orientável, o Toerema de Hopf ainda é válido; isto é, o índice do campo com um número finito de singularidades ainda é dado pela característica de Euler da variedade; mas nesse caso é necessário que se introduza a noção de cohomologia com coeficientes locais ou torcidos (vide [11]).

- Para $k = 2$, $n = 4$, M orientada, F. Hirzebruch and H. Hopf, provaram, em 1958, que $ind(v)$ pode variar com o campo definido sobre a variedade (vide [5]).

- Para $k = 2$, $n > 4$, M orientável para o caso em que n é ímpar e M orientada, para o caso em que n é par, resultados devidos a M. F. Atiyah, I. Singer, D. Frank, E. Thomas, obtidos entre 1960 e 1970, mostram que $ind(v)$ é independente da escolha do 2-campo, uma vez que o cálculo do índice só depende de invariantes toplógicos, a saber característica de Euler, semicaracterística de Kevaire e assinatura da variedade (vide [15]).

- Para $k = 2$, M não-orientável, devem ser feitas hipóteses adicionais sobre a variedade, para que se possa decidir se o índice de um 2-campo finitamente singular depende ou independe do campo definido sobre M. Por exemplo, se a dimensão da variedade for ímpar, o índice pode depender da escolha do campo (vide [15]).

- Para $k = 3$, M, orientável, $n = 3$, E. Stiefel mostrou, em 1936, que a variedade é paralelizável ; isto é admite um 3-referencial (vide [15]).

- Para $k = 3$, M orientada, $n > 5$, trabalho de M. F. Atiyah e J. L. Dupont, em 1972 (vide [1]).

- Para $k = 3$, M não-orientável, trabalhos de U. Koschorke , D. Randall e J.L. Arraut, entre 1980 e 1990 (vide [7], [12], [13]).

- Para $k \geq 4$, o estudo sobre k-campos não é completo; pois depende da orientabilidade e da dimensão da variedade e se essa dimensão é par ou ímpar. Há vários resultados sobre o *span* de uma variedade (vide [15], [14]) e outros obtidos por U. Koschorke e D. Randall (vide [7], [13]) e, mais recentemente, [2].

- Para o caso da esfera, quando n é par, $\chi(S^n)$ =2, logo todo k-campo definido sobre uma esfera de dimensão par tem pelo menos uma singularidade. Para n ímpar, teoremas sobre o $Span(S^n)$ (vide definição em [10]) foram obtidos por M. Kervaire, J. Milnor, A. Hurwitz, J. Radon, N. Steenrod, J. H. C. Whitehead e J. F. Adams, que se utilizaram de resultados complexos que haviam sido desenvolvidos por Bott, Atiyah e Hirzerbruch. Em 1958, Kervaire e Milnor mostraram que as únicas esferas paralelizáveis são: S^1, S^3 e S^7.

  Para maiores detalhes sobre história da Matemática vide [16].

Agradecimentos

Meus agradecimentos ao Prof. Mário O. M. da Silva por suas sugestões durante a elaboração deste trabalho.

Referências

[1] ATIYAH, M. F.; DUPONT, J. L. ; Vector Fields with Finite Singularities, Acta Math. 128 (1972), 1-40.

[2] CARDIM, N. S.; MELLO, M. H. P. L. ; RANDALL, A. D.; SILVA, M. O. M., Join products and indices of k-fields over differentiable fiber bundles, Topology and its Applications 136 (2004), 275-291.

[3] FRANK, D. ; On the index of a tangent 2-field, Topology 11 (1972), 245-252.

[4] HIRSCH, M. W.; Differential Topology, GTM 33, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[5] HIRZEBRUCH, F. ; HOPF, H., Felder von Flachenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 136 (1958), 156-172.

[6] HUSEMOLLER, D.; Fibre Bundles, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1974

[7] KOSCHORKE, U.; Vector Fields and other Vector Bundles Morphisms - A Singularity Approach, Lecture Notes in Math. 847, Spriner-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[8] LIMA, E. L.; Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[9] MILNOR, J. W.; Topology from the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[10] MELLO, M. H. P. L; Fibrados Vetoriais Reais e Campos de Vetores sobre Variedades, Cadernos do IME - Série Matemática, UERJ, 17 (2005), 63-74.

[11] OLIVEIRA, C. S.; Automorfismos Induzidos por Involuções da Variedade de Stiefel e Aplicações a Índices de k-Campos sobre Variedades, Dissertação de Mestrado, IM, UFF, Niterói, 1996.

[12] RANDALL, A. D. ; ARRAUT, J. L.; Index of Tangent Fields on Compact Manifolds, Contemporary Math. 12 (1982), 31-36.

[13] RANDALL, A. D.; On Indices of Tangent Fields with Finites Singularities, Differential Topology, Second Siegen Symposium, Lecture Notes in Math. 1360, Springer-Verlag, 1988, 213-240.

[14] THOMAS, E.; The span of a manifold, Quarterly J. Math. 19 (1968), 225-244.

[15] THOMAS, E.; Vector Fields on Manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 643-683.

[16] http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/ history