Método de Lagrange e Equações do tipo Bernoulli *

Israel Nunes de Almeida junior†

Resumo

Neste trabalho mostramos que o método de Lagrange, usado para resolução de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, também pode ser aplicado na resolução das equações equações diferenciais ordinárias não lineares do tipo Bernoulli.

1 Introdução

Stewart [7] afirma que "as equações diferenciais talvez sejam a aplicação mais importante do cálculo". Quando físicos ou cientistas usam o cálculo, em geral, o que eles fazem é analisar uma equação diferencial modelada a partir de algum fenômeno que eles tenham observado. Um ponto importante dessa análise é a resolução da equação diferencial presente no modelo. Há vários métodos de resolução de uma equação diferencial ordinária (EDO). Neste trabalho, apresentamos um método de resolução de EDOs de primeira ordem não lineares do tipo Bernoulli. No primeiro semestre de 2006, durante o curso de Cálculo Diferencial e Integral III, em resposta a uma dúvida nossa sobre a viabilidade da aplicação do Método de Lagrange para resolução de EDOs do tipo Bernoulli, nós, alunos do curso, fomos convidados a desenvolver um pequeno projeto. O primeiro passo foi verificar a validade do Método de Lagrange para resolução de alguns exemplos de EDOs tipo Bernoulli. Cumprida essa primeira etapa, estabelecemos a validade do emprego do método para uma EDO qualquer do tipo Bernoulli. Ao final, fizemos um levantamento bibliográfico a fim de verificar se algum autor já havia apresentado esse método de resolução. Somente nos livros de Abunahman [1] e Piskounov [6] foram encontradas menções sobre esse método, porém, nesses livros os autores apenas sugeriram aplicações em exemplos sem fazer uma justificativa completa. Neste trabalho, compilamos as análises apresentadas nos relatórios dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral III e demonstramos que o Método de Lagrange pode ser aplicado às EDOs de Bernoulli.

Dizemos que uma equação é do tipo Bernoulli, se ela pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \tag{1.1}$$

onde P e Q são constantes ou funções de x.

É sabido que a EDO pode ser transformada em uma EDO linear através da mudança de variável $v = y^{1-n}$. Vale salientar que para $n = 0$ ou $n = 1$, a equação é na verdade linear, e a substituição não é necessária. Usando a mudança de variável mencionada, a equação (1.1) fica

$$\frac{dv}{dx} + P_1 v = Q_1, \tag{1.2}$$

Palavras chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Equações do Tipo Bernoulli, Método de Lagrange

†aluno de graduação do Instituto de Física/UERJ, juniorklink@hotmail.com

onde $P_1 = (1-n)P$ e $Q_1 = (1-n)Q$. Observe que a equação (1.2) é linear em v.

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar o chamado método de Lagrange para EDOs lineares.

2 Método de Lagrange – EDOs lineares

O método de Lagrange é usado para resolver EDOs lineares. Isto é, EDOs que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{2.3}$$

onde P e Q são constantes ou funções de x.

No método de Lagrange, procuramos uma solução de (2.3) na forma de um produto. Isto é, $y(x) = u(x)v(x)$. Observe que, neste caso, a derivada de y é dada por

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituindo a expressão acima em (2.3), obtemos

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \tag{2.4}$$

As funções u e v são determinadas em duas etapas.

1. Primeiro, determinamos uma função v tal que
$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{2.5}$$
2. Depois, determinamos as funções u tais que
$$v\frac{du}{dx} = Q, \tag{2.6}$$
onde v é a função determinada no item anterior.

Determinação de v: Para resolver (2.5), multiplique os dois membros da equação por dx:

$$dv + Pdx = 0.$$

Separe as variáveis: $\frac{dv}{v} = -Pdx$. Integre: $\int \frac{1}{v}dv = -\int Pdx$. Logo, $|v| = e^C e^{-\int Pdx}$. Isto, é a função v deve ser da forma

$$v = Ke^{-\int Pdx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Determinação de u: Vamos, agora, determinar as funções u que resolvem (2.6) para v dado por $v = e^{-\int Pdx}$ (observe que isto corresponde à escolha $K = 1$ na equação acima). Substituindo v em (2.6): $\frac{du}{dx} = e^{\int Pdx}Q$. Integrando: $u = \int e^{\int Pdx}Qdx$.

Como $y = uv$, tem-se:

$$y = e^{-\int Pdx}\int e^{\int Pdx}Qdx \tag{2.7}$$

3 Método de Lagrange e EDOs do tipo Bernoulli – Um caso particular

Vejamos agora, através de um exemplo, que estas mesmas idéias podem ser aplicadas a uma EDO do tipo Bernoulli. Considere a EDO:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Fazendo $y(x) = u(x)v(x)$, derivando com respeito a x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

e substituindo

$$u\left(\frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} = 3xu^2v^2$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{v} - 2\frac{dx}{x} = 0$$

Integrando:

$$\ln|v| = 2\ln|x| + C.$$

Podemos tomar uma solução particular $v(x) = x^2$.

Calculando u:

$$u^{-2}du = 3x^3dx$$

Integrando:

$$-\frac{1}{u} = \frac{3x^4}{4} + C.$$

Assim: $u(x) = -\frac{4}{3x^4+K}$. Como $y(x) = u(x)v(x)$, tem-se

$$y(x) = -\frac{4x^2}{3x^4 + K} \qquad (\textit{Solução Geral})$$

Para averiguar a consistência deste método, propomos também a solução da mesma EDO pelo método apresentado anteriormente, ou seja, EDOs do tipo Bernoulli. Tomemos novamente a EDO:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Dividindo por y^2:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - 2\frac{1}{x}y^{-1} = 3x.$$

Substituindo $w = y^{-1}$ e derivando com respeito a x

$$\frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Na nova variável, a equação se reescreve:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2}{x}w = -3x.$$

Observe que trata-se de uma EDO linear em w.

Vamos resolver esta EDO linear pelo método de Lagrange. Fazendo $w(x) = u(x)v(x)$, obtemos

$$\frac{dw}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo

$$u\left(\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} = -3x.$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\ln|v| = -2\ln|x| + C.$$

Podemos tomar uma solução particular $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Calculando u:

$$\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} = -3x$$

Integrando:

$$u(x) = -\frac{3x^4}{4} + C.$$

Como, $w(x) = u(x)v(x)$, tem-se

$$w(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^4}{4} + C\right) = -\frac{3x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador

$$w(x) = \frac{4C - 3x^2}{4x^2}$$

Como $w = y^{-1}$, pode-se escrever, já que $4C = -K$:

$$y(x) = -\frac{4x^2}{3x^4 + K}.$$

Este foi o mesmo resultado obtido quando utilizamos o Método de Lagrange. Observamos ainda que, procedendo desta forma, precisamos efetuar mais mudanças de variáveis do que no método de Lagrange.

4 Método de Lagrange e EDOs do tipo Bernoulli – O caso geral

Considere agora uma EDO do tipo Bernoulli. Isto é, uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{4.8}$$

com $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Vamos tentar obter sua solução y pelo método de Lagrange.

Fazendo a substituição $y(x) = u(x)v(x)$ e derivando com respeito a x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo:

$$u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) + v\frac{du}{dx} = Q(x)u^n v^n.$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx$$

Integrando:

$$\ln|v| = -\int P(x)dx$$

Isto é, $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$.

Calculando u:

$$\frac{du}{u^n} = Q(x)v^{n-1}dx$$

Integrando:

$$u^{1-n} = (1-n)\left(\int Q(x)v^{n-1}dx + C\right).$$

Lembrando que $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$ e substituindo em u:

$$u = \left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1}dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1}dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

que é a solução geral da EDO de Bernoulli (4.8) obtida através do Método de Lagrange.

Observe que se resolvemos a EDO de Bernoulli (4.8) pela substituição $w = y^{1-n}$, podemos reescrever a EDO (4.8) na nova variável:

$$\frac{dw}{dx} + P_1(x)w = Q_1(x),$$

onde $P_1(x) = (1-n)P(x)$ e $Q_1(x) = (1-n)Q(x)$.

Pelo método de Lagrange, fazendo $w(x) = u(x)v(x)$, obtemos:

$$u\left(\frac{dv}{dx} + P_1(x)v\right) + v\frac{du}{dx} = Q_1(x).$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{v} = -P_1(x)dx$$

Integrando:

$$\ln|v| = -\int P_1(x)dx$$

Isto é, $v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$.

Calculando u:

$$du = Q_1(x)v^{-1}dx$$

Integrando:

$$u = \int Q_1(x)v^{-1}dx + C$$

Lembrando que $v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ e substituindo em u:

$$u = \left(\int Q_1(x)e^{\int P_1(x)dx}dx + C\right).$$

Como, $w(x) = u(x)v(x)$, temos

$$w(x) = (1-n)e^{(n-1)\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Por outro lado, $w = y^{1-n}$. Logo

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1}dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

que é a mesma solução geral da EDO de Bernoulli (4.8) obtida através do Método de Lagrange.

4.1 Exemplos

1. $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$

   Solução: $y(x) = u(x)v(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

   $$u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = xu^3v^3$$

   Calculando v: Temos $\frac{dv}{v} = 2xdx$. Logo, $v(x) = e^{x^2}$ Calculando u: Temos $e^{x^2}\frac{du}{dx} = xe^{3x^2}u^3$ Logo, $u^{-3}du = xe^{2x^2}dx$

Calculando a integral $\int xe^{2x^2}dx$ Fazendo $\alpha = 2x^2$, tem-se $4xdx = d\alpha$ e

$$\int xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{\alpha}d\alpha = \frac{\alpha}{4} + C = \frac{e^{2x^2}}{4} + C.$$

Portanto, $u^2 = -\frac{2}{e^{2x^2}+K}$.

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos $y^2(x) = u^2(x)v^2(x)$. Logo

$$y^2(x) = -\frac{2e^{2x^2}}{e^{2x^2}+K} \qquad \text{(Solução Geral)}$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$.

Solução: $y(x) = u(x)v(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v\right) + v\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\sqrt{v}$$

Calculando v: Temos $\dfrac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$. Logo, $v(x) = x^4$. Calculando u: Temos $x^4\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\sqrt{x^4}$ Logo, $u = (\ln\sqrt{x} + K)^2$ Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos

$$y(x) = x^4(\ln\sqrt{x} + K)^2 \qquad \text{(Solução Geral)}$$

5 Discussão sobre o "novo" método

Nosso trabalho propõe a resolução da equação de Bernoulli pelo método de Lagrange. Esse método se mostrou viável e simplificado na prática, visto que realizamos apenas uma mudança de variável ($y(x) = u(x)v(x)$), diferentemente do método de resolução mais comum, onde substituímos $y^{1-n} = w$, e posteriormente encontramos a função w como solução de uma EDO linear e, finalmente, determinamos a solução da EDO do tipo Bernoulli original. Nos exemplos apresentados, não ficou evidenciada uma tendência para resolução de integrais de forma mais complicada do que normalmente apareceriam se as EDOs fossem resolvidas pelo método mais usual. Além disso, quando usada em sala de aula, a resolução por este método se mostrou confiável e mais facilmente compreendida pelos alunos. Ademais, ele permite uma resolução das EDOs de maneira mais rápida e prática.

Referências

[1] ABUNAHMAN, S., Equações Diferencias, ERCA Editora e Gráfica Ltda, Rio de Janeiro, 1989.

[2] AGNEW, R. P., Diferential Equations, Editora McGraw-Hill, New York, 1960.

[3] AYRES, F., Equações Diferencias, Editora McGraw-Hill, São Paulo, 1959.

[4] DIAS, A. T., Curso de Cálculo Infinitesimal, Fundação Gorceix, Ouro Preto, 1962.

[5] MACHADO, K. D., Equações Diferenciais aplicadas à Física, Editora UEPG, Paraná, 2000

[6] PISKOUNOV, N., Cálculo Diferencial e Integral: Volume II, Editora Lopes da Silva, Portugal, 1987.

[7] STEWART, J., Cálculo: Volume II, Editora Pioneira–Thomson Learning, 2004.

[8] ZILL, D. G. & CULLEN, M. R., Equações Diferenciais: Volume 1, Editora Makron Books, São Paulo, 2005.