Fibrados Vetoriais Reais e Campos de Vetores sobre Variedades *

Maria Hermínia de Paula Leite Mello †

Resumo

Utilizamos a noção de fibrados vetoriais e existência de seções de fibrados para apresentar uma formulação equivalente do problema de determinar se uma variedade diferenciável admite ou não k-campos contínuos tangentes, linearmente independentes.

1 Introdução

Problemas sobre a geometria das variedades passaram a ter grande interesse na Física-Matemática, a partir dos trabalhos de A. Einstein (1879-1955) sobre a relatividade, iniciados em 1905. As questões levantadas pela Teoria da Relatividade necessitavam de uma formulação matemática adequada, o que motivou o desenvolvimento de trabalhos que contribuiram para a inter-relação entre Topologia, Geometria, Análise e Física. Problemas matemáticos importantes foram resolvidos por: H. Minkowski (1864-1909), G. Ricci-Curbastro (1853-1925), M. Grossmann (1878-1936), D. Hilbert (1862-1943), T. Levi-Civita (1873-1941), dando sustentação matemática à Teoria Geral da Relatividade, cuja versão final só foi publicada no final de 1915. Não poderíamos deixar de mencionar os trabalhos de G. F. B. Riemann (1826-1866). Convém lembrarmos um fato histórico interessante (vide [10]). Einstein teve uma idéia genial ao conceber a Teoria da Relatividade; no entanto, inicialmente expressou sua teoria em uma linguagem matemática muito simples, por não ter um conhecimento mais sofisticado na área da Matemática. Percebendo isso, Minkowski, que havia sido professor de Einstein, apresentou, em 1908, uma fundamentação matemática para as idéias de Einstein, reformulando a noção de espaço-tempo. A princípio, Einstein não deu a devida importância ao trabalho de Minkowski; mas, tempos depois indagou ao matemático Grossmann se havia alguma outra geometria que não fosse a Euclidiana. Grossmann respondeu-lhe que, 60 anos antes, Riemann havia desenvolvido uma geometria não-euclidiana, a fim de analisar as propriedades do espaço curvo, mas que a Geometria Riemaniana tinha um nível de complexidade que os físicos tradicionalmente evitavam. Na década de 20, o físico P. A. M. Dirac (1902-1984) deu uma contribuição relevante para o desenvolvimento da Topologia e Geometria Diferencial com a notável formulação matemática contida no seu trabalho sobre os princípios fundamentais da Mecânica Quântica, publicado em 1925. Seguiram-se os trabalhos dos matemáticos M. Atiyah (nascido em 1929), I. M. Singer (nascido em 1924), R. Bott (1923-2005) e, mais recentemente, de S. Donaldson (nascido em 1957) e M. H. Freedman (nascido em 1951), introduzindo novos

* *Palavras chave:* fibrados vetoriais, campos de vetores tangentes, k-campos, característica de Euler
† Departamento de Análise Matemática, IME/UERJ, mhplmello@ime.uerj.br

métodos na solução de problemas de Topologia e Geometria, com aplicações à Física Teórica (teoria de gauge). Muitos desses problemas utilizam a noção de fibrados vetoriais e são resolvidos por técnicas algébricas (técnicas utilizadas em Topologia Algébrica). Nesse texto, veremos que a questão sobre a existência de um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes, sobre uma variedade, pode ser formulada verificando se existe uma seção não-nula de um fibrado apropriado. O caso particular para $k = 1$ é o clássico Teorema de Poincaré-Hopf. Hirsch, no prefácio de seu livro [2], menciona que o estudo de fibrados vetoriais estabelece uma forte conexão entre Topologia Diferencial e Topologia Algébrica. A razão disso reside no fato de que cada classe de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre uma variedade M corresponde a uma classe de homotopia de aplicações da variedade M em uma outra variedade chamada variedade de Grassmann. O conceito de homotopia de aplicações, por sua vez, é central nos médotos de Topologia Algébrica. Assim, a noção de fibrados faz a ponte na tradução da formulação geométrica para a formulação algébrica de muitos problemas. Esperamos que esse breve histórico sirva de motivação para a leitura desse texto introdutório sobre o conceito de fibrados vetoriais e sua relação com a existência de campos de vetores tangentes sobre variedades diferenciáveis.

2 Fibrados

Dados B e F espaços topológicos, um fibrado sobre B, com fibra F, é um espaço topológico E que é localmente um produto $U_\alpha \times F$, onde U_α é um aberto de B. Podemos pensar que um fibrado consiste em uma união disjunta de fibras F, parametrizadas pelo espaço topológico B, sendo que as fibras são "coladas"de alguma forma. Um fibrado pode não ser globalmente um produto $B \times F$, como veremos em um exemplo posterior.

Definição 2.1 (fibrado) *Sejam E, B e F espaços topológicos, sendo B conexo. Um fibrado η sobre B, com fibra F, é uma quádrupla $\eta = (E, p, B, F)$ satisfazendo as condições:*
(i) $p : E \to B$ é uma aplicação sobrejetora;
(ii) para cada $b \in B$, existem um aberto $U_\alpha \subset B$, $b \in U_\alpha$ e um homeomorfismo Φ_α,
$\Phi_\alpha : U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha)$ tal que o diagrama abaixo é comutativo; isto é, $p \circ \Phi_\alpha = \pi_1$, sendo π_1 a projeção no primeiro fator.

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[d, "\pi_1"'] & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "p"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

O espaço E é chamado de espaço total e o espaço B de base do fibrado.
Por razões técnicas, que não mencionaremos nesse texto, suporemos sempre os espaços topológicos de Haussdorf e a base B sendo paracompacta.
O par (U_α, Φ_α) é chamado de uma trivialização local do fibrado, sendo que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura por abertos da base B. Para cada $b \in B$, $p^{-1}(b)$ é a fibra sobre b e será homeomorfa a F.

O homeomorfismo identifica cada fibra $p^{-1}(b)$ com o espaço F, por isso dizemos, simplesmente, que a fibra do fibrado é F.

Definição 2.2 (fibrado vetorial real) *O fibrado é dito fibrado vetorial real de dimensão n, quando para cada $b \in B$, a fibra $p^{-1}(b)$ tem estrutura de um espaço vetorial real de dimensão n e a composta: $\pi_2 \circ \Phi_\alpha : p^{-1}(b) \to \{b\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Assim, em um fibrado vetorial real de dimensão n a fibra é isomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Observação 2.1 *Podemos definir um fibrado diferenciável de maneira similar, exigindo-se que B e E sejam variedades diferenciáveis, $p : E \to B$ uma aplicação diferenciável e a aplicação Φ_α um difeomorfismo.*

Nos exemplos abaixo consideremos:
$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \text{tal que } \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$.
$D^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \text{tal que } \|x\| \leq 1\}$ o disco unitário de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 2.1 (fibrado trivial) *Um fibrado trivial sobre a base B, com fibra F, é a quádrupla $\eta = (B \times F, \pi_1, B, F)$.*

$$\begin{array}{c} B \times F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ B \end{array}$$

Alguns casos particulares de fibrado trivial são:

(i) fibrado trivial sobre S^1, cuja fibra também é S^1
Nesse caso o espaço total será o toro $S^1 \times S^1$ (vide Figura 1).

$$\begin{array}{c} S^1 \times S^1 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ S^1 \end{array}$$

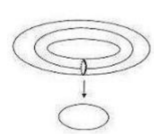

Figura 1: fibrado trivial sobre S^1, com fibra S^1

(ii) fibrado trivial sobre S^1, cuja fibra é o disco D^2
Nesse caso o espaço total será o toro sólido $S^1 \times D^2$.

(iii) fibrado vetorial real trivial

Se $F = \mathbb{R}^n$ temos o fibrado vetorial real trivial de dimensão n.

Observação 2.2 *Um fibrado cuja fibra é uma esfera S^n é chamado de fibrado de esferas, como por exemplo o do item (i). Um fibrado cuja fibra é um disco D^n é chamado de um fibrado de discos, como por exemplo o do item (ii).*

Exemplo 2.2 *Considere o fibrado onde o espaço total é $\mathbb{R}$, a base é S^1 e $p : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(t) = e^{2\pi i t}$. A fibra é $\mathbb{Z}$, que é um conjunto discreto.*

Exemplo 2.3 (fibrados de retas) *Um fibrado de retas ou de linhas sobre B é um fibrado vetorial sobre B, cuja fibra é $\mathbb{R}$. Consideremos B sendo o círculo S^1.*

(i) O fibrado trivial de retas sobre S^1

É o fibrado trivial cuja fibra é $F = \mathbb{R}$ e o espaço total é cilindro $E = S^1 \times \mathbb{R}$.

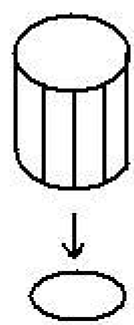

Figura 2: fibrado trivial de retas sobre S^1

(ii) O fibrado canônico de retas sobre S^1

Consideremos a faixa $[0, 1] \times \mathbb{R}$ e o espaço E obtido pela identificação da fronteira $\{0\} \times \mathbb{R}$ com a fronteira $\{1\} \times \mathbb{R}$, através da correspondência $(0, \lambda) \to (1, -\lambda)$. O espaço total E é a faixa de Möbius aberta. Veremos que este é um exemplo de um fibrado que é localmente trivial, porém não é globalmente trivial.

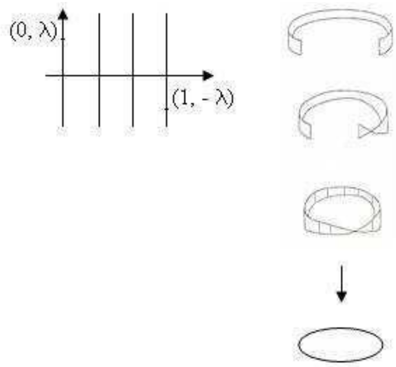

Figura 3: fibrado canônico de retas sobre S^1

Exemplo 2.4 (fibrado tangente de uma variedade diferenciável) *Seja M^n uma variedade diferenciável de classe C^{k+1} e dimensão n. Dado $y \in M$, consideremos o espaço tangente de M no ponto y, denotado por T_yM, que tem uma estrutura de espaço vetorial real isomorfo a $\mathbb{R}^n$. O fibrado tangente de M é um fibrado de classe C^k, $\tau(TM, p, M, \mathbb{R}^n)$, onde: o espaço total é $TM = \bigcup_{y \in M} T_yM = \{(y, v);\ y \in M \text{ e } v \in T_yM\}$ e $p : TM \to M$ definida por $p(y, v) = y$. Para cada carta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ da variedade, onde U é uma aberto de M tal que $y \in U$, definimos uma trivialização local do fibrado tangente por $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, $\Psi(y, v) = (y, d\varphi_y(v))$, $v \in T_yM$.*

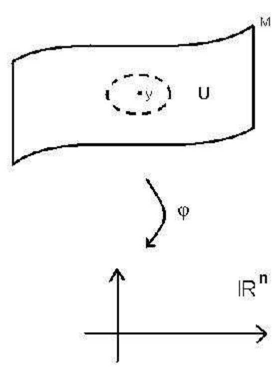

Figura 4: carta de uma variedade de dimensão n

Exemplo 2.5 (caso Particular: fibrado tangente de S^n, $n \geq 1$)

$$TS^n = \{(y, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1};\ \|y\| = 1 \text{ e } <y, v> = 0\}$$

onde $<\ ,\ >$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para $M = S^1$*, sejam* $y = (cos\ \theta, sen\ \theta) \in S^1$ *e* $v = (-sen\ \theta, cos\ \theta)$*. O vetor* v *é um vetor não-nulo, tangente a* S^1 *no ponto* y*. O espaço tangente a* S^1*, no ponto* y*, será constitudo dos múltiplos escalares do vetor* v*; isto é,* $T_y S^1 = \{\lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

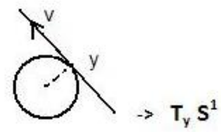

Figura 5: espaço tangente a S^1 no ponto y

Exemplo 2.6 (fibrado normal de uma variedade diferenciável mergulhada em $\mathbb{R}^k$***)*** *Sejam* M^n *uma variedade diferenciável de classe* C^1 *e* $T_y M$ *o espaço tangente de* M *no ponto* $y \in M$*. Suponhamos que* M *esteja mergulhada em* $\mathbb{R}^k$*,* $k > n$*.*
O fibrado normal de M *,* $\nu = (TM^{\perp}, p, M, \mathbb{R}^{k-n})$*, é o fibrado cuja fibra, no ponto* y*, é o complemento ortogonal em* $\mathbb{R}^k$ *do espaço tangente de* M *em* y *e, portanto, um espaço vetorial isomorfo a* $\mathbb{R}^{k-n}$*.*
O espaço total do fibrado normal de M *é* $TM^{\perp} = \{(y, w) \in M \times \mathbb{R}^k\ \ < w, v >= 0,\ \forall v \in T_y M\}$ *e* $p : TM^{\perp} \to M$ *é definida por* $p(y, w) = y$*.*

Exemplo 2.7 (caso Particular: fibrado normal de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$***,*** $n \geq 1$***)***

$$(TS^n)^{\perp} = \{(y, w) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \|y\| = 1,\ w = \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Esse fibrado vetorial é um fibrado de retas.

3 Isomorfismo de Fibrados Vetoriais

Definição 3.1 *Sejam* $\eta = (E, p, B, \mathbb{R}^n)$ *e* $\xi = (\widetilde{E}, q, B, \mathbb{R}^n)$ *fibrados vetoriais reais de dimensão* n *sobre a mesma base* B*. Os fibrados são ditos isomorfos se existir uma aplicação contínua* $g : E \to \widetilde{E}$ *tal que* $q \circ g = p$ *e a restrição a cada fibra* $g\ |_{p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \to q^{-1}(b)$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

Pode-se mostrar que se existe um isomorfismo entre os fibrados η *e* ξ*, então a aplicação* $g : E \to \widetilde{E}$ *será um homeomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{E} \arrow[dl, "q"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.1 *O fibrado tangente de S^1 é isomorfo ao fibrado de retas trivial sobre S^1. A aplicação $g : S^1 \times \mathbb{R} \to TS^1$ é definida por $g(y, \lambda) = (y, \lambda v)$, onde $y = (cos\theta, sen\theta)$ e $v = (-sen\theta, cos\theta)$.*

Exemplo 3.2 *O fibrado normal de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$é isomorfo ao fibrado de retas trivial sobre S^n. A aplicação $g : S^n \times \mathbb{R} \to (TS^n)^{\perp}$ é definida por $g(y, \lambda) = (y, \lambda y)$. A aplicação inversa $g^{-1} : (TS^n)^{\perp} \to S^n \times \mathbb{R}$ será $g^{-1}(y, w) = (y, < y, w >)$.*

Exemplo 3.3 *O fibrado canônico de retas sobre S^1 não é isomorfo ao fibrado trivial sobre S^1, pois a faixa de Möbuis não é homeomorfo ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.*

Definição 3.2 (seção de um fibrado) *Seja $\eta = (E, p, B, F)$ um fibrado. Uma seção do fibrado η é uma aplicação contínua $s : B \to E$ tal que a composta $p \circ s = id_B$; isto é, para cada $b \in B$, $s(b) \in p^{-1}(b)$.*

Proposição 3.1 *Seja $\eta = (E, p, B, \mathbb{R}^n)$ um fibrado vetorial real de dimensão n. O fibrado η é isomorfo ao fibrado trivial se, e somente se η admite n seções linearmente independentes.*

Demonstração

Seja $e_i = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0 \cdots 0)$, $1 \leq i \leq n$, o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$ e consideremos n seções, $s_i : B \to B \times \mathbb{R}^n$ do fibrado trivial $\epsilon = (B \times \mathbb{R}^n, \pi_1, , B)$, definidas por: $s_i(b) = (b, e_i)$. As secções $s_i : B \to B \times \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, são linearmente independentes.

Suponhamos que o fibrado eta seja isomorfo ao fibrado trivial, então existe uma aplicação contínua (na verdade um isomorfismo) $g : B \times \mathbb{R}^n \to E$ talque $p \circ g = \pi_1$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$ consideremos a aplicação $\widetilde{s}_i : B \to E$, definida pela composta $\widetilde{s}_i = g \circ s_i$:

$$B \xrightarrow{s_i} B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} E$$

Notemos que $p \circ \widetilde{s}_i = p \circ (g \circ s_i) = (p \circ g) \circ s_i = \pi_1 \circ s_i = id_B$.

$$\begin{tikzcd} B \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[dl, shift left, "p"] \\ B \arrow[ur, shift left, "\widetilde{s}_i"] & \end{tikzcd}$$

Como a aplicação g restrita a cada fibra é um isomorfismo, temos que as seções $\widetilde{s}_i$ são linearmente independentes.

Reciprocamente, suponhamos que o fibrado η admita n seções linearmente independentes $\widetilde{s}_i$, onde $1 \leq i \leq n$. Definimos uma aplicação $g : B \times \mathbb{R}^n \to E$ por:

$$g(b, (x_1, x_2, \cdots, x_n)) = x_1 s_1(b) + x_2 s_2(b) + \cdots + x_n s_n(b)$$

A aplicação g é contínua e leva cada fibra do fibrado trivial isomorficamente sobre a fibra correspondente do fibrado vetorial η.

Exemplo 3.4 *O fibrado tangente de S^3 é isomorfo ao fibrado trivial pois, admite 3 seções linearmente independente. São elas:*
Seja $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$
$s_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1, x_2, x_3, x_4), (-x_2, x_1, -x_4, x_3))$
$s_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1, x_2, x_3, x_4), (-x_3, x_4, x_1, -x_2))$
$s_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1, x_2, x_3, x_4), (-x_4, -x_3, x_2, x_1))$

Como um isomorfismo de fibrados identifica os fibrados, dizemos que o fibrado tangente de S^3 é trivial.

Uma variedade diferenciável cujo fibrado tangente é trivial é dita paralelizável. Assim, S^1 e S^3 são paralelizáveis.

4 Campos de Vetores Tangentes sobre uma Variedade

Nessa seção iremos estabelecer uma relação entre fibrados vetoriais e o problema da existência de k-campos contínuos de vetores tangentes, linearmente independentes, sobre uma variedade.
Consideraremos M^n uma variedade diferenciável de classe $C^k, k \geq 1$, conexa, de dimensão n e denotaremos o seu fibrado tangente, de forma mais simplificada, por $\tau_M : TM \to M$, onde $TM = \bigcup_{y \in M} T_yM$, sendo T_yM o espaço tangente de M no ponto $y \in M$.

Definição 4.1 (campo contínuo de vetores tangentes) *Um campo contínuo de vetores tangentes em M ou sobre M é uma seção $v : M \to TM$ do fibrado tangente de M. Isto é, para cada $y \in M$, $v(y) \in T_yM$.*

$$\begin{array}{c} TM \\ {\scriptstyle v}\big\uparrow\big\downarrow{\scriptstyle \tau_M} \\ M \end{array}$$

Exemplo 4.1 *É claro que podemos sempre definir o campo nulo sobre M; isto é, o campo que a cada $y \in M$ associa o vetor nulo de T_yM.*

Definição 4.2 (singularidade) *Seja $v : M \to TM$ um campo contínuo de vetores tangentes sobre M. Uma singularidade ou zero do campo v é um ponto $y \in M$, onde o campo se anula.*

Exemplo 4.2 *S^1 admite um campo contínuo de vetores tangentes não-nulo ou sem singularidades.*
Seja $y = (cos\ \theta, sen\ \theta) \in S^1$. O campo $v(y) = (-sen\ \theta, cos\ \theta)$ dado no exemplo 2.5 é um campo contínuo de vetores tangentes sem singularidades de S^1.

No exemplo 3.4, *as 3 seções* s_1, s_2 *e* s_3 *definem 3 campos contínuos de vetores tangentes , linearmente independentes, sobre* S^3.

Exemplo 4.3 *Para todo* $k \in \mathbb{N}$, S^{2k+1} *admite um campo contínuo de vetores tangentes sem singularidades. De fato, dado* $y = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) \in S^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+2}$, *defina o campo de vetores tangentes por:*

$$V = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{2k+1}, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \cdots, x_{2k+2}, -x_{2k+1})$$

Um problema clássico consiste em, dada uma variedade diferenciável, perguntar se ela admite um campo contínuo de vetores tangentes sem singularidades. Quando a variedade é compacta, o Teorema de Poincaré-Hopf (1927) responde a essa pergunta.

Teorema 4.1 (Teorema de Poincaré-Hopf) *Uma variedade diferenciável conexa, compacta, sem bordo de dimensão n admite um campo contínuo de vetores tangentes sem singularidades se, e somente se sua característica de Euler é nula.*

Dizemos que a característica de Euler é a obstrução à existência do campo contínuo de vetores tangentes sobre M.

Observação 4.1 *O Teorema de Poincaré-Hopf é válido para variedades com bordo, mas campo de vetores deverá satisfazer alguma condição sobre o bordo da variedade.*

Lembremos, no Teorema de Euler dado a seguir, o que é a característica de Euler de um poliedro P*convexo em* $\mathbb{R}^3$, *a qual será denotada por* $\chi(P)$.

Teorema 4.2 (Teorema de Euler) *Seja* P *um poliedro convexo em* $\mathbb{R}^3$.

$$\chi(P) = V - E + F = 2$$

onde V *é o número de vértices,* E *é o número de arestas e* F *o número de faces do poliedro.*

Observação 4.2 *(i) Se* M *é uma superfície diferenciável conexa, compacta, de dimensão 2, pode-se mostrar que* M *admite uma triangularização e sua característica de Euleré dada por* $\chi(M) = V - E + F$, *onde* V *é o número de vértices,* E *é o número de arestas e* F *o número de faces da triangularização de* M. *Além disso* $\chi(M)$ *é um invariante tologógico, s depende da superfície, sendo independente da triangularização escolhida.*

(ii) O conceito de característica de Euler se generaliza para uma variedade de qualquer dimensão, usando números de Betti (vide [1]).

Observação 4.3 *Em vez de definirmos a característica de Euler da variedade, podemos definir a chamada classe de Euler do fibrado tangente da variedade, denotada usualmente por* $e(\tau_M)$ *ou* $\varepsilon(\tau_M$. *Essa classe de Euler pertence a um grupo de cohomologia e, via um isomorfismo, irá corresponder a* $\chi(M) \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 4.4 (característica de Euler de** S^2**) *A esfera S^2 é homeomorfa a um poliedro em $\mathbb{R}^3$ (topologicamente, a esfera S^2 pode ser pensada como sendo uma pirâmide de base triangular). Assim, $\chi(S^2) = 2$.*
Pelo teorema de Poicaré-Hopf, todo campo contínuo de vetores tangentes na esfera S^2 tem pelo menos uma singularidade. Na linguagem do cotidiano, isso significa que "não se pode pentear uma esfera, sem fazer um redemoinho"(conhecido em inglês como hairy ball theorem).
Esse resultado se estende a toda esfera de dimensão par, pois $\chi(S^{2k}) = 2, \ k \geq 1$.
O fato de $\chi(S^{2k}) = 2$ implica também que o fibrado tangente de S^{2k} não é isomorfo ao fibrado trivial.

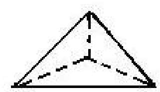

Figura 6: poliedro homeomorfo à esfera S^2

5 k-Campo Contínuo de Vetores Tangentes

Podemos generalizar o problema anterior, perguntando sobre a existência de um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes sobre uma variedade, onde $k \geq 1$. Por simplicidade diremos apenas um k-campo ou um k-referencial sobre a variedade. Por exemplo, em 3.4, *vimos que S^3 admite 3 seções linearmente independentes. Essas seções definem, em S^3, 3 campos contínuos de vetores tangentes e esses campos são linearmente independentes. Assim, dizemos que S^3 admite um 3-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes ou , simplesmente, um 3-campo. O toro admite um 2-campo, constituído de um par de campos de vetores tangentes, $v = (v_1, v_2)$, onde os vetores do campo v_1 são tangentes aos meridianos e os vetores do campo v_2 são tangentes aos paralelos. Essa generalização pode ser formulada utilizando-se um fibrado, chamado de fibrado de Stiefel associado ao fibrado tangente da variedade.*

Definição 5.1 (k-campo l.i. ou k-referencial) *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e k, tal que $1 \leq k \leq n$. Um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes sobre a variedade M, ou um k-referencial sobre M, é uma k-upla $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ de seções do fibrado tangente de M; isto é uma k-upla, onde cada v_i, $1 \leq i \leq k$ é um campo contínuo de vetores tangentes de M e o conjunto formado pelos campos v_i, $1 \leq i \leq k$, é linearmente independente.*

Definição 5.2 (variedade de Stiefel) *Seja $1 \leq k \leq n$. A variedade de Stiefel, não compacta, denotada por $V_k(\mathbb{R}^n)$, consiste de todas as k-uplas de vetores ou k-referenciais $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ que são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 5.3 (fibrado de Stiefel) *Sejam M uma variedade diferenciável conexa, de dimensão n, $1 \leq k \leq n$, e $\tau_M : TM \to M$ o fibrado tangente da variedade M. Para cada $y \in M$, podemos definir a variedade de Stiefel $V_k(T_yM)$, que consiste de todas as k-uplas $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ de vetores linearmente independentes do espaço tangente T_yM. O fibrado de Stiefel associado ao fibrado tangente τ_M é o fibrado cujas fibras são as variedades de Stiefel $V_k(T_yM)$, $y \in M$, e cujo espaço total, denotado por $V_k(TM)$, é a união dessas fibras. A aplicação $p : V_k(TM) \to M$ é, simplesmente a projeção que a cada k-referencial $(v_1, v_2, \cdots, v_k) \in V_k(T_yM)$ associa o ponto $y \in M$.*

Observação 5.1 *Como para cada $y \in M$, T_yM é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, dizemos que a fibra do fibrado de Stiefel é $F = V_k(\mathbb{R}^n)$.*

Agora, vamos definir novamente a noção de um k-campo contínuo de vetores tangentes a uma variedade diferenciável, utilizando o fibrado de Stiefel.

Definição 5.4 (k-campo l. i. ou k-referencial) *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e k, tal que $1 \leq k \leq n$. Um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes sobre a variedade M é uma seção do fibrado de Stiefel associado ao fibrado tangente de M, cujo espaço total é $V_k(TM)$ e a fibra é $V_k(\mathbb{R}^n)$.*

$$\begin{tikzcd} V_k(TM) \arrow[d, shift left, "p"] \\ M \arrow[u, shift left, "v"] \end{tikzcd}$$

Assim, a dificuldade em acharmos um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes sobre uma variedade diferenciável é equivalente ao problema da existência ou não de uma seção do fibrado de Stiefel associado ao fibrado tangente da variedade. Outras obstruções algébricas, além da característica de Euler, aparecem quando $k > 1$.

Definição 5.5 ($Span(M)$) *Sejam M uma variedade diferenciável conexa, de dimensão n. O Span de M, denotado por $Span(M)$, é o maior inteiro positivo k para o qual a variedade M admite um k-campo contínuo de vetores tangentes linearmente independentes.*

Exemplo 5.1 $Span(S^1) = 1$, $Span(S^2) = 0$, $Span(S^3) = 3$ $Span(S^1 \times S^1) = 2$

Finalizamos observando que nem sempre é fácil achar o Span de uma variedade diferenciável. Há, ainda, problemas em aberto sobre esse assunto. Recomendando também um texto clássico de E. Thomas sobre campos de vetores sobre variedades [8].

Referências

[1] GREENBERG, M.J.; Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin Inc, Massachusetts, 1967

[2] *HIRSCH, M.W.; Diferential Topology, GTM 33, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1976*

[3] *HUSEMOLLER, D.; Fibre Bundles, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1974*

[4] *MICHELSOHN, M-L; LAWSON JR, H.B.; Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.*

[5] *MILNOR, J.; Analytic proofs of the "hairy ball theorem"and the Brouwer Theory, American Mathematical Monthly, v. 85 (1978), p. 521-524.*

[6] *MILNOR, J.W. ; STASHEFF, J.D.; Characteristic Classes, Annals of Math. Studies, 76, Princeton University Press(1974).*

[7] *NASH, C.: SEN, S.; Topology and Geometry for Physicists, Academic Press, London, New York, 1983*

[8] *THOMAS, E.; Vector Fields on Manifolds; Bull. Amer. Math. Soc., v. 75, (1969), p. 643-683*

[9] *http://mathworld.wolfram.com*

[10] *http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/ history*