Equação Hiperbólica com Termo de Resistência em um Domínio Não Cilíndrico *

G. O. Antunes[†], P. N. da Silva[‡] e R. S. Busse[§]

Resumo

Considera-se um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma família $\{K(t)\}_{t\geq 0}$ de matrizes do $\mathbb{R}^n$. Define-se $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = K(t)y, y \in \Omega\}$ com fronteira Γ_t e denota-se por $\widehat{Q} = \bigcup\limits_{0<t<T} \{\Omega_t \times \{t\}\}$ o domínio não cilíndrico com fronteira regular $\widehat{\Sigma} = \bigcup\limits_{0<t<T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}$. Neste artigo investiga-se a existência e unicidade de solução para a equação $u'' - \Delta u = -\nabla p$ em $\widehat{Q}$, $div\ u = 0$ em $\widehat{Q}$, $u = 0$ em $\sum$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ em Ω_0.

Abstract

We consider an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and a family $\{K(t)\}_{t\geq 0}$ of matrices of $\mathbb{R}^n$. Set $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = K(t)y, y \in \Omega\}$ whose boundary is Γ_t. We denote by $\widehat{Q}$ the noncylindrical domain given by $\widehat{Q} = \bigcup\limits_{0<t<T} \{\Omega_t \times \{t\}\}$, with the regular lateral boundary $\widehat{\Sigma} = \bigcup\limits_{0<t<T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}$. In this paper we investigate the existence and uniqueness of solution for the equation $u'' - \Delta u = -\nabla p$ in $\widehat{Q}$, $div\ u = 0$ in $\widehat{Q}$, $u = 0$ in $\sum$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ in Ω_0.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho consiste em investigar a existência e unicidade de soluções forte e fraca para um modelo hiperbólico com um termo de resistência, definido em um domínio não cilíndrico, isto é, um domínio cuja fronteira se move com o tempo.

Denota-se por $\widehat{Q}$ o domínio não cilíndrico definido por

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \{\Omega_t \times \{t\}\},$$

cuja fronteira lateral, considerada aqui regular, é denotada por

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}.$$

* *Palavras Chave:* Equação Hiperbólica, Domínio Não Cilíndrico, Método de Galerkin

[†]Instituto de Matemática e Estatística UERJ-Rio de Janeiro-Brasil e-mail: gladsonantunes@hotmail.com
[‡]Instituto de Matemática e Estatística UERJ-Rio de Janeiro-Brasil e-mail: nunes@ime.uerj.br
[§]Instituto de Matemática e Estatística UERJ-Rio de Janeiro-Brasil e-mail: ronaldobusse@yahoo.com.br

Seja então o problema de obter uma função $u : \widehat{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = -\nabla p, & \text{em } \widehat{Q} \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{em } \widehat{Q} \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, & \text{em } \Omega_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_n(x,t))$, $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n)$, $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ e $p = p(x,t)$.

O problema (1.1), definido em um domínio cilíndrico, foi apresentado inicialmente por Lions [9] e fisicamente representa (cf. Antunes [1]) as pequenas deformações e deslocamentos sofridos por um corpo sólido, constituído de material elástico e incompressível. Para tal modelo os seguintes resultados tem sido recentemente obtidos: em Santos [16], a autora obtém a controlabilidade exata, em Charão [5], são obtidos resultados de estabilização com dissipação localizada e em Antunes [3] questões relacionadas à Controlabilidade Simultânea do sistema são investigadas.

Equações de evolução, consideradas em domínios não cilíndricos, tem sido amplamente estudadas nos últimos anos. Para o estudo da existência de soluções para a equação da onda em domínios não cilíndricos pode-se citar os trabalhos de: J. L. Lions [10], L. A. Medeiros [14], C. Bardos e J. Cooper [6] e A. Inoue [7], para a equação de Navier Stokes tem-se os trabalhos de J. L. Lions [10], O. A. Ladyzhenskaya [8], R. Temam [17], Y. Ebihara e L. A. Medeiros [15] e M. Milla Miranda e J. L. Ferrel [13] e para a equação de Schrodinger cita-se o trabalho de Antunes et al [2].

2 Notações e Hipóteses

Para o estudo do problema acima proposto utiliza-se o método apresentado por Lions [12], que consiste em transformar, por meio de um difeomorfismo

$$\tau : \widehat{Q} \to Q,$$

o problema (1.1) em um problema equivalente definido no cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ regular. Com este objetivo, considera-se uma matriz não-singular $M = (m_{ij})_{n \times n}$, cujas componentes são números reais e a partir daí define-se $\tau(x,t) = (y,t)$, com $y = K^{-1}x$, onde $K(t) = k(t)M$ e $k : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real que satisfaz as seguintes hipóteses:

- $k \in C^3([0,T])$;
- $k(t) \geq k_0 > 0$.

As matrizes $K(t)$ e $K^{-1}(t)$ serão denotadas por $(\alpha_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ e $(\beta_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ respectivamente.

Tem-se então que o subconjunto Ω_t de $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = K(t)y,\ y \in \Omega\}, \qquad 0 \le t \le T,$$

e a inversa

$$\tau^{-1} : Q \to \widehat{Q}$$

é definida por $\tau^{-1}(y,t) = (K(t)y, t)$.

Portanto, fazendo a mudança de variável $u(x,t) = v(y,t)$ e $p(x,t) = q(y,t)$, onde $y = K^{-1}x$, $y \in \Omega$ e $x \in \Omega_t$, transforma-se (**ver Apêndice**) o problema não-cilíndrico (1.1), no seguinte problema definido no cilindro Q:

$$\begin{cases} v'' + A(t)v + C_0(t)\nabla v \cdot y + C_1(t)\nabla v' \cdot y = -K(t)\nabla q, & \text{em } Q \\ \operatorname{div}\left(K^{-1}(t)v\right) = 0, & \text{em } Q \\ v = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $v_0 = u_0(K(0)y)$, $v_1(y) = u_1(K(0)y) + \dfrac{k'(0)}{k(0)}\nabla v_0 \cdot y$,

$$\begin{aligned} A(t)v &= -\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kl}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y_l}\right), \\ a_{kl} &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\beta_{lj} - \left[\frac{k'(t)}{k(t)}\right]^2 y_k y_l, \\ C_0(t) &= -\frac{k''(t)k(t) + (n-1)(k'(t))^2}{k^2(t)}, \qquad C_1(t) = -\frac{2k'(t)}{k(t)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

e $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ é a fronteira lateral de Q.

Apresenta-se agora o quadro funcional sob o qual serão resolvidos os problemas (1.1) e (2.2). Sejam $\mathcal{V}_t$, $V(\Omega_t)$ e $H(\Omega_t)$ os espaços definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t &= \{\psi \in (\mathcal{D}(\Omega_t))^n;\ \operatorname{div}\psi = 0\}, \\ V(\Omega_t) &= \{u \in (H_0^1(\Omega_t))^n,\ \operatorname{div} u = 0\}, \\ H(\Omega_t) &= \left\{u \in \left(L^2(\Omega_t)\right)^n,\ \operatorname{div} u = 0\right\}. \end{aligned}$$

Considera-se ainda os seguintes espaços $\mathcal{V}$, $V(\Omega)$ e $H(\Omega)$ definidos sobre Ω

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\psi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n;\ \operatorname{div}(M^{-1}\psi^t) = 0\}, \\ V = V(\Omega) &= \{\psi \in (H_0^1(\Omega_t))^n,\ \operatorname{div}(M^{-1}\psi^t) = 0\}, \\ H = H(\Omega) &= \left\{\psi \in \left(L^2(\Omega_t)\right)^n,\ \operatorname{div}(M^{-1}\psi^t) = 0\right\}, \end{aligned}$$

onde ψ^t denota a transposta de ψ.

No que se segue serão representados por $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ e $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$, respectivamente, o produto interno e a norma dos espaços H e V.

3 Resultado Principal

Nesta seção apresentam-se os resultados de existência e unicidade de solução para os problemas (1.1) e (2.2). Inicia-se definindo o conceito de solução fraca para o problema (2.2).

Definição 3.1 *Uma função* $v : \mathcal{Q} \mapsto \mathbb{R}$ *é dita uma solução fraca do Problema* (2.2) *se* v *é tal que*

$$v \in L^{\infty}(0,T,V), \qquad v' \in L^{\infty}(0,T,H),$$

e satisfaz a equação

$$-\int_0^T (v', \xi')dt + \int_0^T a(t,v,\xi)dt + \int_0^T (C_0(t)\nabla v \cdot y, \xi)\, dt + \int_0^T \langle C_1(t)\nabla v' \cdot y, \xi\rangle \, dt = 0 \tag{3.4}$$

onde

$$\xi \in L^2(0,T,V \cap (L^2(\Omega))^n), \qquad \xi' \in L^2(0,T,H), \qquad \xi(0) = \xi(T) = 0$$

e as condições iniciais

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1.$$

Em (3.4) tem-se que

$$\langle A\,(t)\, v, \xi\rangle = a\,(t,v,\xi) = \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\Omega} a_{kl}\,(y,t)\, \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial \xi}{\partial y_l} dy. \tag{3.5}$$

Com o objetivo de obter a coercividade da forma $a\,(t,v,\xi)$ definida em (3.5), faz-se a seguinte hipótese técnica:

- Denotando-se por

$$M_0 = \sup_{\|y\|=1} \left\|M^T y\right\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \tau = \max_{[0,T]} |k'\,(t)| \qquad \text{e} \qquad D = med\,(\Omega)\,,$$

  considera-se

$$M_0 \tau D < 1. \tag{3.6}$$

Inicialmente será obtida a coercividade de $a\,(t,v,w)$, dada pelo Lema a seguir:

Lema 3.1 *A forma bilinear* $a\,(t,v,w)$ *é coerciva, isto é,*

$$a\,(t,v,v) \geq a_0 \left\|v\right\|^2, \; \forall \; v \in V$$

onde a_0 *é uma constante positiva.*

Prova. De fato, para $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{l,r=1}^{n} a_{lr}\xi_l\xi_r &= \sum_{l,r=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_{lj}\beta_{rj}\xi_l\xi_r - \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2 y_l y_r \xi_l\xi_r\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{lj}\xi_l\right)\left(\sum_{r=1}^{n}\beta_{rj}\xi_r\right) - \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\left(\sum_{l=1}^{n}y_l\xi_l\right)\left(\sum_{r=1}^{n}y_r\xi_r\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{lj}\xi_l\right)^2 - \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\left(\sum_{l=1}^{n}y_l\xi_l\right)^2 = \\
&= \left\|\left(k^{-1}(t)\right)^T\xi\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\langle y,\xi\rangle_{\mathbb{R}^n}^2 .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Basta agora notar que:

- Se $\eta = \left(K^{-1}(t)\right)^T\xi$ então $\xi = K(t)^T\eta$ e

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 &= \left\|K(t)^T\eta\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 = |k(t)|^2\left\|M^T\eta\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \\
&\leq |k(t)|^2 M_0^2\left\|\left(K^{-1}(t)\right)^T\xi\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 ,
\end{aligned}$$

  onde $M_0 = \sup\limits_{\|y\|=1}\left\|M^T y\right\|_{\mathbb{R}^n}$. Portanto,

$$\left\|\left(K^{-1}(t)\right)^T\xi\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \geq \frac{1}{|k(t)|^2 M_0^2}\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 > \frac{1}{k_0^2 M_0^2}\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 . \tag{3.8}$$

- $\left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\langle y,\xi\rangle_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\|y\|_{\mathbb{R}^n}^2\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2 D^2\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \frac{\tau^2}{k_0^2}D^2\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2,$

onde $\tau = \max\limits_{[0,T]}|k'(t)|$.

Retornando em (3.7) com as estimativas obtidas acima tem-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{l,r=1}^{n} a_{lr}\xi_l\xi_r &\geq \left[\frac{1}{k_0^2M_0^2} - \frac{\tau^2}{k_0^2}D^2\right]\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \\
&= \frac{1-\tau^2M_0^2D^2}{k_0^2M_0^2}\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 = a_0\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 = a_0\sum_{l=1}^{n}\xi_l^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nota-se que, pela hipótese (3.6), tem-se que $a_0 = \dfrac{1-\tau^2M_0^2D^2}{k_0^2M_0^2} > 0$. ■

Enuncia-se a seguir o Teorema que garante a existência de uma única solução fraca para o problema (2.2).

Teorema 3.1 *Sejam*

$$v_0 \in V \cap (H^2(\Omega))^n \qquad e \qquad v_1 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n .$$

Então, existe um única solução v do problema (2.2) *tal que*

$$v \in L^\infty(0,T,V\cap(H^2(\Omega))^n), \quad v' \in L^\infty(0,T,(H_0^1(\Omega))^n), \quad v'' \in L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^n)$$

e uma função $q : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$, $q \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$ *que verifica a equação*

$$v'' + A\,(t)\,v + C_0(t)\nabla v \cdot y + C_1(t)\nabla v' \cdot y = -K(t)\nabla q \text{ em } Q.$$

Prova. Devido à compacidade da imersão de $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ em $\left(L^2(\Omega)\right)^n$, pode-se resolver o seguinte problema espectral

$$\left| \begin{array}{ll} ((w,v))_H = \lambda(w,v), & \forall v \in V \\ div\ w = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Sejam (w_μ) e (λ_μ) soluções de (3.10). Considera-se v_m uma solução aproximada do problema (3.10), isto é, $v_m(t) \in V_m$, onde V_m denota o subespaço gerado por $w_1, \ldots, w_m$. Seja então $v_m(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} h_{jm}(t) w_j$, solução de

$$\begin{cases} (v''_m, w_j) + a(t, v_m, w_j) + \left(C_0(t) \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, w_j \right) + \left(C_1(t) \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k, w_j \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \text{ forte em } V \cap (H^2(\Omega))^n \\ v'_m(0) = v_{1m} \to v_1 \text{ forte em } \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \end{cases} \tag{3.11}$$

Primeira Estimativa. Multiplicando a equação aproximada em $(3.11)_1$ por h'_{jm} e somando em j de 1 a m, obtém-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v'_m|^2 + a(t, v_m, v'_m) + \left(C_1(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k, v'_m \right) + \left(C_0(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, v'_m \right) = 0. \tag{3.12}$$

Analisando os termos de (3.12) obtém-se

- $a(t, v_m, v'_m)$

De (3.5) vem que

$$\frac{d}{dt} a\,(t,z,z) = a'\,(t,z,z) + 2a\,(t,z,z') \ \ \forall\ z \in V_m,$$

então, tomando $z = v_m$ obtém-se

$$a(t, v_m, v'_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(t, v_m, v_m) - \frac{1}{2} a'(t, v_m, v_m). \tag{3.13}$$

Agora sendo,

$$a'(t, v_m, v_m) = \sum_{k,l=1}^{n} \int_\Omega a'_{kl}\,(y,t)\, \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial v_m}{\partial y_l} dy,$$

da expressão de $a_{kl}\,(y,t)$, dada em $(2.3)_2$, segue que

$$a'_{kl}\,(y,t) = -\frac{2k'\,(t)}{k^3\,(t)} \sum_{j=1}^{n} m_{kj}^{-1} m_{lj}^{-1} - \left[\frac{2k'\,(t)}{k\,(t)} \left(\frac{k''\,(t)\,k\,(t) - (k'\,(t))^2}{k^2\,(t)} \right) \right] y_l y_k$$

e portanto, das hipóteses sobre $k(t)$ obtém-se

$$\max_{(y,t)\in\overline{Q}} |a'_{kl}(y,t)| = k_1, \text{ constante finita.}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a'(t,v_m,v_m) \le \frac{k_1}{2}\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right| \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_l}\right| dy = \\
&= \frac{k_1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right| \sum_{l=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_l}\right| dy \le \\
&\le \frac{k_1}{2}\left[\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|\right)^2 dy\right]^{1/2} \left[\int_\Omega \left(\sum_{l=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_l}\right|\right)^2 dy\right]^{1/2} \le \\
&\le \frac{n^2 k_1}{2}\left[\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2} \left[\int_\Omega \sum_{l=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_l}\right|^2 dy\right]^{1/2} = \\
&= \frac{n^2 k_1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2 dy,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2}a'(t,v_m,v_m) \le \frac{n^2 k_1}{2a_0}\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} a_0 \left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2 dy. \tag{3.14}$$

De (3.14) e da coercividade de $a(t,v,w)$, obtém-se que

$$\frac{1}{2}a'(t,v_m,v_m) \le k_2 a(t,v_m,v_m). \tag{3.15}$$

- $\left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k, v'_m\right)$

Note inicialmente que

$$\begin{aligned}
&\left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k, v'_m\right) = \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega C_1(t)\frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k v'_m dy = \\
&= C_1(t)\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial\left(v'^2_m\right)}{\partial y_k} y_k dy.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Pelo Teorema da Divergência e lembrando que v'_m se anula sobre Γ, segue de (3.16) que

$$\left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k, v'_m\right) = -\frac{C_1(t)}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} (v'_m)^2 \frac{\partial y_k}{\partial y_k} dy = -\frac{nC_1(t)}{2}|v'_m(t)|^2. \tag{3.17}$$

Voltando em (3.12) com as expressões obtidas em (3.13) e (3.17) vem que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|v'_m|^2 + a(t,v_m,v_m)\right) = \frac{1}{2}a'(t,v_m,v_m) + \\
&+ \frac{nC_1(t)}{2}|v'_m(t)|^2 - \left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, v'_m\right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

- Análise de $-\left(C_0(t)\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k, v'_m\right)$.

$$\begin{aligned}&-\left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k, v'_m\right)\leq |C_0\,(t)|\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right||y_k|\,|v'_m|\,dy\leq\\&\leq |C_0\,(t)|\,D\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right||v'_m|\,dy,\end{aligned}\tag{3.19}$$

onde D representa a medida de Ω, isto é, $D = med\,(\Omega)$.

De (3.19) segue que

$$\begin{aligned}&-\left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k, v'_m\right)\leq |C_0\,(t)|\,D\left[\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|\right)^2dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega|v'_m|^2\,dy\right]^{1/2}\leq\\&\leq n\,|C_0\,(t)|\,D\left[\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega|v'_m|^2\,dy\right]^{1/2}\leq\\&\leq\frac{n\,|C_0\,(t)|\,D}{2}\left(\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2dy+\int_\Omega|v'_m|^2\,dy\right)=\\&=\frac{n\,|C_0\,(t)|\,D}{2a_0}\left(\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}a_0\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2dy+a_0\int_\Omega|v'_m|^2\,dy\right),\end{aligned}$$

esta última desigualdade e a coercividade de $a\,(t, v, w)$ implicam em

$$-\left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k, v'_m\right)\leq\frac{n\,|C_0\,(t)|\,D}{2a_0}a\,(t, v_m, v_m)+\frac{n\,|C_0\,(t)|\,D}{2}\,|v'_m\,(t)|^2,$$

isto é,

$$-\left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k, v'_m\right)\leq k_3\left(a\,(t, v_m, v_m)+|v'_m\,(t)|^2\right).\tag{3.20}$$

Voltando em (3.18) com as expressões obtidas em (3.15) e (3.20) resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|v'_m|^2+a\,(t, v_m, v_m)\right)\leq k_2 a\,(t, v_m, v_m)+\frac{nC_1\,(t)}{2}\,|v'_m\,(t)|^2+k_3\left(a\,(t, v_m, v_m)+|v'_m\,(t)|^2\right),$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|v'_m|^2+a\,(t, v_m, v_m)\right)\leq k_4\left(|v'_m\,(t)|^2+a\,(t, v_m, v_m)\right).\tag{3.21}$$

De (3.21) segue que

$$\begin{aligned}&|v'_m|^2+a\,(t, v_m, v_m)\leq\left(|v'_m\,(0)|^2+a\,(0, v_m\,(0)\,, v_m\,(0))\right)+\\&+2k_4\int_0^t\left(|v'_m\,(s)\,|^2+a\,(s, v_m, v_m)\right)ds.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Nota-se agora que da convergência dos dados iniciais segue que:

- $|v'_m\,(0)|^2 = |v_{1m}|^2\leq k_5$.

- $a\left(0,v_m\left(0\right),v_m\left(0\right)\right) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,0\right)\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_l}dy \le k_6 \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\right|\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_l}\right|\right)dy \le$

$$\le k_6\left[\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\right|\right)^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_l}\right|\right)^2 dy\right]^{1/2} \le$$

$$\le k_6 n^2\left[\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_l}\right|^2 dy\right]^{1/2} = k_6 n^2\left|\nabla v_{0m}\right|^2 \le k_7, \text{ onde } k_6 = \max_{(y,t)\in\overline{Q}}\left|a_{kl}\left(y,t\right)\right|.$$

Voltando em (3.22) com as limitações obtidas acima tem-se

$$|v_m'|^2 + a\left(t,v_m,v_m\right) \le \left(k_5+k_7\right) + 2k_4\int_0^t \left(|v_m'\left(s\right)|^2 + a\left(s,v_m,v_m\right)\right)ds.$$

Portanto, pelo Lema de Gronwall

$$|v_m'|^2 + a\left(t,v_m,v_m\right) \le \left(k_5+k_7\right)e^{2k_4T} = k_8,$$

donde segue que

$$\left(v_m'\right) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;H\left(\Omega\right)\right). \tag{3.23}$$

E sendo $a\left(t,v_m,v_m\right) \le k_8$ então, da coercividade de $a\left(t,v,w\right)$ obtém-se

$$\left\|v_m'\left(t\right)\right\|^2 \le \frac{a\left(t,v_m\left(t\right),v_m\left(t\right)\right)}{a_0} \le \frac{k_8}{a_0} = k_9,$$

isto é,

$$\left(v_m\right) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;V\left(\Omega\right)\right). \tag{3.24}$$

Estimativa 2. Derivando a equação aproximada com respeito a t obtém-se

$$\begin{aligned}&(v_m''',w_j) + a'(t,v_m,w_j) + a\left(t,v_m',w_j\right) + \left(C_0'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k,w_j\right) + \left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m'}{\partial y_k}y_k,w_j\right) + \\ &+\left(C_1'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m'}{\partial y_k}y_k,w_j\right) + \left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m''}{\partial y_k}y_k,w_j\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Multiplicando a equação em (3.25) por h_{jm}'' e somando em j segue que

$$\begin{aligned}&(v_m''',v_m'') + a'(t,v_m,v_m'') + a\left(t,v_m',v_m''\right) + \left(C_0'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k}y_k,v_m''\right) + \left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m'}{\partial y_k}y_k,v_m''\right) + \\ &+\left(C_1'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m'}{\partial y_k}y_k,v_m''\right) + \left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m''}{\partial y_k}y_k,v_m''\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

A análise dos três primeiros termos em (3.26) mostra que

- $(v_m''',v_m'') = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left|v_m''\left(t\right)\right|^2.$

- $a'\left(t,v_m,v_m''\right) = \dfrac{d}{dt}\left(a'\left(t,v_m,v_m'\right)\right) - a''\left(t,v_m,v_m'\right) - a'\left(t,v_m',v_m'\right).$

- $a\left(t, v_m', v_m''\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt} a\left(t, v_m', v_m'\right) - \dfrac{1}{2} a'\left(t, v_m', v_m'\right).$

Voltando em (3.26) obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|v_m''(t)\right|^2 + 2a'\left(t, v_m, v_m'\right) + a\left(t, v_m', v_m'\right)\right) = \frac{3}{2} a'\left(t, v_m', v_m'\right) + \\
&+ a''\left(t, v_m, v_m'\right) - \left(C_0'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) - \left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m'}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) - \\
&- \left(C_1'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m'}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) - \left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_m''}{\partial y_k} y_k, v_m''\right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Utilizando a primeira estimativa obtém-se as seguintes majorações

- $\dfrac{3}{2} a'\left(t, v_m', v_m'\right) \leq \frac{3}{2}\frac{n^2 k_1}{a_0} a\left(t, v_m', v_m'\right) = k_{10} a\left(t, v_m', v_m'\right).$
- $-\left(C_0(t)\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial v_m'}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) \leq k_3\left(a\left(t, v_m', v_m'\right) + \left|v_m''(t)\right|^2\right).$
- $-\left(C_1(t)\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial v_m''}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) = \dfrac{nC_1(t)}{2}\left|v_m''(t)\right|^2 \leq k_4\left|v_m''(t)\right|^2.$
- $-\left(C_1'(t)\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial v_m'}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) \leq k_{11}\left(a\left(t, v_m', v_m'\right) + \left|v_m''(t)\right|^2\right)$, onde $k_{11} = \max\left\{\dfrac{\left|C_1'(t)\right| Dn}{2a_0}, \dfrac{\left|C_1'(t)\right| Dn}{2}\right\}.$
- $-\left(C_0'(t)\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, v_m''\right) \leq k_{12}\left(a\left(t, v_m, v_m\right) + \left|v_m''(t)\right|^2\right) \leq k_{13} + k_{12}\left|v_m''(t)\right|^2$, onde

$k_{12} = \max\left\{\dfrac{\left|C_0'(t)\right| Dn}{2a_0}, \dfrac{\left|C_0'(t)\right| Dn}{2}\right\}.$

- $a''\left(t, v_m, v_m'\right) \leq k_{14}\left[\int_\Omega \sum_{k=1}^{n}\left|\dfrac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega \sum_{l=1}^{n}\left|\dfrac{\partial v_m'}{\partial y_l}\right|^2 dy\right]^{1/2} \leq$

$$\leq \frac{k_{14} n^2}{2a_0}\left(\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} a_0\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|^2 dy + \int_\Omega \sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y_l}\right|^2 dy\right) \leq$$

$\leq k_{15} + k_{16} a\left(t, v_m', v_m'\right).$

Portanto, voltando em (3.27) com as estimativas obtidas acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|v_m''(t)\right|^2 + 2a'\left(t, v_m, v_m'\right) + a\left(t, v_m', v_m'\right)\right) \leq k_{10} a\left(t, v_m', v_m'\right) + \\
&+ k_{15} + k_{16} a\left(t, v_m', v_m'\right) + k_{13} + k_{12}\left|v_m''(t)\right|^2 + k_3\left(a\left(t, v_m', v_m'\right) + \left|v_m''(t)\right|^2\right) + \\
&+ k_{11}\left(a\left(t, v_m', v_m'\right) + \left|v_m''(t)\right|^2\right) + k_4\left|v_m''(t)\right|^2 \leq \\
&\leq k_{17} + k_{18}\left(a\left(t, v_m', v_m'\right) + \left|v_m''(t)\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\left|v_m''(t)\right|^2+a\left(t,v_m',v_m'\right)\right)\leq -a'\left(t,v_m,v_m'\right)+\frac{1}{2}\left|v_m''(0)\right|^2+\frac{1}{2}a\left(0,v_m,v_m\right)+\\&k_{17}T+k_{18}\int_0^t\left(a\left(s,v_m'(s),v_m'(s)\right)+\left|v_m''(s)\right|^2\right)ds.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Da coercividade de $a\left(t,v,w\right)$ segue que

$$\frac{1}{2}a\left(t,v_m',v_m'\right)\geq\frac{a_0}{2}\left\|v_m'(t)\right\|^2,$$

e tem-se ainda as seguintes estimativas

- $-a'\left(t,v_m,v_m'\right)\leq k_{19}\int_\Omega\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right|\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial v_m'}{\partial y_l}\right|dy\leq k_{19}n^2\left(\left\|v_m(t)\right\|\left\|v_m'(t)\right\|\right)\leq$

$\leq k_{20}\left\|v_m(t)\right\|^2+\frac{a_0}{4}\left\|v_m'(t)\right\|^2\leq k_{21}+\frac{a_0}{4}\left\|v_m'(t)\right\|^2.$

- $\frac{1}{2}a\left(0,v_{1m},v_{1m}\right)\leq\frac{1}{2}k_6n^2\left\|v_{1m}\right\|^2\leq k_{22}.$
- $a'\left(0,v_{0m},v_{0m}\right)\leq k_{19}n^2\left\|v_{0m}\right\|^2\leq k_{23}.$
- $a\left(s,v_m'(s),v_m'(s)\right)\leq\frac{n^2k_{24}}{2}\left\|v_m'(s)\right\|^2=k_{25}\left\|v_m'(s)\right\|^2.$

Retornando em (3.28) tem-se

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|v_m''(t)\right|^2+\frac{a_0}{2}\left\|v_m'(t)\right\|^2\leq k_{21}+\frac{a_0}{4}\left\|v_m'(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left|v_m''(0)\right|^2+\\&+k_{22}+k_{23}+k_{17}T+k_{18}\int_0^t\left(k_{25}\left\|v_m'(s)\right\|^2+\left|v_m''(s)\right|^2\right)ds,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|v_m''(t)\right|^2+\frac{a_0}{4}\left\|v_m'(t)\right\|^2\leq\left|v_m''(0)\right|^2+k_{26}+\\&+k_{27}\int_0^t\left(\frac{1}{2}\left|v_m''(s)\right|^2+\frac{a_0}{4}\left\|v_m'(s)\right\|^2\right)ds.\end{aligned}\tag{3.29}$$

É necessário obter uma limitação para $\left|v_m''(0)\right|^2$, o que é feito a seguir.

Limitação para $\left|v_m''(0)\right|^2$.

Multiplicando a equação aproximada por h_{jm}'', somando em j e tomando $t=0$ vem que

$$\begin{aligned}\left|v_m''(0)\right|^2=&-\int_\Omega\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(y,0)\frac{\partial v_m(y,0)}{\partial y_k}\frac{\partial v_m''(y,0)}{\partial y_l}dy-\\&-C_0(0)\int_\Omega\sum_{k=1}^n\frac{\partial v_m(0)}{\partial y_k}y_kv_m''(y,0)\,dy-\\&-C_1(0)\int_\Omega\sum_{k=1}^n\frac{\partial v_m'(0)}{\partial y_k}y_kv_m''(y,0)\,dy.\end{aligned}$$

Nota-se agora que

- Pelo Teorema da Divergência

$$-\int_\Omega \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(y,0)\frac{\partial v_m(y,0)}{\partial y_k}\frac{\partial v''_m(y,0)}{\partial y_l}dy = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kl}(y,0)\frac{\partial v_m(y,0)}{\partial y_k}\right)v''_m(y,0)\,dy =$$

$$= \int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial a_{kl}(y,0)}{\partial y_l}\frac{\partial v_m(y,0)}{\partial y_k} + a_{kl}(y,0)\frac{\partial^2 v_m(y,0)}{\partial y_l \partial y_k}\right)v''_m(y,0)\,dy \leq$$

$$\leq \int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \left(\left|\frac{\partial a_{kl}(y,0)}{\partial y_l}\right|\left|\frac{\partial v_m(y,0)}{\partial y_k}\right| + |a_{kl}(y,0)|\left|\frac{\partial^2 v_m(y,0)}{\partial y_l \partial y_k}\right|\right)|v''_m(y,0)|\,dy \leq$$

$$\leq k_{28}\int_\Omega \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\right||v''_m(y,0)|\,dy + k_{29}\int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \left|\frac{\partial^2 v_{0m}}{\partial y_l \partial y_k}\right||v''_m(y,0)|\,dy \leq$$

$$\leq k_{30}\left[\int_\Omega \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega |v''_m(y,0)|^2\,dy\right]^{1/2} +$$

$$+k_{31}\left[\int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \left|\frac{\partial^2 v_{0m}}{\partial y_l \partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega |v''_m(y,0)|^2\,dy\right]^{1/2} \leq k_{32}|v''_m(0)|.$$

- $-C_0(0)\int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_m(0)}{\partial y_k}y_k v''_m(y,0)\,dy \leq k_{33}\left[\int_\Omega \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial v_{0m}}{\partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega |v''_m(y,0)|^2\,dy\right]^{1/2} \leq k_{34}|v''_m(0)|.$

- $-C_1(0)\int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial v'_m(0)}{\partial y_k}y_k v''_m(y,0)\,dy \leq k_{35}\left[\int_\Omega \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial v_{1m}}{\partial y_k}\right|^2 dy\right]^{1/2}\left[\int_\Omega |v''_m(y,0)|^2\,dy\right]^{1/2} \leq k_{36}|v''_m(0)|.$

Portanto,

$$|v''_m(0)|^2 \leq k_{37}|v''_m(0)|,$$

isto é,

$$|v''_m(0)|^2 \leq k_{38}. \tag{3.30}$$

Retornando com (3.30) em (3.29) segue que

$$\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2 + \frac{a_0}{4}\|v'_m(t)\|^2 \leq k_{39} +$$
$$+k_{27}\int_0^t \left(\frac{1}{2}|v''_m(s)|^2 + \frac{a_0}{4}\|v'_m(s)\|^2\right)ds.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall,

$$\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2 + \frac{a_0}{4}\|v'_m(t)\|^2 \leq k_{39}e^{k_{27}T} = k_{40}.$$

Daí, como $a_0 > 0$, vem que

$$(v''_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H(\Omega)); \tag{3.31}$$

$$(v'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V(\Omega)). \tag{3.32}$$

Estimativa 3. Multiplicando a equação aproximada por $\lambda_j h_{jm}$ e somando em j obtém-se

$$(v''_m, \Delta v_m) + a(t, v_m, \Delta v_m) + \left(C_1(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k, \Delta v_m \right) + \left(C_0(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, \Delta v_m \right) = 0,$$

donde vem que

$$-\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial \Delta v_m}{\partial y_l} dy = (v''_m, \Delta v_m) +$$
$$+C_0(t) \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k \Delta v_m dy + C_1(t) \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k \Delta v_m dy.$$

Observa-se que

- $(v''_m, \Delta v_m) \leq k_{41} \left|\Delta v_m\left(t\right)\right|.$
- $C_0(t) \displaystyle\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial y_k} y_k, \Delta v_m dy \leq \left|C_0\left(t\right)\right| Dn \left[\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right|^2 \right) dy \right]^{1/2} \left[\int_\Omega \left|\Delta v_m\right|^2 dy \right]^{1/2} \leq k_{42} \left|\Delta v_m\left(t\right)\right|.$
- $C_1(t) \displaystyle\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} y_k \Delta v_m dy \leq \left|C_1\left(t\right)\right| Dn \left[\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y_k} \right|^2 \right) dy \right]^{1/2} \left[\int_\Omega \left|\Delta v_m\right|^2 dy \right]^{1/2} \leq k_{43} \left|\Delta v_m\left(t\right)\right|.$

Nota-se ainda que, pelo Teorema da Divergência,

$$-\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial \Delta v_m}{\partial y_l} dy = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right) \Delta v_m dy,$$

e dessa forma,

$$-\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial \Delta v_m}{\partial y_l} dy = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(a_{kl}\left(y,t\right) \right) \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \Delta v_m dy +$$
$$+\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y_l \partial y_k} \Delta v_m dy.$$

Assim, tem-se

$$\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y_l \partial y_k} \Delta v_m dy \leq k_{41} \left|\Delta v_m\left(t\right)\right|. \tag{3.33}$$

Como, pela coercividade de $a\left(t,v,w\right)$,

$$\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\left(y,t\right) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y_l \partial y_k} \Delta v_m dy \geq a_0 \left|\Delta v_m\left(t\right)\right|^2, \tag{3.34}$$

então de (3.33) e (3.34) segue que

$$\left|\Delta v_m\left(t\right)\right| \leq \frac{k_{45}}{a_0}.$$

Portanto,

$$\left(\Delta v_m\right) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0, T; \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n\right), \tag{3.35}$$

e conseqüentemente,

$$(v_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;\left(H^2(\Omega)\right)^n \cap V(\Omega)\right). \tag{3.36}$$

As limitações obtidas em (3.24), (3.31), (3.32), (3.35) e (3.36) nos permitem passar ao limite na equação aproximada e obter

$$\int_0^T (v''(t), w)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T a(t,v,w)\,\theta(t)\,dt +$$
$$+\int_0^T \left(C_0(t)\sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k} y_k, w\right)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(C_1(t)\sum_{k=1}^n \frac{\partial v'}{\partial y_k} y_k, \Delta v_m\right)\theta(t)\,dt = 0,$$

para todo $w \in V(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Tomando em particular $w \in \mathcal{V}$, tem-se que

$$(v''(t), w) + a(t,v,w) + \left(C_0(t)\sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k} y_k, w\right) + \left(C_1(t)\sum_{k=1}^n \frac{\partial v'}{\partial y_k} y_k, \Delta v_m\right) = 0$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $w \in \mathcal{V}$. Portanto,

$$v'' + A(t)\,v + C_0(t)\nabla v \cdot y + C_1(t)\nabla v' \cdot y = 0 \tag{3.37}$$

em $\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{V}')$.

Como cada um dos termos em (3.37) está em $L^2(0,T;H(\Omega))$ e $\mathcal{V}$ é denso em H, então

$$v'' + A(t)\,v + C_0(t)\nabla v \cdot y + C_1(t)\nabla v' \cdot y = 0 \text{ q.s. em } Q.$$

O termo presente no lado esquerdo da equação (2.2), é recuperado utilizando o seguinte Lema (cf. [13]):

Lema 3.2 *Seja $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\langle g, \psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{V}$. Então*
(i) Existe $q \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $g = \nabla q K^{-1}$;
(ii) Além disso, se $g \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ então $q \in H^1(\Omega)$.

As condições iniciais são verificadas de modo usual e a uniciade de solução é obtida por meio do Método da Energia. ■

Uma vez obtida a solução do problema no domínio cilíndrico, utiliza-se a inversa $\tau^{-1} : Q \to \widehat{Q}$ afim de obter a solução para o problema original, definido no domínio não cilíndrico $\widehat{Q}$.

4 Apêndice

A equação sobre Q.

Tem-se que $\tau(x,t) = (y,t)$, com $y = K^{-1}x$, onde $K(t) = k(t)M$. Considera-se as seguintes notações: $K(t) = (\alpha_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$ e $K^{-1}(t) = (\beta_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$. Dessa forma $x = K(t)\,y$ e $y = K^{-1}(t)\,x$ implicam que $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j$ e $y_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j$.

- $u''(x,t)$

Nota-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k} \sum_{l=1}^{n} \beta'_{kl} x_l =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k,l,p=1}^{n} \beta'_{kl}\alpha_{lp} y_p \frac{\partial v}{\partial y_k},$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v'}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{k,l,p=1}^{n} \beta'_{kl}\alpha_{lp} y_p \frac{\partial v}{\partial y_k}\right],$$

que depois de alguns cálculos resulta em

$$\begin{aligned} u''(x,t) = v'' + 2 \sum_{k,l,p=1}^{n} \beta'_{kl}\alpha_{lp} y_p \frac{\partial v'}{\partial y_k} + \\ + \sum_{k,l,p=1}^{n} \beta''_{kl}\alpha_{lp} y_p \frac{\partial v}{\partial y_k} + \sum_{k,l,p,q,r,s=1}^{n} \beta'_{kl}\alpha_{lp} y_p \beta'_{qr}\alpha_{rs} y_s \frac{\partial^2 v}{\partial y_q \partial y_k}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

- $\Delta u(x,t)$

Tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}\frac{\partial v}{\partial y_k}.$$

E daí segue que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{\partial v}{\partial y_k}\right)\frac{\partial y_l}{\partial x_j},$$

ou seja,

$$\Delta u = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\beta_{lj}\frac{\partial v}{\partial y_k}\right). \tag{4.39}$$

Das notações introduzidas anteriormente e observando que

$$K'(t) = k'(t)\, M$$
$$\left[K^{-1}(t)\right]' = -\tfrac{k'(t)}{k^2(t)} M^{-1}$$
$$\left[K^{-1}(t)\right]'' = \frac{2k(t)\left[k'(t)\right]^2 - \left[k(t)\right]^2 k''(t)}{k^4(t)} M^{-1},$$

obtém-se de (4.38) que

$$u'' = v'' - 2\frac{k'(t)}{k(t)}\nabla v' \cdot y + \frac{2\left[k'(t)\right]^2 - k(t)\, k''(t)}{k^2(t)}\nabla v \cdot y + \sum_{k,l=1}^{n}\left[\frac{k'(t)}{k(t)}\right]^2 y_k y_l \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k}. \tag{4.40}$$

Para o lado direito da equação tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_k}\beta_{kj},$$

isto é,

$$\nabla p = \nabla q \cdot K^{-1}(t)\,. \tag{4.41}$$

Referências

[1] Antunes, G. O., e Araruna, F. D., *Equação Hiperbólica com um Termo de Resistência*. In: Luís Adauto Medeiros. (Org.). Tópicos em Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2006, v. I, p. 86–98

[2] Antunes, G. O. ; Silva, Maria Darci Godinho da ; Apolaya, Ricardo Fuentes . *Schrodinger Equations in Non Cylindrical Domains - Exact Controllability*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2006.

[3] Antunes, G. O., Araruna, F. D. and Medeiros, L. A., *Simultaneous Controllability for a System with a Resistance Term*, Tendências em Matematica Aplicada e Computacional, 3 n^0 1, 2002.

[4] Brezis, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris,* (1999).

[5] Charão, R. C. and Oliveira, J. C., *Stabilizchrodingeration of a Locally Damped Incompressible Wave Equation*, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), 699–725.

[6] Cooper, J.; Bardos, C., *A nonlinear wave-equation in a time dependent domain,* J. Math. Anal. Applications, 42 (1973) , 29-60.

[7] Inoue, A., *Sur* $\Box u + u^3 = f$ *dans un ouvert non cylindrique,* J. Math. Anal. Appl. 46 (1974), 777-819.

[8] Ladyzhenskaya, O. A., Initial-boundary value problem for Navier-Stokes equations in domains with time-varying boundaries, Sem. Math. V. A. Steklov Math. inst. Leningrad, **11**, 35-46.

[9] Lions, J. L., On some Hyperbolic Equations with a Pressure Term, Proceedings of the conference dedicated to Louis Nirenberg held in Trento, Italy, september 3-8, 1990. Harlow: Longman Scientific and Technical, Pitman Res. Notes Math. Ser 269, p. 196-208 (*1992*).

[10] Lions, J. L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problemes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, paris, 1969.

[11] Lions, J. L., Hidden regularity in some nonlinear Hyperbolic Equations, Math. Aplic. and Computational, 6:n. 1, p. 7-15 (1987).

[12] Lions, J.L., Problèmes aux Limites dans Les Équations aux Dérivées Partielles, Deuxième édition. Séminaire de Mathématiques Supérieures, no. 1 (Été, 1962), Les Presses de l'Universite´ de

Montréal, Montreal, 1965, see also Oeuvres Choisies de Jacques Lois Lions, Vol. I (2003) pp. 431–476 SMAI, EDP Sciences Paris - France.

[13] Miranda, M. M.; Ferrel, J. L. , *The Navier Stokes equations in non-cylindrical domains,* Comp. Appl. Math. V. 16, n^0 3, (1997) 247-265.

[14] Medeiros, L. A., *Non-linear wave equations in domains with variable boundary,* Arch. Rational Mech. Anal., 47(1972) , 47-58.

[15] Medeiros, L. A. and Ebihara, Y., *On the regular solutions for some classes of Navier-Stokes equation*, Annales Fac. Sci. Toulouse **9** (1988).

[16] Rocha dos Santos, A., Exact Controllability in Dynamic Incompressible Materials, Ph. Dissertation. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro -RJ- Brasil (1996).

[17] Temam, R., Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis, CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics, **41**, SIAM, 1983.