

REPRESENTAÇÃO DE UM BIT QUÂNTICO NA ESFERA DE BLOCH - VISUALIZAÇÃO EM MAPLE- *

VIRGINIA S. COSTA **

LUIZ M. CARVALHO ‡

Resumo

A Esfera de Bloch é uma representação possível, em $\mathbb{R}^3$, para um bit quântico (*q-bit*). No entanto, livros e materiais de estudo quase não explicam essa representação. O objetivo deste trabalho é discutir sobre a Esfera de Bloch e suas propriedades, utilizando como ferramenta o software matemático Maple para a visualização de vetores (*vetores de Bloch*) e execução de transformações unitárias (*portas quânticas*).

Abstract

The Bloch sphere provides a useful means of visualizing the state of a single qubit. However, Quantum Computing books rarely explain something about it. In this text, we present a mathematical description of the Bloch sphere and discuss some of its properties, using Maple software to visualize the *Bloch vectors* and execute unitary transformations (*quantum gates*).

* Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, Agosto de 2005, (apresentado como poster no XXVIII CNMAC, Setembro de 2005, SENAC, Santo Amaro - SP)

Palavras chave: Bloch, Computação Quântica, Vetores de Bloch.

** Aluna de Iniciação Científica Voluntária, Departamento de Matemática Aplicada, IME/UERJ, virscosta@gmail.com

‡ Professor Adjunto, Departamento de Matemática Aplicada, IME/UERJ, luizmc@ime.uerj.br

1 Introdução

1.1 Objetivo

A Esfera de Bloch é uma representação possível para um Bit Quântico (q-bit) em $\mathbb{R}^3$. No entanto, a maioria dos livros que têm como tema a Computação Quântica pouco comenta sobre essa representação, isto é, sobre sua construção e suas propriedades. O presente trabalho tem como objetivo principal a apresentação de um programa (um Maplet) desenvolvido em Maple que tem como base para seus algoritmos a teoria estudada acerca da Esfera de Bloch. Porém, para chegarmos ao objetivo principal, teremos que analisar cuidadosamente alguns detalhes matemáticos embutidos nesta representação e, para isso, é preciso que saibamos alguns conceitos oriundos da Matemática e da Mecânica Quântica que dão sustentação à Teoria da Computação Quântica. Nas seções a seguir, faremos uma breve introdução aos principais conceitos que serão utilizados ao longo deste texto: na seção 2, será apresentado um breve resumo de algumas definições da Álgebra Linear e da Notação de Dirac, na seção 3, será introduzido o conceito de bit quântico a partir de um dos postulados da Mecânica Quântica, na seção 4, será dada uma pequena noção sobre evolução de um sistema quântico e, a partir da seção 5, começaremos a desenvolver o raciocínio que servirá como base para o algoritmo tema deste trabalho.

2 Álgebra Linear

2.1 Notação de Dirac

A Tabela abaixo mostra alguns símbolos da Notação de Dirac muito utilizados na Computação Quântica:

Notação	Descrição
$ \psi\rangle$	"ket", isto é, $ \psi\rangle = (c_0, c_1, c_2, \dots)^T$
$\langle\psi $	vetor dual, "bra", isto é, $\langle\psi = (c_0^*, c_1^*, c_2^*, \dots)$
$ n\rangle$	n-ésimo vetor da base computacional $N = \{ 0\rangle, 1\rangle, \dots\}$
$\langle\phi \psi\rangle$	produto interno entre $ \phi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
$ \phi\rangle \otimes \psi\rangle$	produto tensorial entre $ \phi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
$ \phi\rangle \psi\rangle$	produto tensorial abreviado entre $ \phi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
$ i, j\rangle$	produto tensorial entre dois vetores da base computacional.
$M^\dagger$	operador adjunto, $M^\dagger = (M^T)^*$.
$\langle\phi M \psi\rangle$	produto interno entre $ \phi\rangle$ e $M \psi\rangle$.
$\ \psi\ $	norma do vetor $ \psi\rangle$.

2.2 Espaço de Hilbert

Definição 2.1. Um conjunto $\mathbf{V}$ é chamado espaço vetorial sobre um corpo $\mathbf{F}$ se e somente se as operações $+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (adição de vetores) e $\cdot: \mathbf{F} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (multiplicação por um escalar pela esquerda) forem bem definidas e obedecerem às seguintes propriedades:

- (i) $(\mathbf{V}, +)$ é um grupo abeliano,
- (ii) $\lambda(\mu|\psi\rangle) = (\lambda\mu)|\psi\rangle$,
- (iii) $(\lambda + \mu)|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle + \mu|\psi\rangle$,
- (iv) $\lambda(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = \lambda|\psi\rangle + \lambda|\phi\rangle$,
- (v) $1|\psi\rangle = |\psi\rangle$,

onde $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$.

Definição 2.2. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial complexo. A função $\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada Produto Interno se e somente se

- (i) $\langle \psi | (\lambda|\phi\rangle + \mu|\phi\rangle) \rangle = \lambda\langle \psi | \phi \rangle + \mu\langle \psi | \phi \rangle$,
- (ii) $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$,
- (iii) $\langle \psi | \psi \rangle \in \mathbb{R}, \langle \psi | \psi \rangle \geq 0, \langle \psi | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$.

onde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

O Produto Interno também define a norma de um vetor: $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$. E as seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$|\langle \psi | \phi \rangle| \leq \|\psi\| \|\phi\| \quad (\text{Desigualdade de Schwarz})$$

$$\| |\psi\rangle + |\phi\rangle \| \leq \|\psi\| + \|\phi\| \quad (\text{Desigualdade Triangular})$$

Definição 2.3. Um espaço vetorial completo $\mathcal{H}$ com Produto Interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e norma igual a $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ é chamado Espaço de Hilbert.

2.3 Operadores Lineares

Definição 2.4. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbf{F}$ e $\mathbf{A}$ uma função $\mathbf{A}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. $\mathbf{A}$ é chamada de Operador Linear em $\mathbf{V}$ se e somente se

$$\mathbf{A}(\lambda|\psi\rangle + \mu|\phi\rangle) = \lambda\mathbf{A}(|\psi\rangle) + \mu\mathbf{A}(|\phi\rangle) = \lambda\mathbf{A}|\psi\rangle + \mu\mathbf{A}|\phi\rangle.$$

onde $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$.

Em $\mathbb{C}^n$, um operador linear $\mathbf{A}$ pode ser escrito como uma matriz $n \times n$ de elementos a_{ij} , isto é,

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle \langle j|.$$

Definição 2.5. Considere dois operadores lineares, A e B , definidos nos espaços vetoriais $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, respectivamente. O Produto Tensorial $A \otimes B$ é dado por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{bmatrix},$$

onde A é uma matriz $n \times n$ e B é uma matriz $m \times m$. Neste caso, $A \otimes B$ é uma matriz $nm \times nm$. Pode-se calcular o produto tensorial também entre vetores (ex.: $|0\rangle \otimes |0\rangle$).

Definição 2.6. O operador $A^\dagger = (A^T)^* = \sum_{ij} a_{ji}^* |i\rangle \langle j|$ é denominado Operador Adjunto de A .

Definição 2.7. Um operador linear A é chamado

- (i) auto-adjunto ou Hermitiano se $A^\dagger = A$,
- (ii) unitário se $A^\dagger A = AA^\dagger = I$, onde I é a matriz identidade.

3 O Bit Quântico

Para entendermos melhor o que é um *Bit Quântico* ou *q-bit*, é preciso que seja enunciado nesta seção um dos postulados da Mecânica Quântica que serve de sustentação a este conceito: o postulado que se refere ao *Espaço de Estado*. Então, vejamos:

Postulado 3.1 (Espaço de Estado). *Associado a qualquer sistema físico isolado, existe um espaço vetorial complexo com produto interno (Espaço de Hilbert) conhecido como Espaço de Estado do sistema. O sistema físico em questão é completamente descrito por um vetor unitário (vetor de estado ou estado) pertencente a esse espaço vetorial.*

Interpretando o Postulado 3.1, temos o **q-bit** como um sistema quântico associado a um espaço de estado bi-dimensional $\mathfrak{B} = \mathbb{C}^2(\mathbb{C})$, cuja base ortonormal é formada pelos vetores

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, um vetor de estado (ou estado) que representa o espaço de estado associado ao q-bit pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{3.1}$$

onde α e β são números complexos. Segundo o Postulado 3.1, $|\psi\rangle$ é um vetor unitário, ou seja, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ ou, ainda, de forma equivalente,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (3.2)$$

Intuitivamente, poderíamos comparar os vetores da base (que chamaremos base computacional), $|0\rangle$ e $|1\rangle$, com os valores 0 e 1 atribuídos ao bit clássico. No entanto, o que diferencia um bit clássico de um q-bit é o fato de existir *superposições* dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, na forma da Equação 3.1, o que não nos permite afirmar se um q-bit está no estado $|0\rangle$ ou no estado $|1\rangle$. Assim, podemos ter os estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ ou, ainda, o estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ representando um q-bit. Este último, como já foi dito anteriormente, é uma superposição dos estados da base computacional, isto é, é uma combinação linear cujos coeficientes, α e β , são denominados *amplitudes*. As amplitudes estão relacionadas às probabilidades de um q-bit apresentar o estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ da seguinte forma: $|\alpha|^2$ é a probabilidade de o q-bit estar no estado $|0\rangle$ e $|\beta|^2$ é a probabilidade de o q-bit estar no estado $|1\rangle$.

Agora que sabemos que a probabilidade de um q-bit estar em um determinado estado é dada através de suas amplitudes, é fácil concluir que a alteração do estado de um q-bit dependerá da alteração de suas amplitudes. Logo, surge então uma nova questão: como se altera as amplitudes de um estado de um q-bit? Para respondermos a essa pergunta, é preciso recorrer ao postulado enunciado na próxima seção.

4 Evolução de um Sistema Quântico

Postulado 4.1 (Evolução de um Sistema Quântico). *A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Assim, se no instante t_1 um sistema está no estado $|\psi\rangle$ e no instante t_2 o mesmo sistema estiver no estado $|\psi'\rangle$, então o estado $|\psi\rangle$ está relacionado ao estado $|\psi'\rangle$ através de um operador unitário U que depende somente dos instantes t_1 e t_2 , ou seja,*

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle. \quad (4.3)$$

Como podemos ver no Postulado 4.1, a Mecânica Quântica nos garante que a evolução de qualquer sistema quântico fechado se dá através de um operador unitário, porém não fica claro quais operadores devemos usar para descrever uma determinada modificação no sistema. A escolha do operador dependerá de qual resposta se deseja obter. Um exemplo disso, no nosso sistema quântico (o q-bit), seria quando desejamos alterar as amplitudes para se obter como resposta amplitudes iguais para todos os elementos da base computacional (isto é, $\alpha = \beta$ na Equação 3.1). Para essas modificações de estado, existem alguns operadores que serão vistos com mais detalhes na seção 7.

5 Representação de um Q-Bit na Esfera

5.1 Modelo para um Q-Bit

A Mecânica Quântica afirma que, quando medimos o q-bit, embora este possa estar em um estado de superposição, obtemos como resultado o $|0\rangle$, com probabilidade igual a $|\alpha|^2$, ou o $|1\rangle$, com probabilidade igual a $|\beta|^2$, onde α e $\beta \in \mathbb{C}$. Logo, podemos escrever

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Do Postulado 3.1, temos que $|\psi\rangle$ (Equação 3.1) é unitário e pertence a $\mathbb{C}^2(\mathbb{C})$. Escrevendo os números α e β como $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) e $c + id$ ($c, d \in \mathbb{R}$), respectivamente, temos que $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$ e $|\beta|^2 = c^2 + d^2$. Assim, a Equação 3.2 se apresenta da seguinte forma:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (5.4)$$

A partir da Equação 5.4, interpretamos o q-bit como um vetor unitário $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ e a esfera unitária S^3 de $\mathbb{R}^4$ como o lugar geométrico dos q-bits (segundo [2]).

5.2 Forma Polar de um Q-Bit

Sabendo que as amplitudes α e β da Equação 3.1 são números complexos, podemos expressá-las em coordenadas polares. Assim,

$$\alpha = |\alpha| e^{i \text{Arg}(\alpha)} \quad e \quad \beta = |\beta| e^{i \text{Arg}(\beta)},$$

onde $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ é o argumento do complexo z e $|z|$ é o seu módulo.

Podemos ainda, definir $\gamma = \text{Arg}(\alpha)$ e $\phi = \text{Arg}(\beta) - \text{Arg}(\alpha)$ (onde as operações entre ângulos devem ser consideradas em aritmética módulo 2π) e reescrever a Equação 3.1 como

$$|\psi\rangle = |\alpha| e^{i\gamma} |0\rangle + |\beta| e^{i(\gamma+\phi)} |1\rangle. \quad (5.5)$$

E, assim, sendo $|\alpha| \geq 0$, $|\beta| \geq 0$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, podemos definir também ξ por meio das equações $\cos(\xi) = |\alpha|$ e $\sin(\xi) = |\beta|$ (note que $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$).

Fazendo $\theta = 2\xi$, $\theta \in [0, \pi]$, e reescrevendo a Equação 5.5, temos a forma polar de um q-bit

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right], \quad (5.6)$$

onde

$$\theta = 2 \arccos(|\alpha|) = 2 \arcsen(|\beta|),$$

$$\phi = \text{Arg}(\beta) - \text{Arg}(\alpha),$$

$$\gamma = \text{Arg}(\alpha)$$

e $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\gamma \in [0, 2\pi)$.

5.3 A Esfera de Bloch

Sabemos que a equação de uma esfera do $\mathbb{R}^3$ de raio $R \in \mathbb{R}$ e de centro na origem $(0, 0, 0)$ é $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Usando como parâmetros dois ângulos, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in [0, \pi]$, e o raio R , podemos representar todos os pontos da esfera do $\mathbb{R}^3$ de forma vetorial, assim:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos(\phi) \sin(\theta) \\ R \sin(\phi) \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Sabemos, também, que o q-bit pode ser escrito em sua forma polar, como mostra a Equação 5.6, em função dos ângulos $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\gamma \in [0, 2\pi)$.

Então, seria natural se comparássemos os ângulos das coordenadas esféricas com os ângulos da forma polar do q-bit.

Observe que, se tentarmos modificar o q-bit expresso pela Equação 5.6 através de um operador unitário, o fator $e^{i\gamma}$ não se altera:

$$U|\psi\rangle = e^{i\gamma} U[\cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle]$$

onde U é o operador unitário de 1 (um) q-bit (isto é, uma matriz unitária 2×2). Observe também que, o fator $e^{i\gamma}$ não altera a probabilidade de se obter $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ no momento da medida, pois

$$|e^{i\gamma} \cos(\frac{\theta}{2})| = |e^{i\gamma}| |\cos(\frac{\theta}{2})| = |\cos(\frac{\theta}{2})|,$$

assim como,

$$|e^{i(\gamma+\phi)} \cos(\frac{\theta}{2})| = |e^{i\gamma}| |e^{i\phi} \cos(\frac{\theta}{2})| = |e^{i\phi} \cos(\frac{\theta}{2})|.$$

Devido a essas propriedades, podemos desprezar o fator $e^{i\gamma}$ (chamado *fator de fase global*) e escrever

$$|\psi\rangle_B = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle. \quad (5.7)$$

A partir daí, tentaremos encontrar uma representação geométrica para o q-bit em $\mathbb{R}^3$.

Note que $|\psi\rangle_B$ pode ser reescrito como

$$|\psi\rangle_B = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + \cos(\phi) \sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle + \sin(\phi) \sin(\frac{\theta}{2})|i\rangle,$$

isto é, o vetor $|\psi\rangle_B$ pertence a um subespaço vetorial ($\mathbb{V}$) de $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ de dimensão 3 e base $\{|0\rangle, |1\rangle, |i\rangle\}$. Como este subespaço está definido sobre o corpo dos reais, ele é isomorfo a $\mathbb{R}^3$ (segundo [2]). Considerando então um isomorfismo T entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{R}^3$, tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de acordo com [2], teremos que

$$T(|\psi\rangle_B) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(\phi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(\phi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, se usássemos a transformação T para representar $|\psi\rangle_B$ em $\mathbb{R}^3$, teríamos uma semi-esfera (denominada SE^2) com centro na origem e raio igual a 1, pois $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in [0, \pi]$. Porém, definindo a função f (bijeção retirada de [2], onde foi definida e demonstrada) como:

$$\begin{aligned} f : Q &\rightarrow \overline{SE}^2 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (\cos(\phi) \sin(\frac{\theta}{2}), \sin(\phi) \sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2})), \end{aligned}$$

onde $\overline{SE}^2 = SE^2 - \{(0, 0, 1), (x, y, 0)\}$ e $Q = (0, \pi) \times [0, 2\pi)$, temos que f é injetora, pois

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi_1) \sin(\frac{\theta_1}{2}) \\ \sin(\phi_1) \sin(\frac{\theta_1}{2}) \\ \cos(\frac{\theta_1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_2) \sin(\frac{\theta_2}{2}) \\ \sin(\phi_2) \sin(\frac{\theta_2}{2}) \\ \cos(\frac{\theta_2}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \cos(\frac{\theta_1}{2}) = \cos(\frac{\theta_2}{2}) \Rightarrow \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_2}{2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Como $\theta_1 \in (0, \pi) \Rightarrow \sin(\frac{\theta_1}{2}) \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1) \sin(\frac{\theta_1}{2}) &= \cos(\phi_2) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & \Rightarrow & \cos(\phi_1) = \cos(\phi_2) \\ \sin(\phi_1) \sin(\frac{\theta_1}{2}) &= \sin(\phi_2) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & \Rightarrow & \sin(\phi_1) = \sin(\phi_2) \end{aligned} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2.$$

Temos, também, que f é sobrejetora, pois, sejam $(x, y, z) \in \overline{SE}^2$, $\theta_1 = 2 \arccos(z)$ e ϕ_1 é tal que,

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{x}{\sin(\arccos(z))}\right) \quad e \quad \phi_1 = \arcsen\left(\frac{y}{\sin(\arccos(z))}\right).$$

θ_1 está bem definido, pois $\frac{\theta_1}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $z \in (0, 1)$, e como $z \neq 1 \Rightarrow \sin(\arccos(z)) \neq 0$, temos

$$\cos^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_1) = \frac{x^2 + y^2}{\sin^2(\arccos(z))} = \frac{x^2 + y^2}{1 - \cos^2(\arccos(z))} = \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} = 1,$$

pois $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Deste último resultado, verificamos que, dado um ponto $(x, y, z) \in \overline{SE}^2$, obtemos um ângulo $\phi_1 \in [0, 2\pi)$ que satisfaz a identidade fundamental trigonométrica. Logo, temos:

$$f(\theta_1, \phi_1) = \begin{bmatrix} \cos\left(\arccos\left(\frac{x}{\sin(\arccos(z))}\right)\right) \sin(\arccos(z)) \\ \sin\left(\arcsen\left(\frac{y}{\sin(\arccos(z))}\right)\right) \sin(\arccos(z)) \\ \cos(\arccos(z)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Contudo, se f é injetora e sobrejetora, então ela é bijetora. Agora, definindo a função g (bijeção retirada de [2]), como

$$\begin{aligned} g : Q &\rightarrow \overline{S}^2 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta)), \end{aligned}$$

onde $\overline{S}^2 = S^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ e $Q = (0, \pi) \times [0, 2\pi)$, temos que g também é bijetora (demonstração semelhante à de f). Levando-se em consideração que f e g são bijetoras, podemos definir uma função ν (definição retirada de [2]) que é a composição de g com a inversa de f , assim

$$\begin{aligned} \nu : SE^2 &\rightarrow S^2 \\ (x, y, z) &\mapsto g(f^{-1}(x, y, z)) \\ (0, 0, 1) &\mapsto (0, 0, 1) \\ (x, y, 0) &\mapsto (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Note que ν é uma função bijetora para $z \neq 0$, pois o domínio de g é igual ao contra-domínio de f^{-1} e $g \circ f^{-1}$ é uma composição de funções bijetoras.

Contudo, a partir dessas bijeções encontradas, podemos utilizar a esfera S^2 de $\mathbb{R}^3$ (Figura 1) para representar um q-bit, no lugar de se utilizar a semi-esfera SE^2 .

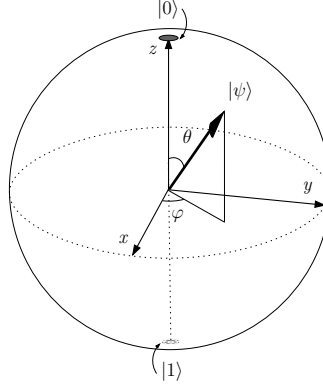


Figura 1: Representação de um q-bit na Esfera de Bloch.

5.4 O Vetor de Bloch

Cada elemento da imagem da função ν é conhecido como vetor de Bloch e a Esfera de Bloch é o lugar geométrico desses vetores (Figura 1). Considerando a forma polar de um q-bit, expressa na Equação 5.6, dizemos que o Vetor de Bloch é dado por

$$B|\psi\rangle_B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (5.8)$$

6 Propriedades da Esfera de Bloch

Nesta seção, serão discutidas algumas propriedades que podem ser vistas a partir da visualização de um q-bit na Esfera.

Propriedade 6.1. (Q-bits Equiprováveis) *Na esfera de Bloch, usando a parametrização apresentada na Equação 5.8, quaisquer dois vetores de Bloch que pertençam a um mesmo plano, paralelo ao plano XY , representam q -bits que têm probabilidades iguais de produzirem $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, ao serem medidos (propriedade demonstrada em [2]).*

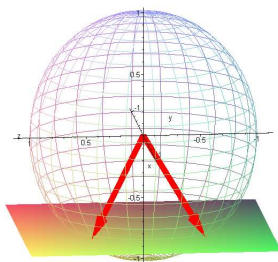


Figura 2: Q-Bits Equiprováveis.

Propriedade 6.2. (Vetores Antípodas e Ortogonais) *Na esfera de Bloch, usando a parametrização apresentada na Equação 5.8, quaisquer dois vetores de Bloch antípodas são representantes de dois q -bits ortogonais (propriedade demonstrada em [2]).*

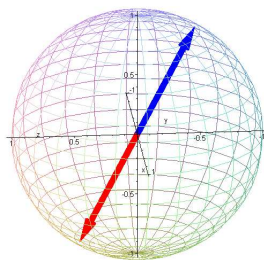


Figura 3: Vetores antípodas e ortogonais.

Propriedade 6.3. (Q-bits com Vetores de Bloch iguais) *Considerando dois q -bits, $|\psi\rangle_1 = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ e $|\psi\rangle_2 = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$, e seus vetores de Bloch $B|\psi\rangle_1$ e $B|\psi\rangle_2$ (utilizando a parametrização proposta na Equação 5.8), temos que*

$$|\psi\rangle_2 = e^{i\delta} |\psi\rangle_1 \Leftrightarrow B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2,$$

onde $0 \leq \delta < 2\pi$.

Demonstração:

$$(i) \quad |\psi\rangle_2 = e^{i\delta} |\psi\rangle_1 \Rightarrow B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2$$

Por hipótese, temos

$$|\alpha_2| = |e^{i\delta} \alpha_1| = |e^{i\delta}| |\alpha_1| = |\alpha_1|.$$

Pela Eq. (5.6), temos

$$\theta_1 = 2 \arccos(|\alpha_1|) \Rightarrow |\alpha_1| = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right),$$

$$\theta_2 = 2 \arccos(|\alpha_2|) \Rightarrow |\alpha_2| = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right).$$

Assim,

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

E, sabendo que $\theta_n \in [0, \pi]$ (Eq. (5.6)), temos que

$$\frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_2}{2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Utilizando a hipótese e escrevendo α_1 e β_1 em forma polar, temos

$$\alpha_2 = e^{i\delta} \alpha_1 = |\alpha_1| e^{i(\delta + \text{Arg}(\alpha_1))}$$

$$\beta_2 = e^{i\delta} \beta_1 = |\beta_1| e^{i(\delta + \text{Arg}(\beta_1))},$$

e pela Eq. (5.6), levando-se em consideração que as operações com ângulos serão executadas em aritmética módulo 2π (ou seja, $-\delta = 2\pi - \delta$), temos

$$\phi_2 = \text{Arg}(\beta_2) - \text{Arg}(\alpha_2) =$$

$$(\delta + \text{Arg}(\beta_1)) - (\delta + \text{Arg}(\alpha_1)) = \phi_1.$$

Logo, pela Eq. (5.8),

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi_1) \sin(\theta_1) \\ \sin(\phi_1) \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_2) \sin(\theta_2) \\ \sin(\phi_2) \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2.$$

$$(ii) \quad B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2 \Rightarrow |\psi\rangle_2 = e^{i\delta} |\psi\rangle_1$$

Para $B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2 \neq (0, 0, \pm 1)$, temos

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi_1) \sin(\theta_1) \\ \sin(\phi_1) \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_2) \sin(\theta_2) \\ \sin(\phi_2) \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1) &= \cos(\theta_2), \quad \theta_n \in (0, \pi) \\
\sin(\phi_1) \sin(\theta_1) &= \sin(\phi_2) \sin(\theta_2) \Rightarrow \\
\cos(\phi_1) \sin(\theta_1) &= \cos(\phi_2) \sin(\theta_2) \\
\Rightarrow \theta_1 &= \theta_2 \quad e \quad \phi_1 = \phi_2.
\end{aligned}$$

Pela Eq.(5.6),

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_1 &= e^{i\gamma_1} \left[\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1\rangle \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow e^{-i\gamma_1} |\psi\rangle_1 &= \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1\rangle = \\
= \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |1\rangle &= e^{-i\gamma_2} |\psi\rangle_2 \Rightarrow \\
\Rightarrow |\psi\rangle_2 &= e^{i(\gamma_2 - \gamma_1)} |\psi\rangle_1 \Rightarrow |\psi\rangle_2 = e^{i\delta} |\psi\rangle_1,
\end{aligned}$$

onde $(\delta \in [0, 2\pi))$.

Para $B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2 = (0, 0, 1)$, temos $\theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow |\psi\rangle_1 = e^{i\gamma_1} |0\rangle \Rightarrow e^{-i\gamma_1} |\psi\rangle_1 = |0\rangle = e^{-i\gamma_2} |\psi\rangle_2 \Rightarrow |\psi\rangle_2 = e^{i(\gamma_2 - \gamma_1)} |\psi\rangle_1 \Rightarrow |\psi\rangle_2 = e^{i\delta} |\psi\rangle_1$ e, para $B|\psi\rangle_1 = B|\psi\rangle_2 = (0, 0, -1)$, temos $\theta_1 = \theta_2 = \pi \Rightarrow |\psi\rangle_1 = e^{i(\gamma_1 + \phi_1)} |1\rangle \Rightarrow e^{-i(\gamma_1 + \phi_1)} |\psi\rangle_1 = |1\rangle = e^{-i(\gamma_2 + \phi_2)} |\psi\rangle_2 \Rightarrow |\psi\rangle_2 = e^{i((\gamma_2 + \phi_2) - (\gamma_1 + \phi_1))} |\psi\rangle_1 \Rightarrow |\psi\rangle_2 = e^{i\delta} |\psi\rangle_1$. Ou seja, esta propriedade diz que cada vetor de Bloch $B|\psi\rangle_B$ está associado a um conjunto de q-bits do tipo $e^{i\delta} |\psi\rangle_B$ ($\delta \in [0, 2\pi)$) e todos os vetores deste conjunto têm uma única representação na Esfera de Bloch. ■

7 Portas Quânticas de um Q-Bit

Um computador clássico processa bits e, para isto, é equipado com um conjunto finito de portas lógicas que são aplicadas em um conjunto finito de bits. Já um computador quântico processa q-bits e, de forma análoga ao computador clássico, está equipado com um conjunto finito de componentes fundamentais chamados *portas quânticas*. Cada porta quântica é uma transformação unitária que age em um número fixo de q-bits. Nesta seção, consideraremos apenas a ação dessas portas em um único q-bit.

7.1 Matrizes de Pauli

Um q-bit é um vetor unitário na forma $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, onde α e β são números complexos tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Isto significa que, ao aplicarmos um operador em um q-bit, temos que preservar sua norma para que o vetor alterado continue obedecendo a esta condição. Por este motivo, operadores de um q-bit são descritos por matrizes unitárias 2×2 . Destes operadores unitários, podemos destacar as *matrizes de Pauli* (veja [3], p.174), definidas por

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Estas três matrizes são Hermitianas (veja a definição 2.7) e satisfazem as seguintes regras de multiplicação:

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I,$$

$$XY = -YX = iZ, \quad YZ = -ZY = iX, \quad ZX = -XZ = iY,$$

onde I é a matriz identidade 2×2 .

É importante ressaltar que os auto-vetores normalizados das matrizes de Pauli, quando transformados em vetores de Bloch, resultam em vetores pertencentes aos eixos. Assim, os auto-vetores normalizados do operador X são

$$v_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E os vetores de Bloch associados a eles são

$$B(v_{x_1}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B(v_{x_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que pertencem ao eixo x da esfera. Temos também que

$$v_{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_{y_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

são os auto-vetores normalizados de Y , que são representados na esfera pelos seguintes vetores:

$$B(v_{y_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B(v_{y_2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E para Z , temos como auto-vetores

$$v_{z_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad v_{z_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que já são unitários e são representados pelos vetores

$$B(v_{z_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B(v_{z_2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

na esfera de Bloch.

7.2 Matrizes de Rotação

Das matrizes de Pauli, surge uma outra classe de matrizes, as *Matrizes de Rotação* sobre os eixos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, definidas como

$$R_x(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta X}{2}}, \quad R_y(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Y}{2}} \quad e \quad R_z(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Z}{2}}.$$

Porém, para as matrizes A tais que $A^2 = I$, temos que

$$e^{iAx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (Ai)^k}{k!} = I + ixA - \frac{x^2 I}{2!} - \frac{ix^3 IA}{3!} + \frac{x^4 I}{4!} + \dots = \cos(x)I + iA \sin(x).$$

E com esse resultado, podemos reescrever as matrizes de rotação, dessa forma:

$$R_x(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta X}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - iX \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Y}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - iY \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Z}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - iZ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Estas matrizes representam rotações em torno dos eixos x , y e z na esfera unitária do $\mathbb{R}^3$.

A partir das matrizes de rotação, podemos representar qualquer operador unitário (U) de um q-bit, pois, seja $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário, podemos generalizar as definições anteriores definindo uma rotação de θ em torno do eixo $\hat{n}$ através da seguinte equação:

$$R_{\hat{n}}(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta \hat{n} \cdot \sigma}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_x X + n_y Y + n_z Z),$$

onde $\sigma = (X, Y, Z)$ é o vetor formado pelas matrizes de Pauli. Esta equação simplifica o seguinte resultado:

Teorema 7.1. *Seja U um operador unitário de um q-bit, então*

$$U = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\theta),$$

onde $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ e $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário (enunciado em [3] e testado no programa da seção 9).

Vejamos, a seguir, dois teoremas que nos ajudarão a entender melhor o comportamento de algumas portas quânticas de um q-bit na Esfera de Bloch.

Teorema 7.2. (Decomposição Z-Y) *Seja U um operador unitário de um q -bit, então existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta).$$

Demonstração:

Seja

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix},$$

uma matriz unitária, temos que $u_{ij} \in \mathbb{C}$, logo podemos escrever

$$U = \begin{bmatrix} |u_{11}| e^{i\varphi_{11}} & |u_{12}| e^{i\varphi_{12}} \\ |u_{21}| e^{i\varphi_{21}} & |u_{22}| e^{i\varphi_{22}} \end{bmatrix}.$$

Além disso, temos que $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ (onde I é a matriz identidade) e, assim,

$$\begin{aligned} u_{11}\bar{u}_{11} + u_{12}\bar{u}_{12} &= 1, & u_{21}\bar{u}_{21} + u_{22}\bar{u}_{22} &= 1, & u_{11}\bar{u}_{11} + u_{21}\bar{u}_{21} &= 1, \\ u_{12}\bar{u}_{12} + u_{22}\bar{u}_{22} &= 1, & u_{11}\bar{u}_{12} + u_{21}\bar{u}_{22} &= 0, & u_{11}\bar{u}_{21} + u_{12}\bar{u}_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Lembrando-se que $z\bar{z} = |z|$, onde $z \in \mathbb{C}$, por (7.12), podemos escrever

$$|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = 1, \quad |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2 = 1, \quad |u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 = 1, \quad |u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 = 1. \quad (7.13)$$

Lembrando-se que o ângulo γ de rotação em $\mathbb{R}^3$ é tal que $\gamma \in [0, \pi]$, temos:

$$|u_{11}| = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad |u_{21}| = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad |u_{12}| = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad |u_{22}| = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (7.14)$$

Logo, temos então

$$U = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{11}} & \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{12}} \\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{21}} & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{22}} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo

$$e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

e igualando à matriz U , queremos escrever

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{11}} & \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{12}} \\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{21}} & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix},$$

o que nos remete a um sistema de 4 equações e 4 variáveis. Esse sistema será resolvido em 3 etapas, a primeira etapa é para $\gamma \in (0, \pi)$, a segunda para $\gamma = 0$ e a terceira para $\gamma = \pi$.

1ª Etapa - $\gamma \in (0, \pi)$:

Temos

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{11}} &= e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), & \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{12}} &= -e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{21}} &= e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\varphi_{22}} &= e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

E assim, $\varphi_{11} = \alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}$, $\varphi_{12} = \pi + \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}$, $\varphi_{21} = \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}$, $\varphi_{22} = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}$. E assim temos,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}, & \beta &= \pi - (\varphi_{12} - \varphi_{22}), & \delta &= -\pi - (\varphi_{11} - \varphi_{12}) \\ \gamma &= 2 \arcsen(|u_{ij}|), & \text{para } i \neq j, & \text{ou } \gamma = 2 \arccos(|u_{ij}|), & \text{para } i = j.\end{aligned}$$

Logo, $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$ para $\gamma \in (0, \pi)$.

2ª Etapa - $\gamma = 0$:

$$\begin{bmatrix} e^{i\varphi_{11}} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, teríamos um sistema possível e indeterminado, onde

$$\alpha = \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}, \quad \beta + \delta = \varphi_{22} - \varphi_{11}, \quad \gamma = 0.$$

Logo, $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$ para $\gamma = 0$.

3ª Etapa - $\gamma = \pi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{i\varphi_{12}} \\ e^{i\varphi_{21}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{i(\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2})} \\ e^{i(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})} & 0 \end{bmatrix},$$

Neste caso, teríamos um sistema possível e indeterminado, onde

$$\alpha = \frac{\varphi_{12} + \varphi_{21} - \pi}{2}, \quad \delta - \beta = \varphi_{12} - \varphi_{21} - \pi, \quad \gamma = \pi.$$

Logo, $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$ para $\gamma = \pi$. ■

Teorema 7.3. (Decomposição X-Y) *Seja U um operador unitário de um q -bit, então existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta).$$

Demonstração: Análoga ao teorema anterior segundo [3].

7.3 Porta de Hadamard (H)

A Porta de Hadamard é uma das mais usadas na Computação Quântica. Este operador, definido por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

aplicado nos estados da base computacional, resulta em

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Note que, aplicando-se a porta H no estado descrito pela Equação 3.1, tem-se

$$H|\psi\rangle = \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Como a porta de Hadamard é um operador unitário, podemos escrevê-lo na forma do Teorema 7.1. Assim,

$$H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_{\hat{n}}(\pi),$$

onde $\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Ou seja, a porta de Hadamard, na Esfera de Bloch, se comporta como uma rotação de 180° em torno do vetor $\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Também podemos escrever a porta H em função das matrizes de rotação em torno dos eixos z e y , segundo o Teorema 7.2. Assim,

$$H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_z(0) R_y(\frac{\pi}{2}) R_z(\pi),$$

ou, tendo em vista que $R_z(0) = I$,

$$H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_y(\frac{\pi}{2}) R_z(\pi),$$

o que, na Esfera de Bloch, caracteriza uma rotação de 90° em torno do eixo y seguida de uma rotação de 180° em torno do eixo z .

7.4 Porta S (*Phase Gate*)

Este operador, definido por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

aplicado nos estados da base computacional, resulta em

$$S|0\rangle = |0\rangle$$

$$S|1\rangle = i|1\rangle.$$

Aplicando-se a porta S no estado descrito pela Equação 3.1, tem-se

$$S|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle.$$

Note que houve uma alteração no fator de fase relativo.

A porta S, por ser um operador unitário, também pode ser escrita na forma descrita pelo Teorema 7.1. Assim,

$$S = e^{i\frac{\pi}{4}} R_{\hat{n}}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

onde $\hat{n} = (0, 0, 1)$. Ou seja, a porta S, na Esfera de Bloch, se comporta com uma rotação de 90° em torno do eixo z . Também podemos reescrever o operador S segundo o Teorema 7.2:

$$S = e^{i\frac{\pi}{4}} R_z\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

7.5 Porta $\frac{\pi}{8}$ (T)

Este operador, definido por

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

ou

$$T = e^{i\frac{\pi}{8}} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix},$$

o que explica o nome $\frac{\pi}{8}$, aplicado nos estados da base computacional resulta em

$$T|0\rangle = |0\rangle$$

$$T|1\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}} |1\rangle.$$

A porta T aplicada no estado da Equação 3.1, resulta em

$$T|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}} \beta|1\rangle.$$

Assim como as portas S e de Hadamard, a porta T também pode ser escrita em função de matrizes de rotação. Assim,

$$T = e^{i\frac{\pi}{8}} R_{\hat{n}}\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \hat{n} = (0, 0, 1)$$

ou

$$T = e^{i\frac{\pi}{8}} R_z\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

isto é, a porta T representa uma rotação de 45° em torno do eixo z da esfera.

Na seção 9.2, serão vistos alguns exemplos dessas rotações no Maplet *Quantum View*.

8 Maple

8.1 Pacote Maplets

Um Maplet é uma *interface* gráfica do Maple com o usuário. Este recurso permite ao usuário combinar pacotes e procedimentos com janelas interativas e caixas de diálogo.

Para construir um Maplet é preciso declarar na cláusula `with` do Maple um pacote chamado `Maplets` que se divide nos seguintes sub-pacotes:

- `Elements`,
- `Exemples`,
- `Tools`.

E uma função para para exibição do Maplet: `Display`.

Nesta seção, será descrito apenas o sub-pacote `Elements` que foi utilizado no projeto.

Elements

Este sub-pacote contém todos os componentes utilizados na criação do Maplet. Neste projeto, foram usados quatro tipos de componentes do Pacote `Elements`:

- Componentes Window Body
 - `Button`
 - `MathMLViewer`
 - `Plotter`
 - `Slider`
 - `TextField`
- Componentes Layout
 - `BoxLayout`
 - `BoxColumn`
 - `BoxRow`
- Componentes Menubar
 - `ButtonGroup`
 - `RadioButtonMenuItem`
 - `MenuItem`
- Componentes Command
 - `CloseWindow`

- Evaluate
- RunWindow
- Shutdown

OBS. (1): O componente mais significativo que pode ser inserido em um Maplet é o componente Window, que contém os componentes Layout, Menubar e Command. Essa estrutura pode ser vista no Help do Maple.

OBS. (2): A sintaxe dos comandos que se referem aos componentes aqui citados pode ser vista no Help do Maple.

9 Projeto *Quantum View*

A partir da Equação 5.6 e da Equação 5.8, nota-se que é possível escrever um algoritmo que execute a transformação de um q-bit $|\psi\rangle_B$ em um vetor de Bloch. A finalidade do projeto *Quantum View* é explorar essa possibilidade, facilitando cálculos complexos e repetitivos e ajudando com a exibição de gráficos. O objetivo é simples: desenvolver um conjunto de funções e procedimentos ligados às representações existentes na Computação Quântica. A princípio, o projeto dá ênfase à representação de um bit quântico na Esfera de Bloch, porém, posteriormente, pretendemos ampliá-lo e, assim, englobar outras representações.

O projeto encontra-se dividido em duas partes:

- Estudo da Teoria da Computação Quântica e de todas as ferramentas matemáticas necessárias para o entendimento desta teoria.
- Estudo da linguagem de computação Maple em todos os seus aspectos e, principalmente, confecção de Maplets que auxiliem os estudos da Teoria da Computação Quântica.

Quanto ao que se refere à confecção de Maplets, iremos apresentar, nesta seção, o Maplet *Quantum View*.

9.1 Detalhes do Maplet *Quantum View*

O *Quantum View* é um Maplet fácil de usar. Para isso, basta inserir como entrada as coordenadas de um vetor complexo, no formato $a + b*I$ reconhecido pelo Maple, e um operador unitário de ordem 2. O vetor inserido não precisa ser unitário, apesar de sabermos que um q-bit é representado por um vetor cuja norma é igual a 1. Isto se deve ao fato de o Maplet normalizar o vetor automaticamente. Então, vejamos um exemplo:

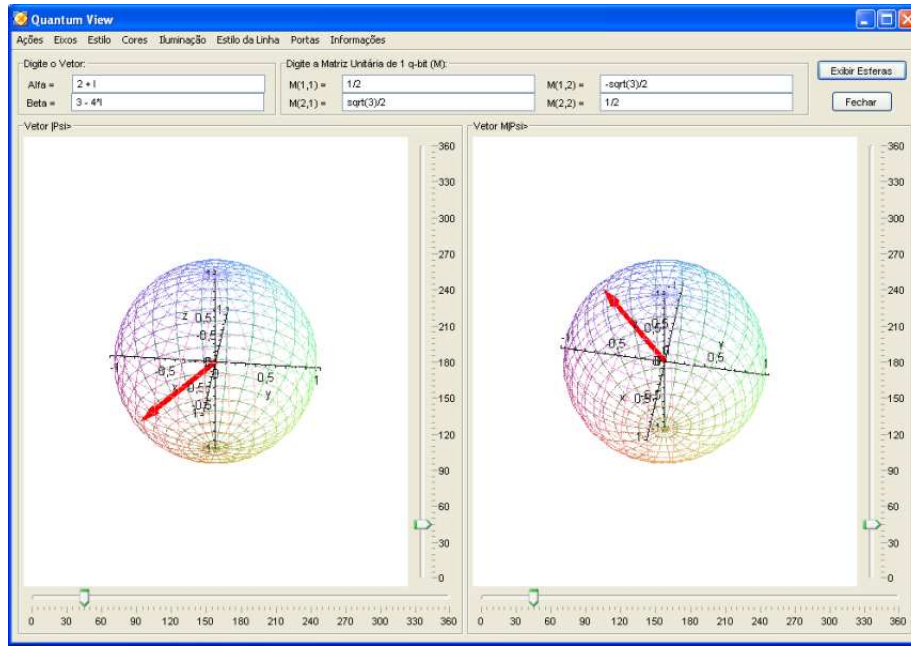


Figura 4: Exibição dos vetores de Bloch dentro das Esferas.

Vetor de Entrada:

$$v = \begin{bmatrix} 2 + i \\ 3 - 4i \end{bmatrix}$$

Operador Unitário:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Entrada no Maplet:

Agora, é só clicar no botão **Exibir Esferas** para obter o resultado exposto na Figura 4. Note que, o gráfico do lado esquerdo é o vetor de Bloch associado ao vetor $\frac{v}{\|v\|}$ e o gráfico do lado direito é o vetor de Bloch associado à transformação $M(\frac{v}{\|v\|})$.

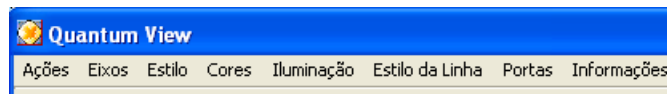


Figura 5: Menu Principal do Maplet.

Detalhes do Menu Principal:

O Maplet *Quantum View* é composto, também, por um Menu Principal (Figura 5), cujas funções serão especificadas a seguir:

- **Ações:** Executa as mesmas tarefas dos botões do lado superior direito da tela da Figura 4
- **Eixos:** Modifica o tipo de eixo a ser exibido nos gráficos das esferas. Com esta opção é possível colocar os gráficos em caixa, por exemplo.
- **Estilo:** Muda a aparência das esferas, deixando-as pontilhas, com grades ou exibindo apenas seus paralelos.
- **Cores:** Modifica as cores das esferas.
- **Iluminação:** Modifica, de forma sutil, o ponto de iluminação das esferas.
- **Estilo da Linha:** Modifica o estilo do traço de desenho das esferas. Pode ser modificado para os estilos SÓLIDO, PONTILHADO, TRACEJADO ou TRACEJADO E PONTILHADO.
- **Portas:** Preenche os campos reservados para os elementos da matriz unitária com uma porta quântica (uma das portas citadas na seção 7).
- **Informações:** Composto pelo subitem "Operadores e Vetores", este item abre uma janela com informações de entrada e saída de dados. Ex.: qual o vetor digitado inicialmente (vetor de entrada), qual o vetor de Bloch retornado, etc. Esta janela pode ser vista na Figura 6.

9.2 *Quantum View* em Ação

Esta seção se dedicará à exibição de algumas coisas que podem ser feitas com o *Quantum View*. Como foi visto na seção 7, das matrizes de Pauli, surge a classe das matrizes de rotação. Com o Maplet *Quantum View*, é possível enxergar como ocorrem essas rotações. Escolhemos o vetor $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ como exemplo. Neste vetor, será aplicado o operador descrito na Equação 7.9, considerando o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$. A Figura 7, mostra o resultado desta transformação, onde do lado esquerdo temos o vetor $|\psi\rangle$ e do lado direito temos $R_x(\frac{\pi}{2})|\psi\rangle$. Note que, nada ocorre. Isto se deve ao fato de o vetor ter a mesma direção

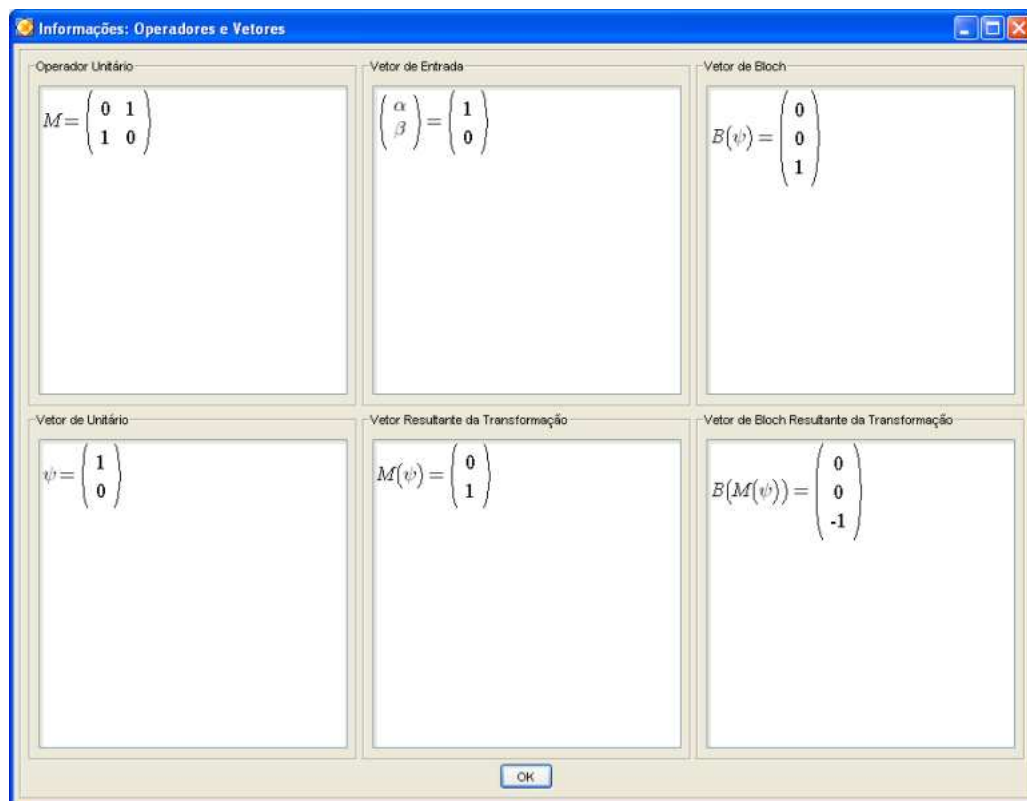


Figura 6: Janela de Informações sobre a Transformação Unitária executada.

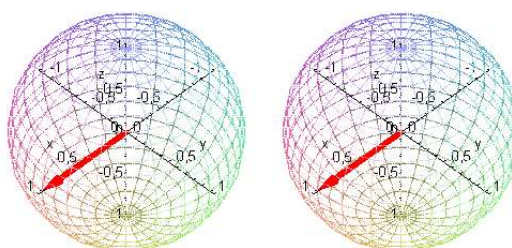


Figura 7: Rotação de 90° do vetor $|\psi\rangle$ em torno do eixo x .

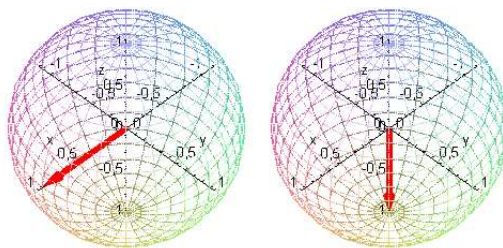


Figura 8: Rotação de 90° do vetor $|\psi\rangle$ em torno do eixo y .

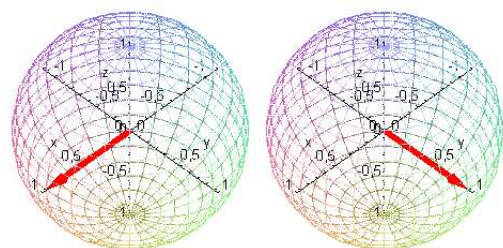


Figura 9: Rotação de 90° do vetor $|\psi\rangle$ em torno do eixo z .

do eixo x . Porém, se aplicarmos o operador de rotação descrito na Equação 7.10, neste mesmo vetor e considerarmos o mesmo ângulo θ , veremos um outro resultado, exposto na Figura 8, onde, do lado direito, temos $R_y(\frac{\pi}{2})|\psi\rangle$. Note que, houve uma rotação do vetor $|\psi\rangle$ de 90° em torno do eixo y .

Agora, podemos ver, também, a aplicação do operador descrito na Equação 7.11 (Figura 9), que representa uma rotação do vetor $|\psi\rangle$ de 90° em torno do eixo z , $R_z(\frac{\pi}{2})|\psi\rangle$. A partir do Maplet, também podemos verificar a aplicação das portas H, S e T. Para verificarmos essas transformações na Esfera, consideraremos o vetor $|\psi\rangle = \cos(\frac{\pi}{8})|0\rangle + i\sin(\frac{\pi}{8})|1\rangle$, que representa o vetor de Bloch $B|\psi\rangle = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pertencente ao plano $y\hat{O}z$.

Primeiramente, aplicaremos a porta de Hadamard. Colocando-se esses valores no Maplet, se obteve o seguinte resultado:

$$B(H|\psi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que os vetores $B|\psi\rangle$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ e $B(H|\psi\rangle)$ estão no mesmo plano de equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0$. Calculando-se os seguintes produtos internos

$$\langle \hat{n} | B|\psi\rangle = \frac{1}{2} = \cos(\delta) \quad e \quad \langle \hat{n} | B(H|\psi\rangle) = \frac{1}{2} = \cos(\delta'),$$

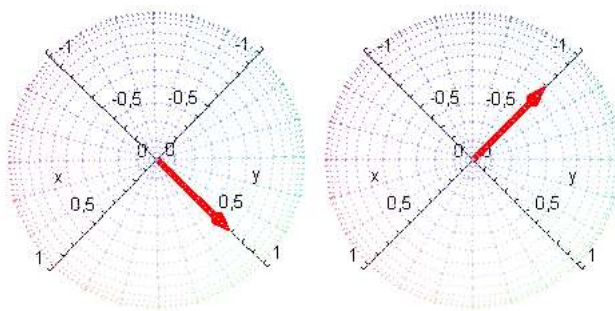


Figura 10: Rotação de 90° do vetor $B|\psi\rangle$ em torno do eixo z - vista do pólo da esfera.

onde $\delta \in [0, \pi]$ é o ângulo formado pelos vetores $|\hat{n}\rangle$ e $B|\psi\rangle$ e $\delta' \in [0, \pi]$ é o ângulo formado entre os vetores $|\hat{n}\rangle$ e $B(H|\psi\rangle)$, temos que $\delta = \delta'$, o que ilustra a rotação de 180° em torno de $\hat{n}$ proposta na seção 7.3.

Agora, aplicaremos a porta S em $|\psi\rangle$. Colocando-se como entrada o vetor $|\psi\rangle$ e o operador S , o Maple retornou o seguinte resultado:

$$B(S|\psi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 10 mostra o que ocorreu com o vetor $B|\psi\rangle$ após a aplicação de S . Do lado esquerdo temos $B|\psi\rangle$ e do lado direito temos $B(S|\psi\rangle)$. Note que houve uma rotação de 90° em torno do eixo z .

Finalmente, veremos os resultados para a porta T . Para $B(T|\psi\rangle)$ temos

$$B(T|\psi\rangle) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A Figura 11 mostra que houve uma rotação de 45° em torno do eixo z , como sugere a seção 7.5.

10 Considerações Finais

O projeto *Quantum View* é uma excelente oportunidade para se estudar não só a Teoria da Computação Quântica, mas, também, vários tópicos da Matemática. Neste trabalho, foi feita uma tentativa de relatar cada passo do projeto, desde seu início, com o estudo do Maple e a descoberta dos Maplets, até o estudo da Esfera de Bloch e das Matrizes de Rotação. Porém, o projeto pretende ir além destes relatos e se estender rumo a outras representações, a fim de que se tenha uma biblioteca de funções e procedimentos

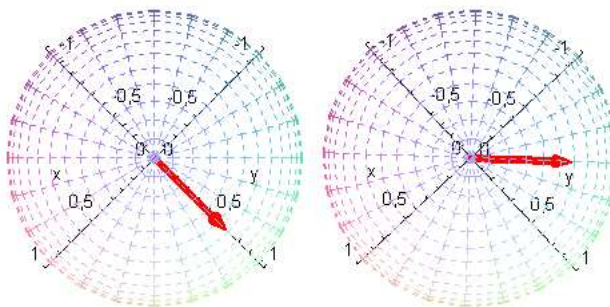


Figura 11: Rotação de 45° do vetor $B|\psi\rangle$ em torno do eixo z - vista do pólo da esfera.

que facilite a maioria dos cálculos e demonstrações que ainda não de aparecer. É importante destacar que todos os vetores de Bloch citados neste trabalho foram calculados pelo Maplet *Quantum View*.

Referências

- [1] Maplets beginner's guide. Waterloo, Canadá, 2001. Waterloo Maple Inc.
- [2] L.M. Carvalho, C.C. Lavor, and V.S. Motta. Caracterização matemática da esfera de bloch. *submetido a TEMA*, 2004.
- [3] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] R. Portugal. Introdução ao maple. LNCC, Petrópolis, 2002.
- [5] R. Portugal, C. Lavor, L.M. Carvalho, and N. Maculan. Uma introdução à computação quântica. In *Notas de Matemática Aplicada*, volume 8, SBMAC, São Carlos, 2004.
- [6] J. Preskill. *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*. California Institute of Technology, 1998.

